59-54-43-83
(181.6)

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 172

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников

по МАТЕМАТИКЕ

Кривошеева Кирилла Юрьевича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«22» марта 2016 года

Подпись участника

Оценку оставить без изменений

Апелляция

Прошу проверить правильность выставленных за мою работу баллов.

Задачи 1, 2, 4 решены верны, получен правильный ответ, хотя способы решения отличаются от официального решения.

В задаче 3 ход решения совпадает с опубликованным решением. Решение не закончено, но все кроме нахождения длины отрезка EF’ (из официального решения) сделано.

В задаче 5 решение практически аналогично опубликованному решению, только неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для трех переменных применено для тройки чисел 2bc, 4ac и 3ab и не указано при каких a, b и c объем минимальный. Ошибки могли быть допущены только случайно при переписывании.

Науменко А.В.

Мифтахов

Итого 80 (восемьдесят)

Черновик.

1. $\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}=\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\right)<\sin 75°\cdot\sqrt{2}$

$\frac{26}{19}<\sqrt{2}$

$26<19\sqrt{2}=\sqrt{722}$

$\sqrt{67}$

$\sin 75°=\sqrt{\frac{1-\cos 150°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=$

$=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=$

$=\frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\sin 75°\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}<\frac{26}{19}$

$19+19\sqrt{3}<52,$

$19\sqrt{3}<33$

$19<11\sqrt{3}$

$\sqrt{361}<\sqrt{363}$ – верно.

2. $3v_1=S$

$n\cdot v_2=S$

$mv_1-mv_2=S$ (n, m – целые)

$m\,S:3-\frac{mS}{}:n=S,$

$\frac{m}{3}-\frac{m}{n}=1,\quad m=8, n=6$

$mn-3m=3n$

$m>7, \frac{m}{n}>1$ – нет.

$mn:3,$

$\frac{mn}{m+n}=3$

$\frac{2mn}{m+n}=6,\quad \frac{2mn}{m+n}<m,$ (m больше 7),

~~тогда~~ $\cancel{\frac{2n}{m+n}<1},$

Если $n>\frac{2mn}{m+n}$, то $m+n>$

$n>m.$

$\frac{2}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}<m.$ Если и $n\geq$, то $n\geq m, m>n$

$\varnothing$

$n<\frac{2mn}{m+n},\ n=5,4,3,2,1\ldots$

$n-3>0$ – из $\cancel{mn}\ 3m=3n$

$n=5: 5m-3m=15,\ 2m=15$

$n=4: 4m-3m=12,\ m=12.$

3. $\sqrt{(x-3)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+6)^2}$

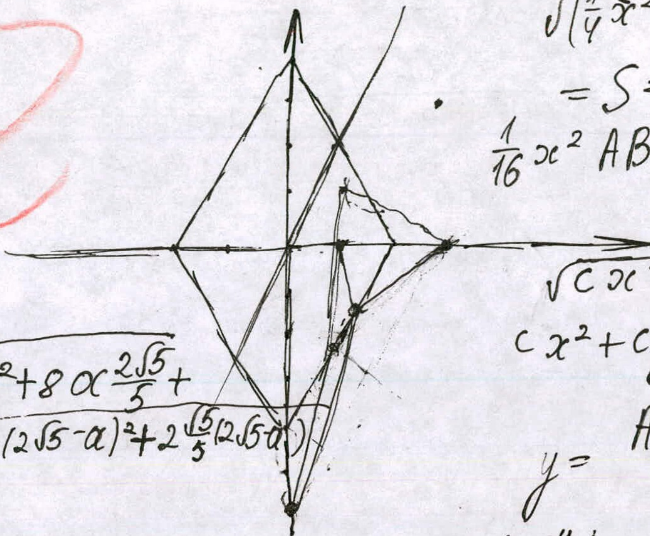
$2|x|+|y|=4.$

$\rho((x;y);(3;0)) + \rho((x,y);(0;-6))$

$\sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}AB^2\right)\cdot\left(\frac{1}{4}AB^2-\frac{1}{4}y^2\right)}$

$= S = AB\cdot h\cdot\frac{1}{2}$

$\frac{1}{16}x^2AB^2-\frac{1}{16}x^2y^2-\frac{1}{16}AB$



$\sqrt{cx^2+cy^2-\frac{1}{16}x^2y^2} = C,$

cx^2+cy^2

$\sqrt{4+\alpha^2+8\alpha\frac{2\sqrt5}{5}}+$
$+\sqrt{1+(2\sqrt5-\alpha)^2+2\frac{\sqrt5}{5}(2\sqrt5-\alpha)}$

$AB^2=45$

$y=$

$\frac{45}{16}x^2+\frac{45}{16}y^2-\frac{1}{16}x^2y^2$
$=Const.$

$y=4+$

$|y|=4-2|x|$ $\quad\rho((x;2x);(3;4))$ $\quad y=-4+2x.$
$\rho((x;2x);(0-2))$

Если $y\geq0,\ x\geq0:\ y=4-2x.$

$\sqrt{(x-3)^2+(2x-4)^2}+$
$+\sqrt{x^2+(2x+2)^2}\leq 2\cdot\sqrt{\ }$

$tg\,\alpha=\frac{1}{2},\quad 1+\frac{1}{4}=\frac{1}{\cos^2\alpha},$
$\cos^2\alpha=\frac{4}{5},$

$\sin\alpha=$
$=\frac{\sqrt5}{5},\ h=\frac{\sqrt5}{5}$

$\rho=\sqrt{h^2+\alpha^2}+\sqrt{h^2+(-\alpha+3\sqrt5)^2}$
$\leq\sqrt{\frac{h^2+\alpha^2+h^2+(3\sqrt5-\alpha)^2}{2}}$

α^2

$\sqrt{(x-3)^2+(2x-4)^2}=b$

$\sqrt{x^2+(2x^2+2)^2}=c$

$\sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)}$

$b+c\leq\sqrt{\ }$

$R=\sqrt{x^2-6x+9+4x^2-16x+16}$
$+\sqrt{x^2+4x^2+4+8x}=$
$=\sqrt{5x^2-22x+25}$
$+\sqrt{5x^2+8x+4}$

$f'=\frac{1}{2\sqrt{5x^2-22x+25}}\cdot(10x-22)$

$\alpha^2+(3\sqrt5-\alpha)^2$ $\quad A$

$f(x)$ $\quad AX+BX-min$

$p-min$

$r-max$

$AX+BX=x,$
$AX-BX=y$

$\frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{AX}{\sin\beta}=\frac{BX}{\sin(\alpha+\beta)}$

$S=\sqrt{\left(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}x\right)\cdot\left(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}y\right)\cdot\left(\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}y\right)}$
$\cdot\left(-\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}x\right)=$

59-54-43-83 (181.6)

Олимпиада ПВГ 2016

Черновик.

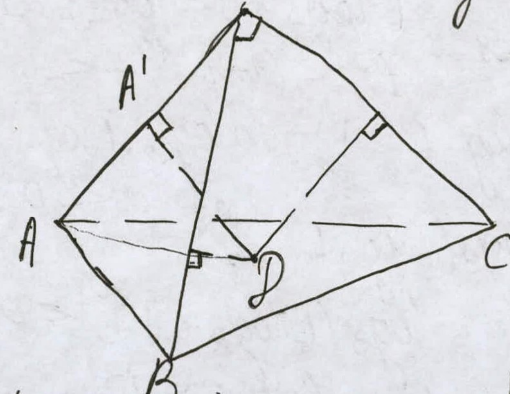
$\log_2^{21}[x]$ - целое

$$\log_3\left(\frac{\log_2^{21}[x]}{[\log_2 x]^{10}}\right)=n$$

$\dfrac{\log_2^{21}[x]}{[\log_2 x]^{10}}$ - целое.

тоже целое

$-\log_3([\log_2 x]^{10})+\log_3(\log_2^{21}[x])$



$[\log_3(\log_2 x)]^2-10\log_3([\log_2 x])$

$+21\log_3(\log_2[x])=0$

$(\overline{SD}-\overline{SA'})=\overline{A'D}\cdot SA'$

$\overline{SA'}=\alpha\cdot\overline{SA},$

$(\overline{SD}-\alpha\overline{SA})\cdot\alpha\overline{SA}=0$

$x>0, \log_2 x>0$

$x>1.$

$\alpha\,\overline{SD}\cdot\overline{SA}-\alpha^2 SA^2=0$

$\overline{SD}\cdot\overline{SA}=\alpha SA.$

$SD\cdot\cos\angle ASD.$

$g(x)\le\log_3(\log_2 x)^2-10t+21t$

$t\ge 0$ или

$t^2+11t\ge 0$ $t\le -11$

$\log_3(\log_2 x)=t$ ~~≥ 0~~

$t^2-10t+21t\ge 0,$

$$\sqrt{(x-3)^2+(2x-4)^2}+\sqrt{x^2+(2x+2)^2}\le 2\sqrt{\frac{(x-3)^2+(2x-4)^2+x^2+(2x+2)^2}{2}}$$

всегда

$(x-3)^2+(2x-4)^2+x^2+(2x+2)=x^2-6x+9+4x^2-16x+16+x^2+$

$+4x^2+8x+2=10x^2-14x+27.$

$x=\dfrac{14}{20}=\dfrac{7}{10}$ $\cdot 2\cdot\left(\sqrt{\dfrac{\frac{23^2}{10^2}+\frac{26^2}{10^2}+\frac{7^2}{10}+\frac{34^2}{10^2}}{2}}\right.$

$5x^2-22x+25=5\left(x^2-\frac{22x}{5}+5\right)=5\left(x^2-\frac{22x}{5}+\left(\frac{11}{5}\right)^2+\frac{14}{25}\right)$

$5x^2+8x+4=5(x^2$

$x=\frac{7}{10}$: $\log_3(n)$ $\log[x]$

$[x]$ - целое

Если $[x]=2^\alpha$, 2^α - целое.

$\log_3\left(\dfrac{\log_2^{21}[x]}{[\log_2 x]^{10}}\right)=-\log_3(m)$

~~$[\log_3(\log_2 x)]=\log_3(\log_2 x)$~~

~~или $\log_3$~~

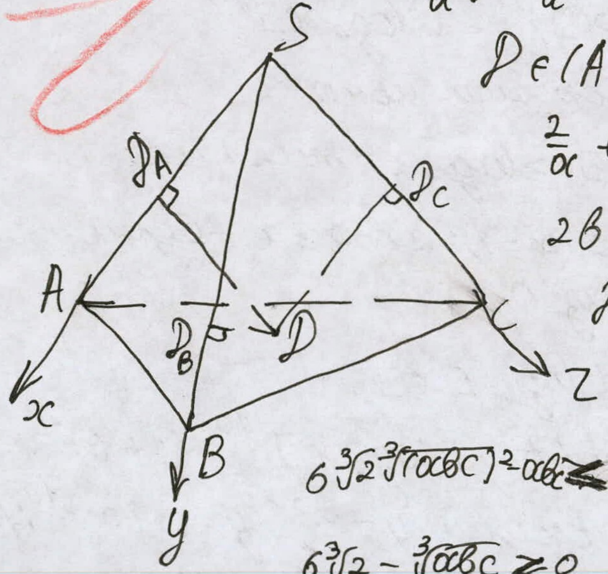
$\dfrac{\log_2^{21}[x]}{[\log_2 x]^{10}}=$ $\log_2^{21}[x]$ - целое

$(\log_2[x])^{21}$ - целое

$[x]=2^{\alpha}$ α^{21} - целое.

скости (ABC). Чистовик

$\cancel{-\frac{1}{a}D}\ \frac{1}{a}x+\frac{1}{b}y+\frac{1}{c}z-1=0.$



$D\in(ABC)$, тогда:

$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}-1=0$

$2bc+3ac+4bc-abc=0.$

Но $2bc+3ac+4bc\geq 3\sqrt[3]{24a^2b^2c^2}=$ ← арифм. ошибка

$=6\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{(abc)^2}.$

Имеем:

$6\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{(abc)^2}-abc\leq 2bc+3ac+4bc-abc=0$

$6\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{abc}\leq 0,$

$abc\geq 6^3\cdot 2,$

$V_{SABC}=\frac{1}{6}abc\geq 6^2\cdot 2=72.$

Ответ: 72

растающая, тогда $\frac{(\log_2[x])^{21}}{[\log_2 x]^{10}}<1$, Чистовик

$$(\log_2[x])^{21}<[\log_2 x]^{10}.$$

$\log_2[x]+1\geq\log_2 x$ – действительно:

$\log_2[x]+\log_2 2=\log_2 2[x]\geq\log_2 x$, так как:

$2[x]>2(x-1)=2x-2\geq x$ – верно при $x\geq 2$ из ОДЗ.

Но $[\log_2 x]<\log_2 x\leq 1+\log_2[x]$.

Пусть $\log_2[x]=t$. Имеем: $t^{21}<[\log_2 x]^{10}<(1+t)^{10}$.

В силу монотонности функций $y=x^{21}$; $y=(1+x)^{10}$ при $x>0$ и того, что при $t=2$; $2^{21}>4^{10}>3^{10}$ имеем:

если $t^{21}<(1+t)^{10}$, то $t<2$. $\log_2[x]<2=\log_2 4$, тогда $[x]<4$. ~~Но тогда $\log_2[x]<2<3$~~. Но ~~тогда~~ тогда $x<4$.

~~$\log_3([\log_2 x])=10\log_3[\log$~~

Если $x<4$, то $\log_2 x<2$, $[\log_2 x]>0$ – из ОДЗ. Но $[\log_2 x]<2$ – так как $\log_2 x<2$. Тогда $[\log_2 x]=1$, $\log_3([\log_2 x])=0$. При этом $\log_3(\log_2 x)<\log_3(2)<1$. $x>2$ – из ОДЗ, тогда $\log_3(\log_2 x)>0$. Тогда $[\log_3(\log_2 x)]=0$. Исходное уравнение примет вид: $21\log_3(\log_2[x])=0$, откуда $\log_2[x]=1$, $[x]=2$ $2\leq x<3$.

Ответ: $x\in[2;3)$.

Задача. 5.

Пусть $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$. Введём систему координат (см. рис.). Пусть $D(x;y;z)$. Пусть D_A, D_B, D_C проекции D на оси по условию $DD_A=5$; $DD_B=2\sqrt{5}$; $DD_C=\sqrt{13}$. Но $SD^2=x^2+y^2+z^2$; $SD_A=x$; $SD_B=y$; $SD_C=z$.

Имеем: $DD_A^2=SD^2-SD_A^2=y^2+z^2=25$, также:

$x^2+z^2=20$

$y^2+x^2=13$, откуда $x=2$, $y=3$, $z=4$.

$A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. Тогда уравнение плос-

Черновик.

$21\log_3(\log_3([x])) = 0$

$21\log_3(\log_2([x])) - 10\log_3([\log_2 x]) < 0$ $\quad \log_2[x] < 2$

$10 \quad x < 2$ – нельз.

$[x] = 3$

или $[x] = 2$

$\log_3((\log_2[x])^{21}) - \log_3([\log_2 x]) [\log_2 x$

$\log_2[x] > -1 + [\log_2 x]$

$\log_3\left(\frac{(\log_2[x])^{21}}{[\log_2 x]^{10}}\right) < 0$

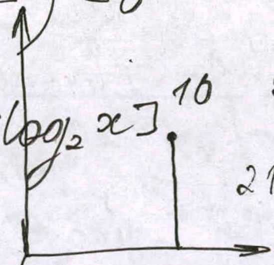
$x \geq 2.$

$[\log_2 x] < \log_2[x] + 1$

$2 \leq x \leq 4$

$t^{21} < (1+t)^{10}, t < 2$

$(\log_2[x])^{21} < [\log_2 x]^{10}$



$21\log_3(\log_2[x]) - 10\log_3([\log_2 x]) < 0$

$[\log_2 x]$

$\log_3((\log_2[x])^{21}) -$

$\log_2[x] > 1 + \log_2$

$-\log_3([\log_2 x]^{10}) < 0$

$1 + \log_2[x] > \log_2 x$

$\log_2(2[x]) > \log_2 x$ для D

$[x] = 2: \; 2[x] > x$

$2[x] > 2$

$-(x-1) =$

$= 2x - 2 > x$

$x > 2$ – вер.

$\begin{cases} y^2 + z^2 = 25 \\ y^2 + x^2 = 13 \\ x^2 + z^2 = 20 \end{cases}$

$x^2 + y^2 + 2z^2 = 45 - 13$

$\log_3\left(\frac{(\log_2[x])^{21}}{([\log_2 x])^{10}}\right) < 0$

$(\log_2[x])^{21} < [\log_2 x]^{10}$

$\log_3$

$[\log_2 x]$

$\log_2[x] \, [\log_2 x]$

$2z^2 = 32,$

$\log_3(\log_2 x)$

$z = 4,$

$x = 2.$

$y = 3$

$A(a;0;0)$

$B(b;0;0),$

$C(c;0;0)$

abc – min

$\log_2[x] = 1,$

$1 > \log_2 x - \log_2[x]$

> 0

$\frac{1}{6}abc = 3 \cdot 36.$

$Ax + By + Cz + D = 0$

$1 > [\log_2 x] - \log_2[x]$

> -1

$abc \geq 216 \cdot 3$

$Ax + D = 0$

$t^{21} < (1+t)^{10}$

$A = -\frac{D}{a}; \; B = -\frac{D}{b}; \; C = -\frac{D}{c}$

$t =$

$6\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{(abc)^2} - abc \leq 0$

$6\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{abc} \leq 0$

$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0$

$\log_{21}\lg t < 10\lg(1+t)$

$6\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{(abc)^2} - abc$

$\leq 2bc + 3ac + 4ab - abc$

$\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z - 1 = 0$

$t = 2: \; 2^{21} < 3^{10}$ – невер.

$t < 2. \quad [x] = 2$

или $[x] = 3$

$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{4}{c} - 1 = 0$

$\log_2[x] < 2$

$100, 100, 100$

$2bc + 3ac + 4ab - abc = 0$

$2bc + 3ac + 4ab \geq 3 \cdot \sqrt[3]{24a^2b^2c^2} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{3abc^2}$

$= 3 \cdot 2\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{(abc)^2}$

~~$6\sqrt{6abc} - ab$~~

$-bac$

Чистовик.

Задача. 1. верно

Ответ: $\frac{26}{19} > (\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2})$.

Решение: Заметим, что: $\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2} = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\frac{1}{2}) =$
$= \sqrt{2}(\sin\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cdot\sin(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4})$.

Кроме того, $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + 45^\circ = \frac{1}{2}(\text{радиан}) + 45^\circ = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ + 45^\circ =$
$= \left(\frac{90}{\pi}\right)^\circ + 45^\circ$. $\pi > 3$, так что: $\frac{90}{\pi} < 30$; $\frac{1}{2}$ радиан $+ \frac{\pi}{4} < 30^\circ + 45^\circ =$
$= 75^\circ$. ($180^\circ = \pi$ (радиан) — развёрнутый угол, отсюда:
$\frac{1}{2}$ радиан $= \frac{1}{2}\cdot\frac{180}{\pi}$ (градусов) $= \frac{90}{\pi}$ (градусов)).

Функция $y = \sin x$ — возрастающая на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$,
тогда, так как $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} < 75^\circ$, $\sin(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}) < \sin 75^\circ$.

Имеем: $\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2} = \sqrt{2}\cdot\sin(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}) < \sqrt{2}\sin 75^\circ$.

$\sin 75^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 150^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1 + 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}$
$= \frac{\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{|\sqrt{3} + 1|}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$.

Получим: $\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2} < \sqrt{2}\sin 75^\circ = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.

Покажем, что $\frac{\sqrt{3} + 1}{2} < \frac{26}{19}$. Для этого заметим, что:

$\sqrt{361} < \sqrt{363}$ — в силу возрастания функции $y = \sqrt{x}$;

$19 < \sqrt{121\cdot 3} = \sqrt{121}\cdot\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$;

$19\cdot\sqrt{3} < 11\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 11\cdot 3 = 33$;

$19 + 19\sqrt{3} < 33 + 19 = 52$;

$1 + \sqrt{3} < \frac{52}{19}$;

$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} < \frac{26}{9}$. Итак, $\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3} + 1}{2} < \frac{26}{9}$;

$$\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2} < \frac{26}{9}.$$

Задача. 2. верно

Пусть n — время прохождения одного круга более медленным гонщиком; m — время между обгонами.
Если v_1, v_2 — скорости более быстрого и более медленного соответственно гонщиков, S — длина круга, то:
$3\cdot v_1 = S$; $n v_2 = S$; $m v_1 - m v_2 = S$ (n, m — измеря~~ть будем~~ются в

$x_0^2+y_0^2=4x_0-3$; $x_0^2+y_0^2=-6y_0+16$; Черновик

$-3+4x_0=-6y_0+16$,

$4x_0+6y_0=19$,

$x_0=\frac{19}{4}-\frac{3}{2}y_0$. Тогда $\left(\frac{19}{4}-\frac{3}{2}y_0\right)^2+y_0^2=4\left(\frac{19}{4}-\frac{3}{2}y_0\right)-3$,

$\frac{361}{16}+\frac{9}{4}y_0^2-\frac{57}{4}y_0+y_0^2=19-6y_0-3$,

$\frac{9}{4}y_0^2+y_0^2+\frac{361}{16}-\frac{57}{4}y_0+6y_0-16=0$

$\frac{13}{4}y_0^2-\frac{33}{4}y_0+\frac{105}{16}=0$,

$2\cdot 26y_0^2-266y_0+105=0$,

$52y_0^2-132y_0+105=0$

$k=-66$;

$D_1=66^2-52\cdot 105=$

A': симметричная A относительно CD имеет координаты $(x_0;y_0)$, причём $\underline{3-x_0}=2\cdot y_0$

и $x_0^2+y_0^2=4x_0-3=-6y_0+16$, $x_0^2+y_0^2-4x_0+3=0$

$-3+4x_0=-6y_0+16$, отсюда $x_0=3-2y_0$ $9+4y_0^2-12y_0+y_0^2$

$12-8y_0-3=-6y_0+16$,

M лежит на отрезке BA' (из неравенства треугольника тогда $MB+MA=MB+MA'$ – минимально и равно BA'.

решение не завершено

Задача. 4. верно

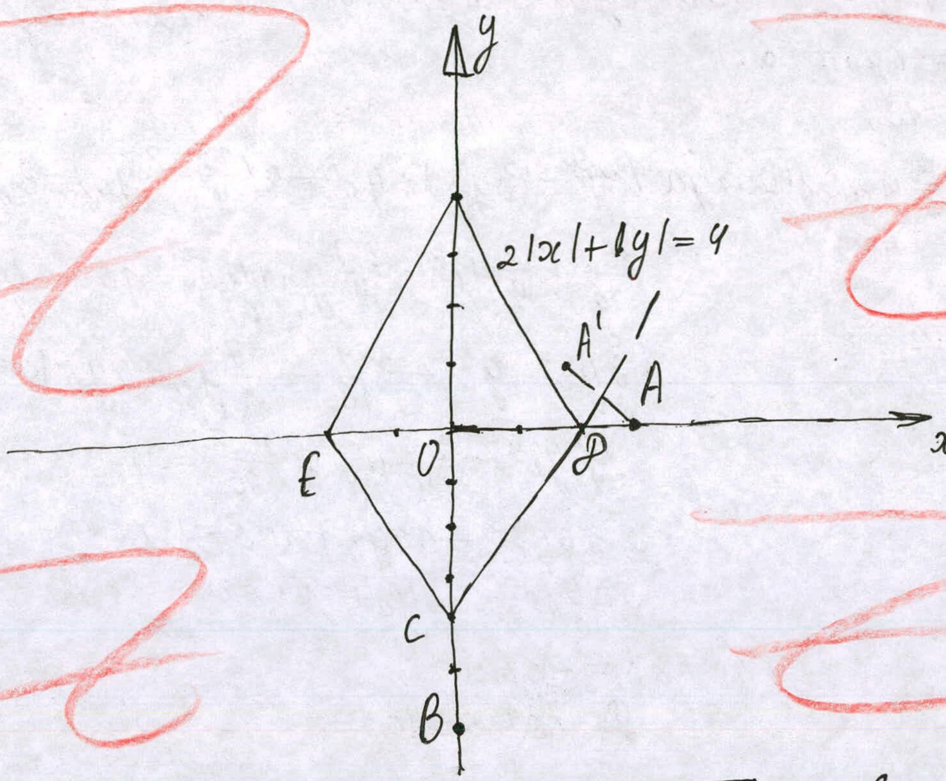
В ОДЗ: $x>0$, $[x]>0$; $[\log_2 x]>0$.

$y=\log_2 x$ – функция возрастающая, $[\log_2 x]\leq 0$ при $\log_2 x<1$, $\log_2 x<\log_2 2$, $x<2$. Тогда $x\geq 2$.

Заметим, что $[\log_3(\log_2 x)]^2\geq 0$, тогда из данного уравнения: $-10\log_3([\log_2 x])+21\log_3(\log_2[x])<0$,

$-\log_3([\log_2 x]^{10})+\log_3((\log_2[x])^{21})<0$,

$\log_3\left(\frac{(\log_2[x])^{21}}{[\log_2 x]^{10}}\right)<0=\log_3 1$. Функция $y=\log_3 x$ – воз-



Выражение $\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+6)^2}$ – равно сумме расстояний от точки $M(x;y)$ до точки $A(3;0)$ и $B(0;-6)$ (с учетом формулы для расстояния между двумя точками в координатах). Итак, $\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+6)^2}=$ $=\rho(M;A)+\rho(M;B)$. При этом точка M лежит на фигуре, заданной уравнением $2|x|+|y|=4$, так как её координаты удовлетворяют по условию равенству $2|x|+$ $+|y|=4$. Фигура, заданная условием $2|x|+|y|=4$ симметрична относительно Ox и Oy (так как при замене $(x;y)$ на $(-x;y)$ или $(x;-y)$ выражение ~~не~~ $2|x|+|y|=4$ не меняется). ~~Эта фигура является ромбом~~ Такая точка M, что $\rho(M;A)+\rho(M;B)$ – минимально лежит на отрезке CD (действительно, если M, например, лежит на отрезке CE, то точка M', симметричная M относительно оси Oy тоже лежит на фигуре, заданной условием $2|x|+|y|=4$, причём $MB=M'B$, $MA>M'A$. Тогда сумма $\rho(M;A)+\rho(M;B)$ – не минимальна. Отразим A симметрично относительно прямой CD. CD задаётся уравнением: $y=2x-4$; A' симметричная A относительно CD – такая точка с координатами $(x_0;y_0)$, что $AD=1=A'D$; $AC=\sqrt{3^2+4^2}=5=A'C$. $A'D^2=1^2=1=(x_0-2)^2+y_0^2$; $A'C^2=25=(x_0)^2+(y_0+3)^2$

Имеем: $x_0^2+y_0^2-4x_0+4=1$; $x_0^2+y_0^2+6y_0+9=25$;

минутах, v_1, v_2 – в метрах в минуту, S – в метрах).
Тогда $v_1 = \frac{S}{3}$; $v_2 = \frac{S}{n}$. Из равенства: $mv_1 - mv_2 = S$ (получающегося с учётом того, что за время m один гонщик проходит ровно на круг больше другого) имеем: $\frac{mS}{3} - \frac{mS}{n} = S$;

$\frac{m}{3} - \frac{m}{n} = 1$;

$mn - 3m = 3n$;

$mn = 3m + 3n$;

$\frac{mn}{m+n} = 3$;

$\frac{2mn}{m+n} = 6$.

По условию: $m > 7$ – тогда $\frac{2mn}{m+n} < m$; $\frac{2n}{m+n} < 1$; $2n < m+n$; $m > n$.

Если предположить, что $\frac{2mn}{m+n} \leq n$, получим: $\frac{2m}{m+n} \leq 1$; $2m \leq m+n$; $m \leq n$, что неверно ($m > n$). Тогда $n < \frac{2mn}{m+n}$, $n < 6$. Но $n > 3$ ($mn - 3m = m(n-3) > 0$, так как $mn - 3m = 3n$, $n > 0$. Тогда $n - 3 > 0$, $n > 3$). Имеем две возможности:

1) $n = 4$: тогда $4m - 3m = 12$; $m = 12$

2) $n = 5$; тогда $5m - 3m = 15$; $2m = 15$. Таких целых m нет

Условию удовлетворяет только лишь $n = 4$; $m = 12$.

Ответ: 12 минут.

Задача. 3.

Рассмотрим условие: $2|x| + |y| = 4$.

а) При $y \geq 0$ имеем: $y = 4 - 2|x|$

б) При $y < 0$ имеем: $y = 2|x| - 4$ (так как при $y < 0$: $|y| = -y$)

При этом в пункте (а) имеем $4 - 2|x| = y \geq 0$; $2|x| \leq 4$, $|x| \leq 2$, $-2 \leq x \leq 2$, а в пункте (б): $2|x| - 4 = y < 0$, $2|x| < 4$, $|x| < 2$, $-2 < x < 2$. Построим на координатной плоскости множество всех точек, удовлетворяющих условию $2|x| + |y| = 4$: (графики функций: $y = 4 - 2|x|$, $y = 2|x| - 4$ строим отдельно: при $0 \leq x \leq 2$ и при $-2 \leq x \leq 0$. При $0 \leq x \leq 2$: $|x| = x$, при $-2 \leq x < 0$: $|x| = -x$)