30-35-00-74
(205.1)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 6-2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы

по математике

Афонина Кирилла Александровича

фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата

«27» марта 2016 года

Подпись участника

30-35-00-74
(205.1)

80
(восемьдесят)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чесмов

Садовничая Садов

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

30-35-00-74
(205.1)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

Черновик

$n \in N \mid n = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10 a_1 + a_0 ; \quad a_i \in \{2; 7\} \; (i = 0, 1, \ldots n)$

N_7 – количество; $N_7 = N_2 + 29 \Rightarrow N_2 = N_7 - 29$

N_2

$n = 9k + r$

$2 \cdot N_2 + 7 \cdot N_7 = \cancel{2N_2 + 7(N_2 + 29) = 9N_2 + 7 \cdot 29 = 9}$

$2(N_7 - 29) + 7N_7 = 9N_7 - 2 \cdot 29 = 9(2k+1) - 58 = 18k - 49 = 9 \cdot 2k - 54 + 5$

$\times \frac{23}{2}$ 58 $\quad -\frac{53}{9}$ 49

$\log_2 x - \log_3 x + \log_4 x - 5 = \left(\frac{1}{2} - \log_3 2^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \log_2 5^3 - x$

$\log_2 x - \log_3 x + \log_{2^2} x - 5 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\log_3 2\right) \cdot 3\log_2 5 - x$

$\log_2 x - \log_3 x + \frac{1}{2}\log_2 x - 5 = \frac{3}{2}\log_2 5 - \log_3 2 \cdot \log_2 5 - x$

$\frac{3}{2}\log_2 x - \log_3 x - 5 = \frac{3}{2}\log_2 5 - \log_3 5 - x$

$\cancel{\frac{3}{2}(\log_2 x - \log_2 5) - (\log_3 x - \log_3 5) - 5 + x = 0}$

$\cancel{\frac{3}{2}\log_2 \frac{x}{5} - \log_3 \frac{x}{5}}$

$\frac{3}{2}\log_2 x - \frac{\log_2 x}{\log_2 3} - 5 = \frac{3}{2}\log_2 5 - \frac{\log_2 5}{\log_2 3} - x$

$\frac{3}{2}(\log_2 x - \log_2 5) - \frac{1}{\log_2 3}(\log_2 x - \log_2 5) - 5 + x = 0$

$\left(\frac{3}{2} - \log_3 2\right) \cdot \log_2 \frac{x}{5} = 5 - x$

$y < -1 \Leftrightarrow 3y - 4y^3 > 1$

$y \geq -1 \Leftrightarrow 3y - 4y^3 \leq 1$

$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2}$

$4 \vee 3\sqrt{3}$

$4(x+1)(x^2 - x + 1) - 3(x+1) \geq 0$

$(x+1)(4x^2 - 4x + 4 - 3) \geq 0$

$5 - x_2 - (5 - x_1) = x_1 - x_2 = -(x_2 - x_1)$

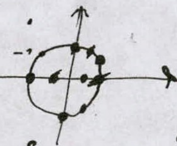
$(x+1)(4x^2 - 4x + 1) \geq 0$

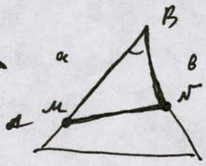
$(x+1)(2x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 \geq 0 \\ 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \geq -1$

$1{,}5 - 1$

$3x - 4x^3 - x^2$





$\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$

$\frac{CN}{NB} = \frac{4}{9}$

$MB = \frac{3}{4} a$

$BN = \frac{9}{13} b$

$\frac{S'}{S} = \frac{S_{ABC} - S}{S}$

$x < -1 \Leftrightarrow 3x - 4x^3 > 1$

$x \geq -1 \Leftrightarrow 3x - 4x^3 \leq 1$

$\frac{S_{ABC}}{S} = \quad S_A$

$= \frac{AB}{MB} \cdot \frac{BC}{BN} = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{13}\right)^{-1} = \left(\frac{27}{52}\right)^{-1} = \frac{52}{27}$

$\frac{52}{27} - 1 = \frac{25}{27}$

$\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} > 1$

$\sqrt{3} > 2$

$\frac{S_{AMNC}}{S_{MBN}} = \frac{25}{27}$

$S_{MBN} \; \% =$

$\frac{S_{AMNC}}{S_{MBN}} = \frac{100\%}{x\%}$

$\cancel{AM + 3AM}$

$\frac{MB}{3} + MB = AB$

$\frac{4}{3} MB = AB$

$(0; 1) \quad (-1; 0)$

$(0; -1) \quad (+0{,}5; 0)$

$x(3 - 4x^2)$

$x\left(\frac{3}{4} - x^2\right)$

$\cancel{x\%}\; x = \frac{27}{25} \cdot 100 = 108$

$\times \frac{27}{4}$ 108

$\frac{52}{-27}$ 25

$-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{S_{ABN}}{S_{AMNC}} \cdot 100\%$

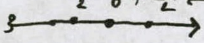
$\frac{2\pi}{3} - 2\pi$

$-x\left(x^2 - \frac{3}{4}\right)$

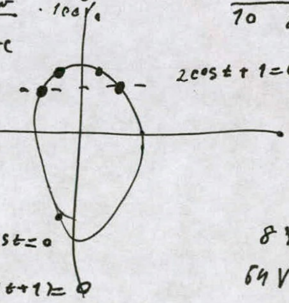
$2\cos t + 1 = 0$

$\frac{2\pi}{3} - 2\pi$

4.



$\left\{\begin{array}{l} -3 \leq 3x \leq 3 \\ -4 \leq -4x^3 \leq 4 \end{array}\right.$

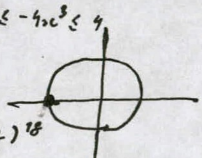


$\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi\sqrt{3}}{2} = \frac{8\pi - 3\pi\sqrt{3}}{}$

$\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 2 - \frac{1}{2} \quad \frac{\pi}{2} - 2\pi$

$A \cap R$

$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ (3x - 4x^3)^{13} = 1 - (4y^3 - 3y)^{18} \end{array}\right.$



$2\cos^2 t + \cos t = 0$

$\cos t(2\cos t + 1) = 0$

$8 \vee 3\sqrt{3}$

$64 \vee 27$

$\frac{4\pi}{3} > \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

$1 - (3x - 4x^3)^{13} \geq 0$

π

$\frac{4}{3} \vee \frac{3}{2}$

$\frac{\pi\sqrt{3}}{2} \vee \frac{\pi}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \frac{1}{3}$

$\frac{4}{3}\pi < \frac{3\pi}{2}$

$8 \vee 9$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \frac{1}{2}$

$3\sqrt{3} \vee 2$

$3x - 4x^3 \leq 1$

$\frac{\pi\sqrt{3}}{2} > \frac{\pi}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \vee$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \frac{3}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \frac{4}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

$x(3 - 4x^2) \leq 1$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \frac{2}{3}$

$2\sqrt{3} \vee 6$

$3\sqrt{3} \vee 16$

$3\sqrt{3} \vee 4$

$4x^3 - 3x + 1 \geq 0$

$\frac{\pi\sqrt{3}}{2} \vee \frac{2\pi}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{2}{3}$

$\frac{3\sqrt{3}}{2} < \frac{3}{2}$

$27 \vee 16$

$\cancel{4(x^3 - 1) - 3x -}$

$\cancel{\pi}\, 3\sqrt{3} \vee 4$

$-\frac{2\pi}{3}$

$4(x^3 + 1) - 3x - 3 \geq 0$

$27 \vee 16$

$27 > 16$

Cм

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Шифр

$(3x-4x^3)^{13}-x^2=y^2-(4y^3-3y)^{18}=y^2-(3y-4y^3)^{18}$

См.

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Чистовик

1. Пусть $n \in N$ — данное число, $N_7 \in N$ — число цифр 7, $N_2 \in N$ — число цифр 2, S — сумма всех цифр числа n

$N_7 = 2k + 1;\ k \in Z \mid k \geq 0$

$N_7 = N_2 + 29 \iff N_2 = N_7 - 29$

$S = 2 \cdot N_2 + 7 \cdot N_7 = 2(N_7 - 29) + 7N_7 = 9N_7 - 58 = 9(2k+1) - 58 = 9 \cdot 2k - 49 = 9(2k - 6) + 5$

$n \equiv S\ (9) \Rightarrow 5$ - искомый остаток

Ответ: 5   Ответ верный

2. $\log_2 x - \log_3 x + \log_4 x - 5 = \left(\frac{1}{2} - \log_3 \sqrt[3]{2}\right) \cdot \log_2 125 - x \iff \log_2 x - \log_3 x + \log_{2^2} x - 5 = \left(\frac{1}{2} - \log_3 2^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \log_2 5^3 - x$ (при $x > 0$) $\iff \log_2 x - \frac{\log_2 x}{\log_2 3} + \frac{1}{2}\log_2 x - 5 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\log_3 2\right) \cdot 3\log_2 5 - x \iff \frac{3}{2}\log_2 x - \frac{\log_2 x}{\log_2 3} - 5 = \frac{3}{2}\log_2 5 - \frac{\log_2 5}{\log_2 3} - x \iff$

$\iff \frac{3}{2}(\log_2 x - \log_2 5) - \frac{1}{\log_2 3}(\log_2 x - \log_2 5) = 5 - x \iff \left(\frac{3}{2} - \log_3 2\right) \cdot \log_2 \frac{x}{5} = 5 - x$

$f(x) = \left(\frac{3}{2} - \log_3 2\right) \cdot \log_2 \frac{x}{5}$; $g(x) = 5 - x$

$2 < 3 \Rightarrow \log_3 2 < \log_3 3 = 1 \iff \frac{3}{2} - \log_3 2 > 0{,}5 > 0$

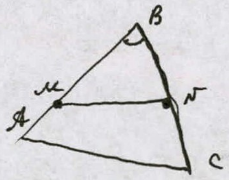
$2 > 1 \Rightarrow h(x) = \log_2 \frac{x}{5} \uparrow$ (возрастает) при $x > 0$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} - \log_3 2 > 0 \\ h(x) \uparrow \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{2} - \log_3 2\right) \cdot h(x) = f(x) \uparrow$$

$$\begin{cases} f(x) \uparrow \\ g(x) \downarrow \\ f(5) = g(5) \quad \left(f(5) = \left(\frac{3}{2} - \log_3 2\right) \cdot \log_2 1 = 0 = 5 - 5 = g(5)\right) \end{cases} \Rightarrow x = 5 \text{ - един. корень уравнения } f(x) = g(x)$$

Ответ: 5   Ответ верный

3. $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{MB}{AB} = \frac{3}{4}$



$\frac{CN}{NB} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{NB}{BC} = \frac{9}{13}$

$\frac{S_{AMNC}}{S_{MBN}} = \frac{S_{ABC} - S_{MBN}}{S_{MBN}} = \frac{S_{ABC}}{S_{MBN}} - 1 = \frac{AB \cdot BC}{MB \cdot BN} - 1 = \frac{AB}{MB} \cdot \frac{BC}{BN} - 1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{13}{9} - 1 =$

$= \frac{52}{27} - 1 = \frac{25}{27}$

Искомый процент $= \frac{S_{MBN}}{S_{AMNC}} \cdot 100\% = \frac{27}{25} \cdot 100\% = 27 \cdot 4\% = 108\%$ Ответ верный

Ответ: 108

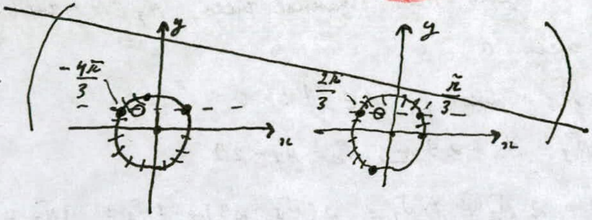
4. $\left(2\sin(\sqrt{3}\arcsin x) - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}\sin 3x + \sqrt{2 + \cos 3x}\right) = 0$

$D(y): \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 2 + \cos 3x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases}$

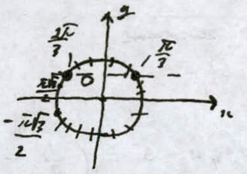
$\left(2\sin(\sqrt{3}\arcsin x) - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}\sin 3x + \sqrt{2 + \cos 3x}\right) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \sin(\sqrt{3}\arcsin x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{2 + \cos 3x} = -\sqrt{2}\sin 3x \end{array}\right.$

1) $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi\sqrt{3}}{2} \le \sqrt{3}\arcsin x \le \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

$\sin(\sqrt{3}\arcsin x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{3}\arcsin x = \frac{\pi}{3}\\ \sqrt{3}\arcsin x = \frac{2\pi}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow$



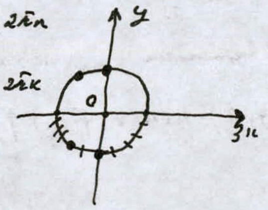
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\arcsin x = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\\ \arcsin x = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \sin\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\\ x = \sin\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\end{array}\right.$



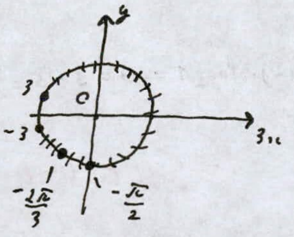
2) $\sqrt{2+\cos 3x} = -\sqrt{2}\sin 3x \Leftrightarrow \begin{cases}2+\cos 3x = 2\sin^2 3x\\ -\sqrt{2}\sin 3x \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2+\cos 3x = 2(1-\cos^2 3x)\\ \sin 3x \le 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos^2 3x + \cos 3x = 0\\ \sin 3x \le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos 3x = 0\\ \cos 3x = -0,5\end{array}\right.\\ \sin 3x \le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}3x = \frac{\pi}{2}+\pi n\\ 3x = \pm\arccos(-0,5)+2\pi k\end{array}\right. (n,k\in Z)\\ -\pi+2\pi m \le 3x \le 2\pi m \quad (m\in Z)\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}3x = \frac{\pi}{2}+\pi n\\ 3x = \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\end{array}\right.\\ -\pi+2\pi m \le 3x \le 2\pi m\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x = \frac{3\pi}{2}+2\pi n\\ 3x = -\frac{2\pi}{3}+2\pi k\end{array}\right.$



$\begin{cases}-3 \le 3x \le 3\\ \left[\begin{array}{l}3x = \frac{3\pi}{2}+2\pi n\\ 3x = -\frac{2\pi}{3}+2\pi k\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x = -\frac{2\pi}{3}\\ 3x = -\frac{\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{2\pi}{9}\\ x = -\frac{\pi}{6}\end{array}\right.$

Ответ: $-\frac{2\pi}{9}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\sin\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; $\sin\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

5.

Ответ верный

Задача №5 не решена