40-95-94-36
(182.3)

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 173

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьевы Горы"

по математике

Лещука Дмитрия Александровича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«22» марта 2016 года

Подпись участника

 80 (восемьдесят)

40-95-94-36 (182.3)

Черновик.

№2.

Пусть длина одного круга l метров, более медленный спортсмен пробегает круг за ~~$x \in \mathbb{Z}$~~ x минут, $x \in N$. (очевидно, $x > 7$).

Тогда время между встречами

$$t = \frac{l}{\frac{l}{7} - \frac{l}{x}} = \frac{1}{\frac{x-7}{7x}} = \frac{7x}{x-7}.$$

Но по условию $t \in N$ и $t \geq 16$. Решим нер-во.

$$\frac{7x}{x-7} \geq 16 \Leftrightarrow \frac{7x - 16x + 112}{x-7} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x - \frac{112}{9}}{x-7} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 < x \leq \frac{112}{9} = 12\frac{4}{9}, \quad x \in N \text{ усл.}$$

Проверим, при каких натуральных x $t \in N$.

$x = 8$, $t = \frac{56}{1} \in N$; $x = 9$, $t = \frac{63}{2} \notin N$; $x = 10$, $t = \frac{70}{3} \notin N$; $x = 11$, $t = \frac{77}{4} \notin N$; $x = 12$, $t = \frac{84}{5} \notin N$.

Тогда $x = 8$ и $t = 56$ – единственный возможный вариант.

Ответ: 56 минут – время между встречами. верно

№4.

$$[\log_2(\log_3 x)]^2 - 8\log_2([\log_3 x]) + 15\log_2(\log_3([x])) = 0.$$

$$[\log_2(\log_3 x)]^2 = 8\log_2([\log_3 x]) - 15\log_2(\log_3([x]))$$

По сво-ву логарифма $8\log_2([\log_3 x]) = \log_2([\log_3 x]^8)$.

$15\log_2(\log_3([x])) = \log_2(\log_3^{15}([x]))$.

$$[\log_2(\log_3 x)]^2 = \log_2([\log_3 x]^8) - \log_2(\log_3^{15}([x])) =$$

по сво-ву разности логарифм с один. основан.

$$= \log_2\left(\frac{[\log_3 x]^8}{\log_3^{15}([x])}\right), \quad [\log_3 x] > 0, \quad \log_3([x]) > 0.$$

Чистовик.

№5.

Запишем ур-я прямых SA:

$$\frac{x-0}{a-0} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{0}$$

$$\cancel{\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}}$$

1 $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$; 2 $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$; 3 $\begin{cases} \cancel{z}=0 \\ y=0. \end{cases}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик.

Тогда имеем $\begin{cases} \log_3 x \geq 1, \\ [x] > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x \geq 3.}$

По определ. $[\log_2(\log_3 x)]^2 \geq 0$, $[\log_2(\log_3 x)]^2 \in \mathbb{Z}$.

Тогда $\log_2\left(\frac{[\log_3 x]^8}{\log_3^{15}([x])}\right) \in \mathbb{Z}$ и ≥ 0. Но тогда выражение под знаком логарифма имеет вид 2^k, $k \geq 0$. Т.е. это либо 1, либо кратное 2 число, а значит целое число. Переберем все возможные целые знач. числителя.

① $([\log_3 x])^8 = 0$ не подх.

② $([\log_3 x])^8 = \underset{=1}{1^8} \Leftrightarrow [\log_3 x] = 1$, $3 \leq x < 9$.

Тогда имеем: ~~$\log_2 \left(\frac{1}{\log}\right.$~~ $\frac{1}{\log_3^{15}([x])} \in \mathbb{Z}$ по доказ.

Но при $x \geq 4$ $\log_3^{15}([x]) > 1$, т.е. условие не выполняется. Значит, $3 \leq x < 4$.

Вернемся к исходному ур-ю.

$[\log_2(\log_3 x)]^2 = \log_2\left(\frac{1}{1}\right) = 0.$

$0 \leq \log_2(\log_3 x) < 1.$

1) $\log_2(\log_3 x) \geq 0$
$\log_3 x \geq 1$
$x \geq 3.$

2) $\log_2(\log_3 x) < 1$
$\log_3 x < 2$
$x < 9.$

Имеем: $\begin{cases} 3 \leq x < 4, \\ 3 \leq x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x < 4.$

верно

③ $([\log_3 x])^8 = ~~2~~ \; 2^8 = 256$, $9 \leq x < 27.$

Тогда $\log_3^{15}([x]) \geq \log_3^{15}(9) = 2^{15}.$

Т.е дробь правильная: $2^8 < 2^{15}$, т.е. $\frac{[\log_3 x]^8}{\log_3^{15}([x])} < 1.$

Но по доказанному ранее эта дробь целое неотриц.

Чистовик:
№4(продолж)

чило, причем значение 0 она принимать не может, исходя из ОДЗ.

Значит, такие знач x $(9 \le x < 27)$ не подходят.

Далее при $x > 27$ числитель дроби будет возрастать медленнее знаменателя (восьмая степень против 15), поэтому дробь всегда будет правильной и корней ур-я там нет.

Рассмотрены все возможные случаи.

Ответ: $[3; 4)$.

верно

№1.

$\sin 1 + \cos 1 \vee \frac{42}{31}$.

$3 < \pi < 3{,}15$

$1 < \frac{\pi}{3} < 1{,}05$ Тогда $\frac{\pi}{3} \approx 1$ с погрешностью до $\frac{1}{20}$.

$\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\frac{\sqrt{3}+1}{2} \vee \frac{42}{31}$

$31\sqrt{3} + 31 \vee 84$

$31\sqrt{3} \vee 53$

$31^2 \times 3 \vee 53^2$

$2883 \vee 2809$

$2883 > 2809 \Rightarrow \boxed{\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} > \frac{42}{31}}$

$$\begin{array}{r} \times 53 \\ 53 \\ \hline 159 \\ 265 \\ \hline 2809 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 31 \\ 31 \\ \hline 31 \\ 93 \\ \hline 961 \\ \times 3 \\ \hline 2883 \end{array}$$

~~На~~ В окрестности точки 1 $\sin x$ ~~убывает~~ возрастает очень медленно, ~~а~~ а $\cos\frac{\pi}{3}$ убывает очень быстро, поэтому скорее поэтому погрешность в $\frac{1}{20}$ между $\frac{\pi}{3}$ и 1 ~~несильно~~ не повлияет на ~~значение в~~ знак неравенства.

Ответ: $\sin 1 + \cos 1 > \frac{42}{31}$.

В окрестности точки 1 $(r = \frac{1}{20})$ $\sin x$ возрастает медленнее, чем убывает $\cos x$ $(|\sin' x| = |\cos x| < |\cos' x| = |\sin x|)$,

Чистовик.

№3 (продолж.)

Найдем допустимые знач НВ.

$\sqrt{9-\frac{9}{10}} = \sqrt{8,1} = \sqrt{\frac{81}{10}} = \frac{9}{\sqrt{10}}$ (из △ CC_1O_1, где $C_1O_1 \perp BC$)

$\sqrt{1-\frac{9}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ (из △ BB_1O_2, $B_1O_2 \perp BC$)

$HB \in \left[\frac{9}{\sqrt{10}}; 3\sqrt{10} - \frac{1}{\sqrt{10}}\right]$ (т.к. $A \in B_1C_1$)

$234 : 9 = 26$

$\frac{9}{\sqrt{10}} < 1,5\sqrt{10} < 3 - \frac{1}{\sqrt{10}}$ – подходит.

$\min(AC+AB) = \sqrt{\cancel{0,9}\,0,9+(1,5\sqrt{10})^2} + \sqrt{0,9+(1,5\sqrt{10})^2} =$

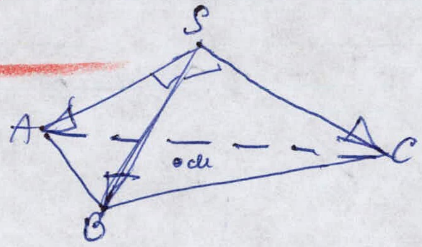
$= 2\sqrt{0,9+2,25\times 10} = 2\sqrt{0,9+22,5} = 2\sqrt{23,4} =$

$= 2\sqrt{26\times\frac{9}{10}} = 6\sqrt{2,6}$

Ответ: $6\sqrt{2,6}$.

верно

№5.



Введем пр. систему координат $SA \uparrow\uparrow \vec{i}$; $SB \uparrow\uparrow \vec{j}$; $SC \uparrow\uparrow \vec{k}$

$SA = a$; $SB = b$; $SC = c$.

$A(a;0;0)$ $B(0;b;0)$ $C(0;0;c)$

$ABC: \begin{cases} aA+D=0 \\ bB+D=0 \\ cC+D=0 \end{cases}$ $A = -\frac{D}{a}$, $B = -\frac{D}{b}$, $C = -\frac{D}{c}$

$ABC: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$ – ур-е плоск (ABC)

Точка $M \in ABC$ – искомая.

Тогда $M(x_0; y_0; z_0)$

$\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1 - \frac{z_0}{c}$

$\frac{z_0}{c} \Rightarrow z_0 = c\left(1 - \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)$

$M\left(x_0; y_0; c\left(1 - \frac{y_0}{b} - \frac{x_0}{a}\right)\right)$.

Чистовик.

№3 (продолж)

BC перпендикуляр — одинаковые, т.е. $AC+AB$ меньше в случае, если $A \in B_1C_1$.

Пусть $AH \perp BC$. Найдем AH из прям Δ-ка, содерж CB и точку C_1B_1.

Рассмотрим ΔCC_1B. $CC_1 = 3$; $C_1B = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}$,

$CB = \sqrt{81+9} = \sqrt{9 \times 10} = 3\sqrt{10}$.

~~По~~ ~~p~~ $= p = 1{,}5(1+\sqrt{5}+\sqrt{10})$

По формуле Герона $S_{CC_1B} = \sqrt{1{,}5^4(1+\sqrt{5}+\sqrt{10}) \times (\sqrt{5}+\sqrt{10}-1) \times (1+\sqrt{10}-\sqrt{5}) \times (1+\sqrt{5}-\sqrt{10})}$

1) $(1+\sqrt{5}+\sqrt{10})(\sqrt{10}+\sqrt{5}-1) = 10+5+2\sqrt{5^2 \cdot 2} - 1 = 14+10\sqrt{2}$

2) $(1+(\sqrt{10}-\sqrt{5}))(1-(\sqrt{10}-\sqrt{5})) = 1-(15-10\sqrt{2}) = 10\sqrt{2}-14$

$S_{CC_1B} = 2{,}25\sqrt{200-196} = 2{,}25 \times 2 = 4{,}5.$

$AH = \frac{2S_{CC_1B}}{BC} = \frac{9}{3\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

По т. Пифаг ~~AC^2+~~ $AC = \sqrt{AH^2+CH^2}$, $AB = \sqrt{AH^2+HB^2}$

$CH = (3\sqrt{10} - HB)$

$AC+AB = \sqrt{0{,}9+(3\sqrt{10}-HB)^2} + \sqrt{0{,}9+HB^2} =$

$= \sqrt{HB^2 - 6\sqrt{10}HB + 90{,}9} + \sqrt{0{,}9+HB^2}$

$y_1 = HB^2 - 6\sqrt{10}HB + 90{,}9$ и $y_2 = 0{,}9+HB^2$ — параболы с одинаковым старшим коэффициентом $\Rightarrow$ получены друг из друга параллельным переносом.

y_1 возрастает на $[3\sqrt{10}; +\infty)$, убыв на $(-\infty; 3\sqrt{10}]$;

y_2 возрастает на $[0; +\infty)$. Тогда пока точка x_0 удалена от $3\sqrt{10}$ больше, чем от 0, то ф-я (y_1+y_2) убывает. ~~Если удалена~~ Если удалена меньше, то возрастает. Значит, $HB = \frac{3\sqrt{10}+0}{2} = 1{,}5\sqrt{10}$ — точка минимума. (равноуд. от $3\sqrt{10}$ и 0).

Чистовик.

Поэтому $\sin\frac{\alpha}{3} - \sin 1 < \cos 1 - \cos\frac{\alpha}{3}$, т.е.

$\sin\frac{\alpha}{3} + \cos\frac{\alpha}{3} < \cos 1 + \sin 1$.

Тогда по св-ву транзитивности $\cos 1 + \sin 1 > \frac{42}{31}$.

Ответ: $\cos 1 + \sin 1 > \frac{42}{31}$.

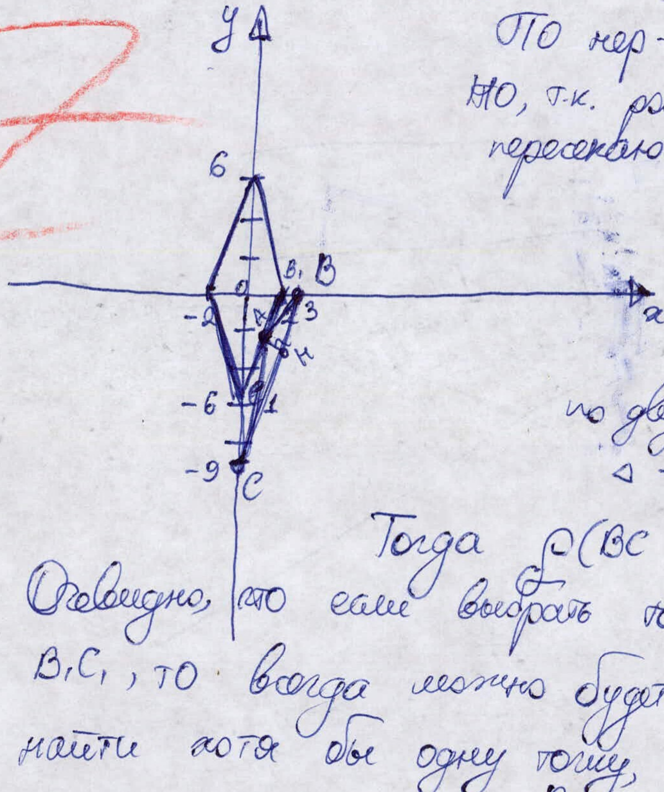
№3.

Найти $\min\left(\sqrt{(x-3)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+9)^2}\right)$ при $3|x| + |y| = 6$.

$\sqrt{(x-3)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+9)^2}$ — сумма длин отрезков AB и AC, где $B(3;0)$, $C(0;-9)$, $A(x;y)$.

Тогда задача сводится к нахождению точки A такой, что $AB + AC$ — наименьшее.

$6 = 3|x| + |y|$ — ромб с вершинами в точках $(2;0)$, $(0;6)$, $(-2;0)$, $(0;-6)$.



По нер-ву треуг. $AB + AC \geq BC$, но, т.к. ромб и отрезок BC не пересекаются, то $A \notin BC$, поэтому $AB + AC > BC$.

$\frac{-6}{-9} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

по двум ст. и углу $\triangle OB_1C_1 \sim \triangle \cancel{OBC}$ OBC, т.е. $C_1B_1 \parallel BC$.

Тогда $\rho(BC \text{ и } B_1C_1) = \text{const}$

Очевидно, что если выбрать точку ромба ~~В~~ не на B_1C_1, то всегда можно будет (проведя перп к BC) найти хотя бы одну точку B_1C_1, расстояние от которой до BC меньше, а отрезки, на которые разбивает

40-95-94-36
(182.3)

Черновик.

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

Дано: SABC – треуг. пр

$SA \perp SB \perp SC$

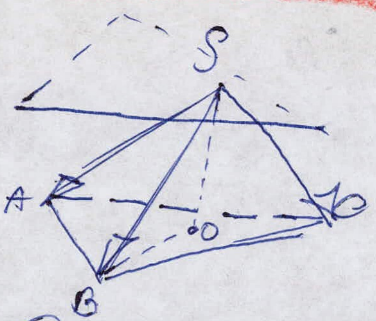
$D \in (ABC)$

$\rho(D; SA) = \sqrt{13}$

$\rho(D; SB) = \sqrt{10}$

$\rho(D; SC) = \sqrt{5}$

Найти V наим.



Очевидно, что т.к. $D \in$ треуг ABC, имеем:

Введем прямоуг. систему координат.

$\overline{SA} \uparrow\uparrow \overline{i}$; $\overline{SB} \uparrow\uparrow \overline{j}$; $\overline{SC} \uparrow\uparrow \overline{k}$

$D(\sqrt{13};$

СМ

$\log_2([\log_3 x]) \in Z$

$\log_3 n \in Z$ $\log$

$\log_3 [x] \in Z$

$[x] = 1$

$[\log_3 x] \in Z =>$

$(\log_3 [x])^{15} \in Z$

Вроде решил.

$[\log_2(\log_3 x)]^2 - 8\log_2([\log_3 x]) +$

$+ 15\log_2(\log_3 [x]) = 0$

$~~[x] = x - \{~~$ $x = [x] + \{x\}$

$[\log_2(\log_3([x]+\{x\})]^2 =$

$[\log_2(\log_3 x)]^2 = 8\log_2([\log_3 x]) - 15\log_2(\log_3[x]) \in Z$

$[\log_2(\log_3 x)]^2 = \log_2\left(\frac{[\log_3 x]^8}{\log_3 [x]^{15}}\right) \geq 0. = 0.$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик.

$\cancel{(\sin 1+\cos 1)^2 = \sin 1^2 + 2\sin 1\cos 1 + \cos 1^2 = 1 + 2\sin 1\cos 1}$

$\sin 1 + \cos 1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right) + \cos 1 = 2\cos\frac{\frac{\pi}{2}-1+1}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-1-1}{2}$

$= 2\cos\frac{\pi}{4}\times\cos\left(\frac{\pi}{4}-1\right) = 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(1-\frac{\pi}{4}\right) =$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}(\cancel{\cos 1 \sin 1}$

$\sin 1 + \cos 1 \geq \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{3} - \sin 1 = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-1\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}+1\right) =$

$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \vee \frac{42}{31}$

$\cancel{\cos 1 - \cos}$

$\cos\frac{\pi}{3} - \cos 1 = \times 53$

$= -2\sin\left(\frac{\pi}{3}+1\right)\sin\frac{53}{159}-1$

$\sin 1 + \cos 1 = 31 + 31\sqrt{3} \vee 84$

265

2809

$= \sqrt{2}\cos\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = 31\sqrt{3} \vee 53$

961×6 несоп.

$= \sqrt{2}\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$ $31^2\times 3 \vee 53^2$

$\times 961$
3
2883

$+31$
31
31
93
961

$+3$
1

$2883 > \cancel{53}\ 2809$

$\sin\frac{2\pi}{3} < \sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right) < \cancel{\sin\frac{\pi}{2}}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right) < 1$ $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{42}{31}$

$+84$
84
336
672
7056

$\boxed{\frac{\sqrt{6}}{2} \vee \frac{42}{31}}$

$\sin 1 + \cos 1 > \cancel{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}\ \frac{42}{31}$

$\sqrt{2}\cdot\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{6}}{2}$ $\cos 1 > \cos\frac{\pi}{3}$

$\sin 1 > \sin\frac{\pi}{4}$

$31\sqrt{6} \vee 84$

$31^2\times 6 \vee 84^2$

$1 + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} =$

$= \boxed{1-\frac{\pi}{4}}$

$\frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{\frac{8-7}{56}} = 56$ 31^2

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{2} \vee \frac{42}{31}$

$31^2\times 2 \vee 42^2$

1) $\theta = 7$ $\frac{70}{\theta-7} \geq 16$ не подх

2) $\theta = 8$ $\frac{56}{1} = \boxed{56}$

3) $\theta = 9$ $\frac{7\times 9}{2}$ — не подх

4) $\theta = 10$ $\frac{70}{3}$ — не подх

5) $\theta = 11$ $\frac{77}{4}$ — не подх

Ответ: 56 минут.

$\times 42$
42

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$\sqrt{(x-3)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+9)^2} = A$ Черновик.

$3|x| + |y| = 6$ $(x_0-3; y_0)$ $(x_0; y_0+9$

$|y| = 6 - 3|x|$ $AB + AC$

$A(x_0; y_0)$ $B(3;0)$

$|y| \geq 0$ $6 - 3|x| \geq 0$ $-2 \leq x \leq 2$ $C(0;-9)$

$-6 \leq y \leq 6$

$A \in BC$

① $y = 6 - 3|x|$ $(6 \leq y \leq 6)$ $y = \frac{x-3}{0-3} = \frac{y-0}{-9-0}$

$-9x + 27 = -3y$

$A = \sqrt{(x-3)^2+(6-3|x|)^2} + \sqrt{x^2+(15-3|x|)^2} =$ $\boxed{y = 3x-9}$

$= \sqrt{x^2-6x+9+36-36|x|+9x^2} + \sqrt{x^2+225-90|x|+9x^2} =$

$= \sqrt{10x^2-6x-36|x|+45} + \sqrt{10x^2-90|x|+225}$

1) $-2 \leq x < 0$

С/Л

$A = \sqrt{10x^2+30x+45} + \sqrt{10x^2+90x+225} =$

$= \sqrt{5}\left(\sqrt{2x^2+6x+9} + \sqrt{2x^2+18x+45}\right)$

$A' = \sqrt{5}\left(\frac{4x+6}{2\sqrt{2x^2+6x+9}} + \frac{4x+18}{2\sqrt{2x^2+18x+45}}\right) =$

$= \sqrt{5}\left(\sqrt{2x^2+6x+9} + \sqrt{2x^2+18x+45}\right)$ – подкоренные выр – параболы. Ветви напр вверх.

$x_{B_1} = \frac{-6}{4} = -1{,}5$ $x_{B_2} = \frac{-18}{4} = -4{,}5$

Тогда парабола 1 убыв на $(-\infty; -1{,}5]$, возр на $[-1{,}5; +\infty)$, парабола два возр на $[-4{,}5; +\infty)$ Сравним значения при $x = -2$ и $x = -1{,}5$ $x = (-1{,}5; 0)$ не подх

$A(-2) = \sqrt{5}\left(\sqrt{8-12+9} + \sqrt{8-36+45}\right) =$

$= \sqrt{5}(\sqrt{5} + \sqrt{17})$

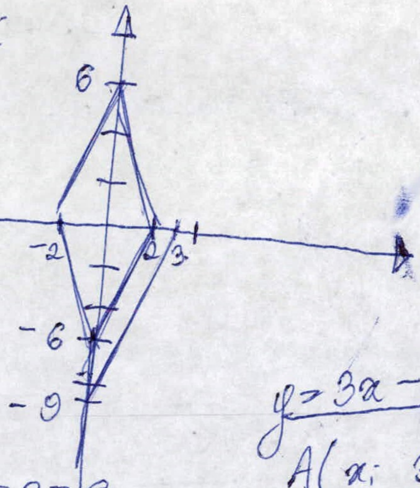
Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Шифр

$A(-1,5) =$

Черновик.

~~$y = 3x - 9$~~



$|y| = 6 - 3|x|$

$\left[\begin{array}{l} y = 6 - 3|x| \\ y = 3|x| - 6 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} y = 6 - 3x \\ y = 6 + 3x \\ y = 3x - 6 \\ y = -3x - 6 \end{array}\right.$

СН

$3x - 9 = 6 - 3x$

$6x = 15$

$x = 2,5 > 2$ не подх

$3x - 9 = 6 + 3x$

$0 = 15$

$3x - 9 = 3x - 6$ нет

$3x - 9 = -3x - 6$

$6x = 3$

$x = \frac{1}{2}$

$y = 3x - 6$

$A(x;\ 3x - 6)$

$\sqrt{x^2 + (3x + 3)^2} + \sqrt{(x + 3)^2 + (3x - 6)^2} =$

$= \sqrt{10x^2 + 18x + 9} + \sqrt{x^2 - 9x + 9 + 9x^2 - 36x + 36} =$

$= \sqrt{10x^2 + 18x + 9} + \sqrt{10x^2 - 45x + 45} =$

$= \sqrt{5}\left(\sqrt{8 + 36 + 9} + \sqrt{8 - 18 + 45}\right.$

$y = 1,5 - 9 = -7,5$ – не подх

$x_1 = -\frac{18}{20} = -0,9$

$x_2 = 2,25$

$\frac{2,25 + 0,9}{2} = \frac{3,15}{2} = \frac{3\frac{3}{20}}{2} = \frac{63}{40} = 1\frac{23}{40}$

Пусть длина круга l метров,

x v ~~метров~~ ~~секунд~~ – ~~скорость второго~~ время, за кот второй проб круг

OK решим

$\frac{l}{\left(\frac{l}{7} - \frac{l}{v}\right)} = t \geq 16$

$\frac{1}{\frac{1}{7} - \frac{1}{v}} = t$

$\frac{1}{\frac{v - 7}{7v}} = t$

$\frac{7v}{v - 7} \geq 16$

$t = \frac{7v}{v - 7}$

$\frac{7v - 16v + 112}{v - 7} \geq 0$

$\frac{v - \frac{112}{9}}{v - 7} \leq 0$

$7 \leq v \leq \frac{112}{9} = 11\frac{4}{9}$

$v \in [7; 8; 9; 10; 11]$