16-85-43-64
(176.2)

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4-2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы"

по математике

Мажника Павла Анатольевича

фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата

«20» март 2016 года

Подпись участника

80 (восемьдесят)
(Реутиян)
(Бернхин)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

16-85-43-64
(176.2)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

Задача 1

1) $n \leq 79$, где n – число участников;

$\frac{1}{11}n$ – золото; $\frac{1}{4}n$ – серебро; $\frac{1}{4}n$ – бронза.

2) Пусть x спортсменов остались без медалей.
=> нужно x тортов.

$$\Rightarrow x = n - \left(\frac{1}{11}n + \frac{1}{4}n + \frac{1}{4}n\right) =$$

$$= n\left(1 - \left(\frac{4}{44} + \frac{11}{44} + \frac{11}{44}\right)\right) =$$

$$= n\left(\frac{44-26}{44}\right) = \frac{9}{22}n; \quad (x \in Z)$$

3) $n \vdots 11$, $n \vdots 4$ $\Rightarrow n \vdots 44$ $\Rightarrow 44 \leq n \leq 79$

$\Rightarrow n = 44k$, $k \in Z$.

~~при k~~ $\Rightarrow$ при $k=2$ $n = 88 > 79$;

$\Rightarrow$ ~~$x = 18k$; $n - x = 26k$~~ $\Rightarrow k = 1$;

$\Rightarrow n = 44$; $\Rightarrow x = 18$.

Ответ: 18.

решение верно

$x \in [-5; 65]$ №4

1) $\sin\beta = \frac{x}{10}$; $\sin\beta \in [-1; 1] \Rightarrow \frac{x}{10}$

$-1 \le \frac{x}{10} \le 1 \Rightarrow -10 \le x \le 10$;

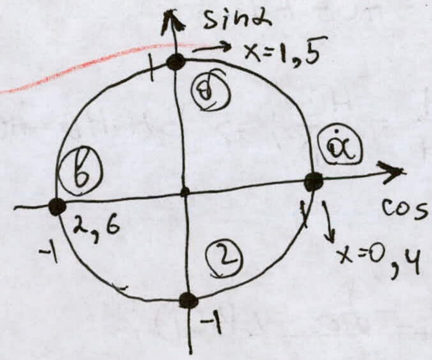
$\Rightarrow x \in [-5; 10]$;

2) $\Rightarrow \sin\left(\arcsin\frac{x}{10}\right) = \frac{x}{10}$;

$\Rightarrow$ Пусть $\frac{\pi x}{2} = \alpha$; $(x \in Z)$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1} \geqslant 0;$$

д-во не решено



$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$:

а) $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}x = \pi k$, $k \in z$

$\Rightarrow x = 2k \Rightarrow x$ - чётный;

Т.к. $\alpha = \frac{\pi}{2}x, x \in z$, то значения sin и cos определяются 4-мя точками на окружности sin, cos (см. рис.)

$$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1} = \frac{0 + 1 - 1}{0 - 1 + 1}$$

$\sin\alpha - \cos\alpha \ne -1$;

$\Rightarrow$ точки а и 2 не подходят;

Неверное рассуждение!

$\Rightarrow$ б: $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1} = \frac{1 + 0 - 1}{1 - 0 + 1} = 0$;

$\Rightarrow$ при $x = 1 + 4k$, $k \in z$

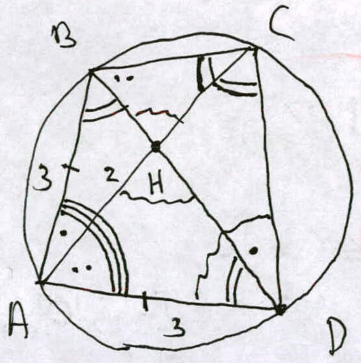
в: $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1} = \frac{0 - 1 - 1}{0 + 1 + 1} = -1 < 0$. $\Rightarrow$ не подходит;

$\Rightarrow -5 \le 1 + 4k \le 10$.

$\Rightarrow -5 < -3 < 1 < 5 < 9 < 10$;

$\Rightarrow \Sigma x = -3 + 1 + 5 + 9 = 12$. ?

Ответ: 12; правильно

7) 

$\angle BCA = \angle BDA$ (т.к. четырехугольник вписаный; аналогично отметим другие такие углы) ...

$\Rightarrow \angle ABD = \angle BDA$ $(AB = AD)$

$\Rightarrow \triangle ACD$ подобен $\triangle AHD$:

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AD}{AH}$; $\Rightarrow AH = \dfrac{AD^2}{AC} = 2$;

$\Rightarrow HC = AC - AH = \dfrac{5}{2}$;

8) $\triangle BHC \sim \triangle AHD$; $\Rightarrow \dfrac{BH}{AH} = \dfrac{HC}{HD}$; $\Rightarrow BH \cdot HD = HC \cdot AH = 5$;

9) $\cancel{\triangle ABD \sim \triangle ABH}$

$\cancel{\dfrac{BH}{HD} = \dfrac{BC}{CD}}$ ~~– т.к. CA – бис.~~ $\angle BCD$;

~~10)~~ $\cancel{\triangle ABC \sim \triangle DHC \Rightarrow \dfrac{AC}{CD} = \dfrac{BC}{HC} \Rightarrow}$

$\Rightarrow BD = BH + HD = \dfrac{5}{HD} + HD$;

т.к. $BD = \min \Rightarrow (BD)' = 0$

$\Rightarrow 0 = -\dfrac{5}{HD^2} + 1$;

$\Rightarrow HD = \sqrt{5}$; $\Rightarrow \angle AHD = 90°$.

$\Rightarrow BH = HD = \sqrt{5}$;

$\Rightarrow BD_{min} = 2\sqrt{5}$;

Ответ: $2\sqrt{5}$;

Решение верно

Решение верно

Задача 2.

$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = ?$; $x^3 - 2016x + 2017 = 0$

$(x_1 \neq x_2)$

1) $\begin{cases} x_1^3 - 2016x_1 + 2017 = 0 \\ x_2^3 - 2016x_2 + 2017 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1^3 - x_2^3 + 2016(x_2 - x_1) = 0$

$\Rightarrow (x_1^3 - x_2^3) = 2016(x_1 - x_2)$;

$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 2016(x_1 - x_2)$;

$\Rightarrow x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 2016$;

Получили, что данное выражение всегда $= 2016$.

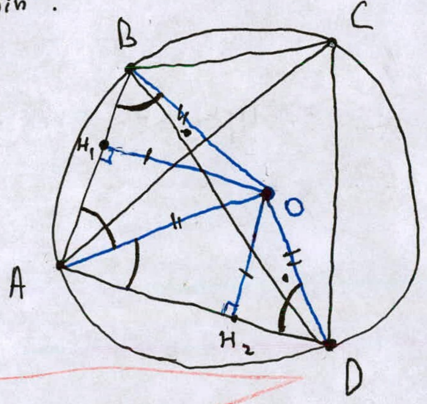
Ответ: 2016

Задача 3.

$AC = \frac{9}{2}$;

$AD = 3$;

$BD_{min} = ?$



1) $OH_1 = OH_2$ по условию (расст. до пр AB и AD)

2) $\Rightarrow \triangle AH_1O = \triangle AH_2O$ $(\angle AH_2O = \angle AH_1O = 90^\circ$; AO – общ; $OH_1 = OH_2)$

3) $\Rightarrow \angle H_1AO = \angle H_2AO$

4) $\triangle OAB$ и $\triangle OAD$ – равнобедренные $(OB = OA = OD = R)$

$\Rightarrow \angle OBA = \angle OAB$; $\angle OAD = \angle ODA$. (углы при основании)

5) $\Rightarrow \angle OBA = \angle ODA$.

6) $\triangle OBD$ – равнобедренный $(OB = OD)$

$\Rightarrow \angle OBD = \angle ODB$;

$\Rightarrow \angle DBA = \angle OBA - \angle OBD = \angle ODA - \angle ODB = \angle BDA$;

$\Rightarrow \triangle ABD$ – равнобедренный (углы при основании равны) $\Rightarrow AB = AD = 3$;

16-85-43-64
(176.2)

Олимпиада ПВГ
2016

№5

$$\begin{cases} x^2+2y^2+2y(x+a)+a^2=0 \\ 3^{-3-x}\cdot\log_3 y<1 \end{cases}$$

1) $y>0$

2) $3^{-3-x}\cdot\log_3 y=\frac{1}{3^{3+x}}\cdot\log_3 y$;

16-85-43-64
(176.2)

Олимпиада ПВГ 2016

Черновик

$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = x_1^3 - x_2^3$

$\cancel{x_1^3 - x_2^3 = (}\ x_1^3 - x_2^3 + \cancel{x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - x_1x_2^2}$

$\cos 2\alpha \in [0;1]$ $\begin{cases} x_1^3 - 2016x_1 + 2017 = 0 \\ x_2^3 - 2016x_2 + 2017 = 0 \end{cases}$

$BH^2 + HD^2 = 2AB^2 - 2\cos\alpha AB^2 - 10$

$\Rightarrow x_1^3 - x_2^3 + 2016(x_2 - x_1) = 0$

$BH^2 + HD^2 = AB^2 + 1 - 18\cos\alpha;$

$BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2BC \cdot CD\cos 2\alpha;$ $(x_1^3 - x_2^3) = 2016(x_1 - x_2)$

$HD = \sqrt{\frac{1}{5}}$

$\Rightarrow x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 2016$

w3

$BH^2 + HD^2 =$

$= 18(1 - \cos\alpha) - 10$ $AC = \frac{9}{2};$

$BD = BH + HD =$

$= \frac{5}{HD} + HD = \frac{5 + HD^2}{HD};$

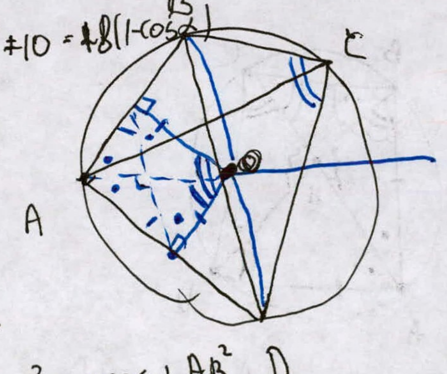
$BH^2 + HD^2 + 10 = 18(1 - \cos\alpha)$

$\frac{BC}{AC} = \frac{CH}{CD}$

$\frac{BC}{CD} = \frac{AH}{HC}?$ $\frac{45}{4}$

$AD = 3;$

$BD = ?$ min

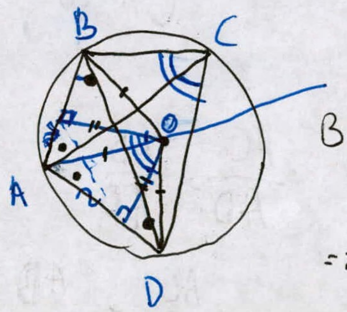


$\frac{AH}{BH} = \frac{HC}{HD}$

$\frac{AH}{HC} = \frac{BC}{CD}$

$BD^2 =$

$= 2AB^2 - 2\cos\alpha AB^2$

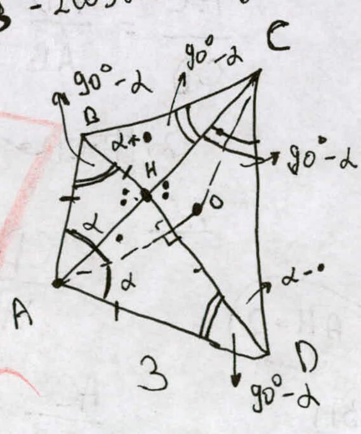


$BD = BH + HD =$

$= HD\left(1 + \frac{BC}{CD}\right)$

$\Rightarrow BD = HD\left(\frac{AC}{HC}\right)$

$HC + AH = AC$



$\frac{AH}{HC} = \frac{AH}{DH}$

$BH \cdot DH = HC \cdot AH$

$BD = 2AB \cdot \sin\alpha;$

$\frac{AD}{BC} = \frac{HD}{HC};$ $\frac{AB}{CD} = \frac{BH}{HC}$

$\Rightarrow BH \cdot CD = BC \cdot HD$

№4

Черновик

[-5; 65]

$\sin k = \frac{x}{10}$ $-1 \le \frac{x}{10} \le 1$

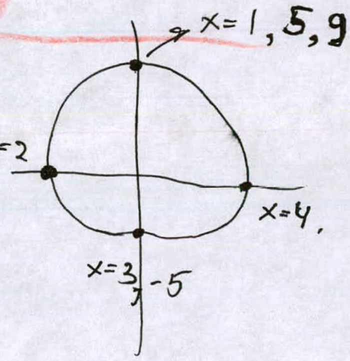
$\Rightarrow -10 \le x \le 10$

$$\frac{\sin(\frac{\pi x}{2}) + \cos(\frac{\pi x}{2}) - 1}{\sin(\frac{\pi x}{2}) - \cos(\frac{\pi x}{2}) + 1} \ge 0$$

$\sin\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$

$\Rightarrow \sin\alpha + \cos\alpha = 1$

$$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1} \geqslant 0$$



$\sin\alpha + \cos\alpha =$

$= \sin\alpha.$

$\sin\alpha \in [-1; 1]$

$\cos\alpha \in$

sin(

$\Rightarrow \sin\alpha = -\cos\alpha$

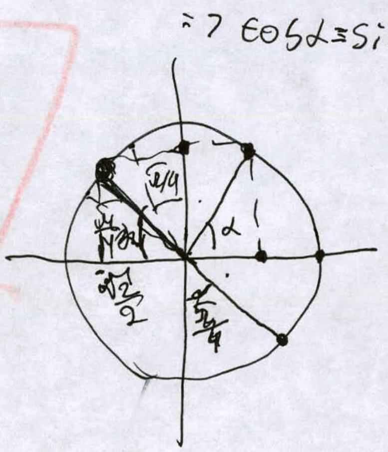
$\sin\alpha + \cos\alpha \ne 0$

$\Rightarrow \alpha = \pi k + \frac{3}{4}\pi$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\left(\frac{4k+3}{2}\right)$

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^1 = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{1 + 2\overset{\sin 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} - 1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + (\sin\alpha + \cos\alpha)} \geqslant 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = \sin\alpha$



$$\Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + (\sin\alpha + \cos\alpha)} \geqslant 0$$

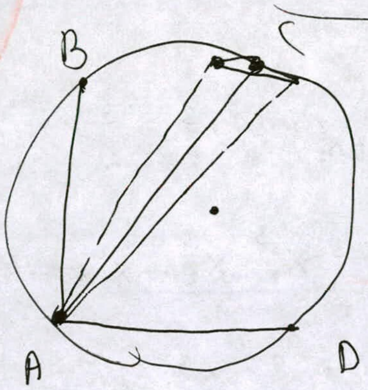
$\sin 2\alpha \in [-1; 1];$

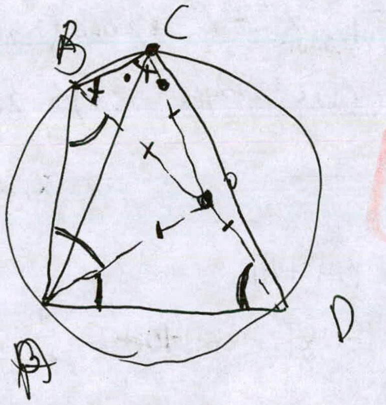
cos

$$\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha - 1}{2\pi \sin 2\alpha}$$

$\sqrt{2} - 1 > 0$

Черновик



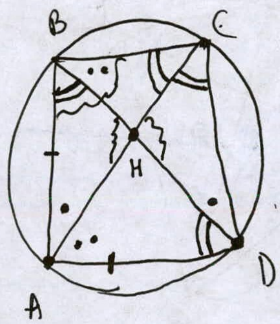


$90^\circ - \alpha$

$\frac{BH}{HD} =$

$\frac{BH}{AH} = \frac{HC}{HD}$

$BH \cdot HD = 5$



$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AH}$

$\frac{AC}{CD} = \frac{HD}{AB}$; $\frac{AB}{HD}$;

$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AH}$

$\Rightarrow \cancel{HD \cdot CD = \frac{27}{2}}$;

AC

$\Rightarrow HC = AC - AH =$

$\frac{9}{2} = \frac{9}{AH}$ $AH = 2$

$\frac{CD}{HD} = \frac{3}{2}$

$= \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}$

$\frac{AC}{AD} =$

$\Rightarrow \frac{AC}{HC} = \frac{9}{5}$; $\frac{BC}{AD} = \frac{BH}{AH}$

$\Rightarrow BD = \frac{9}{5} HD$;

$\frac{BC}{BH} = \frac{3}{2}$

$\frac{BC}{BH} = \frac{CD}{HD}$