98-27-56-09
(181.5)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 172

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы Горы"

по математике

Макарова Ивана Алексеевича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«22» марта 2016 года

Подпись участника

Курганов (НКур) **ЛИСТ-ВКЛАДЫШ** 80 (восемьдесят) Жемов (Жид) Шелонто

№1. верно

$\frac{1}{2} \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin\frac{1}{2} > 0, \cos\frac{1}{2} > 0$

Чистовик

$\frac{26}{19} \vee \sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{26}{19}\right)^2 \vee \left(\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \frac{676}{361} \vee \sin^2\frac{1}{2} + \cos^2\frac{1}{2} + 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{676}{361} - 1 \vee \sin 1$

$\Leftrightarrow \frac{315}{361} \vee \sin 1$ т.к. $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$

$\pi > 3 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} > 1 \Rightarrow \sin 1 < \sin\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \sin 1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{315}{361} \vee \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 315^2 \cdot 4 \vee 3 \cdot 361^2$

$315^2 = 105^2 \cdot 9 = 11025 \cdot 9 = 99225$

$99225 \cdot 4 = 396900$

$361^2 = 130321$ $361^2 \cdot 3 = 390963$

$396900 > 390963 \Leftrightarrow 315^2 \cdot 4 > 3 \cdot 361^2$

$\Leftrightarrow \frac{315}{361} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{315}{361} > \frac{\sqrt{3}}{2} > \sin 1$

$\Rightarrow \frac{26}{19} > \sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{26}{19} > \sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}$.

№2. верно

$V_1 = 1/3 \frac{круг}{мин}$ $V_2 = \frac{1}{k} \frac{круг}{мин}$, где $k \in \mathbb{Z}, k > 3$

Перейдём в систему отсчёта, в которой более медленный водитель неподвижен.

№ 3. верно

Чистовик

$\sqrt{(x-3)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+6)^2}$ $\cancel{= f(x)}$

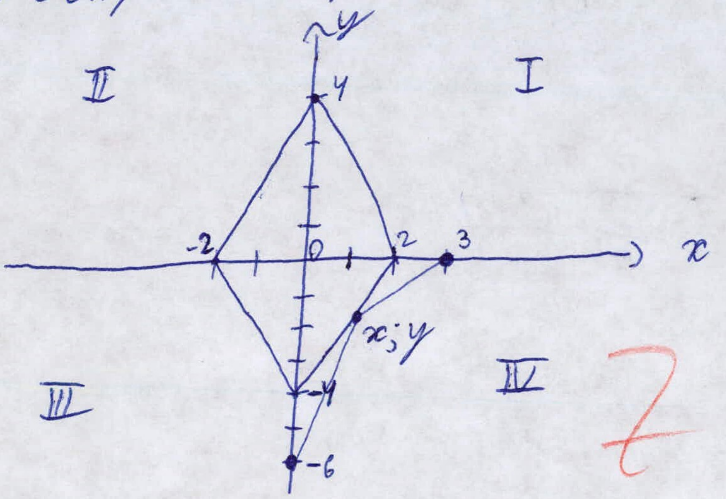
— это сумма расстояний от точки $(x; y)$ до точек $(3; 0)$ и $(0; -6)$.

$2|x|+|y|=4$ при $x, y > 0$:

$2x+y=4$ $\quad y = 4-2x$ — прямая, проходящая через $(0; 4)$ и $(2; 0)$

при x и/или $y < 0$ будут получаться аналогичные прямые: $y = 4+2x$, $y = 2x-4$, $y = -2x-4$

Построим график для выражения и условия:



Поскольку точка $(x; y)$ должна лежать на ромбе $2|x|+|y|=4$, а сумма расст. минимальна, очевидно, что точка $(x; y)$ лежит ~~во~~ в IV четверти.

можно было подробнее

2

$x>0$, $y \le 0 \Rightarrow y = 2x-4$

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+6)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(2x-4)^2} + \sqrt{x^2+(2x+2)^2} = \sqrt{x^2-6x+9+4x^2+16-16x} + \sqrt{x^2+4x^2+4+8x} = \sqrt{5x^2-22x+25} + \sqrt{5x^2+8x+4}$$

$D_1 = 22^2 - 4\cdot 25\cdot 5 = 484-500 < 0 \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty)$

$D_2 = 64 - 4\cdot 5\cdot 4 = 64-80 < 0 \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty)$,

т.к. у этих квадр. трёхчленов нет корней $\Leftrightarrow$ они всегда > 0.

$f(x) = \sqrt{5x^2-22x+25} + \sqrt{5x^2+8x+4}$

Чистовик

$$\begin{cases} y^2+z^2=25 \\ x^2+z^2=20 \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+z^2=25 \\ 13-y^2+z^2=20 \\ x^2=13-y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2+7=25 \\ z^2=y^2+7 \\ x^2=13-y^2 \end{cases}$$

$y^2=\frac{25-7}{2}=9 \quad y=3$

$\cancel{z^2=16-7=9 \quad z=3}$

$z^2=9+7=16 \quad z=4$

$x^2=13-9=4 \quad x=2$

$\Rightarrow D(2;3;4)$

$\cancel{A(a;0;0),\ D}$

$D\in$ пл-ти ABC.

$A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, $D(2;3;4)$

$\Rightarrow \frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}=1$

$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{a}\cdot\frac{3}{b}\cdot\frac{4}{c}}$

$3\sqrt[3]{\frac{24}{abc}} \leq 1$

Поскольку $SC \perp$ пл-ти ABS, $\cancel{SA}$

$V_{ABCS}=\frac{1}{3}S_{ABS}\cdot SC=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot SA\cdot SB\cdot SC=\frac{abc}{6}$

$abc=6V$

$3\sqrt[3]{\frac{24}{6V}} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{4}{V}} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{V} \leq \frac{1}{27}$

$\Leftrightarrow \frac{V}{4} \geq 27 \quad V \geq 27\cdot 4$

$V_{min}=27\cdot 4=80+28=108$

Ответ: 108

Тогда более быстрый едет по той же кольцевой трассе со скоростью: Чистовик

$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{k} = \frac{k}{3k} - \frac{3}{3k} = \frac{k-3}{3k}$ $\frac{круг}{мин}$

~~Скорость~~ Время обгона:

$\frac{1}{V} = \cancel{\frac{V(k-3)}{3k}}$ F $\frac{3k}{k-3} = t$

$t \in Z$, $t > 7$

$t(k) = \frac{3k-9+9}{k-3} = 3 + \frac{9}{k-3}$ – гипербола.

При $k > 3$ $t(k)$ убывает.

~~Пусть $k = 4$~~

$t(4) = 3 + \frac{9}{4-3} = 12$ мин

$t(5) = 3 + \frac{9}{5-3} = 3 + \frac{9}{2} \notin Z$

$t(6) = 3 + \frac{9}{6-3} = 3 + 3 = 6$ мин < 7

Поскольку $t(k)$ убывает при $k > 3$,

при $k > 6$ $t(k) < 7$.

$\Rightarrow t(k) = t(4) = 12$

Ответ: 12 мин.

№ 5. верно

Поскольку $SA \perp SB \perp SC$, можно ~~обозначить~~ построить систему координат, где $Ox \uparrow\uparrow SA$, $Oy \uparrow\uparrow SB$, $Oz \uparrow\uparrow SC$, $S(0;0;0)$.

Пусть $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$; $D(x;y;z)$.

$\rho(D; SA) = \sqrt{y^2 + z^2}$ т.к. $SA \equiv Ox$.

$\rho(D; SB) = \sqrt{x^2 + z^2}$

$\rho(D; SC) = \sqrt{x^2 + y^2}$

№1.

$\frac{26}{19} \vee \sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}$

~~Чистовик~~ Черновик

$\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{2}\right) =$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{1}{2} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

$\pi \approx 3{,}1415\ldots$

$\Rightarrow 3{,}14 < \pi < 3{,}15$

$\frac{3{,}14}{3} < \frac{\pi}{3} < \frac{3{,}15}{3}$; $\frac{3{,}14}{4} < \frac{\pi}{4} < \frac{3{,}15}{4}$

$\frac{3{,}14}{4} + \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} < \frac{3{,}15}{4} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5{,}14}{4} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} < \frac{5{,}15}{4}$

$\frac{3{,}15}{3} \vee \frac{5{,}14}{4} \Leftrightarrow 3{,}15 \cdot 4 \vee 5{,}14 \cdot 3$

$\Leftrightarrow 12{,}6 < 15{,}42$, т. е. $\frac{3{,}15}{3} < \frac{5{,}14}{4}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{3} < \frac{3{,}15}{3} < \frac{5{,}14}{4} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \vee \frac{\pi}{4}$ $\qquad \pi > 2 \Rightarrow \frac{\pi}{4} > \frac{2}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

$\cancel{\sin\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$

Поскольку на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin$ непрерывно возрастает,

$\frac{\pi}{3} < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) < \sin\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < 1$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2}$

Чистовик

$\Rightarrow$ $x=0,7$ – минимум $f(x)$ т.к. знак производной меняется с – на + (где либо ещё между 0 и 1 он не меняется т.к. функция непрерывна).

$$f(x)_{min} = f(0,7) = \sqrt{5\cdot\frac{49}{100} - 22\cdot\frac{7}{10} + 25} + \sqrt{5\cdot\frac{49}{100} + 8\cdot\frac{7}{10} + 4} = \sqrt{\frac{49}{20} - \frac{22\cdot 14}{20} + \frac{25\cdot 20}{20}} + \sqrt{\frac{49}{20} + \frac{8\cdot 14}{20} + \frac{4\cdot 20}{20}} =$$

$$= \frac{\sqrt{49 - 308 + 500} + \sqrt{49 + 112 + 80}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{241}}{2\sqrt{5}}.$$

~~Ответ:~~ $\cancel{\frac{\sqrt{241} + \sqrt{17}}{2\sqrt{5}}}$. $\cancel{\frac{2\sqrt{241}}{2\sqrt{}}}$

Ответ: $\sqrt{\frac{241}{5}}$

Продолжение №3. Чистовик

$$f'(x) = \frac{10x-22}{2\sqrt{5x^2-22x+25}} + \frac{10x+8}{2\sqrt{5x^2+8x+4}}$$

$f'(x)=0$:

$$\frac{5x+4}{\sqrt{5x^2+8x+4}} = \frac{11-5x}{\sqrt{5x^2-22x+25}}$$

Поскольку $x\in[0;2]$ (на графике, в IV четв.), $11-5x>0$. Остальное, очевидно, >0.

$$\Leftrightarrow \frac{25x^2+40x+16}{5x^2+8x+4} = \frac{121-110x+25x^2}{5x^2-22x+25}$$

$$\Leftrightarrow \frac{25x^2+40x+20-4}{5x^2+8x+4} = \frac{125-110x+25x^2-4}{25-22x+5x^2}$$

$$\Leftrightarrow 5-\frac{4}{5x^2+8x+4} = 5-\frac{4}{5x^2-22x+25}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2+8x+4 = 5x^2-22x+25$$

$$\Leftrightarrow 30x = 21$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

Т.е. в $x=0,7$ располагается экстремум $f(x)$.

~~$f'(0,6) = \frac{3+4}{\sqrt{5\cdot 0,36+8\cdot 0,6+4}} + \frac{3-11}{\sqrt{5\cdot 0,36-22\cdot 0,6+25}} =$~~

~~$= \frac{7}{\sqrt{5\cdot 0,36+8\cdot 0,6+4}} - \frac{8}{\sqrt{5\cdot 0,36-22\cdot 0,6+25}} =$~~

~~$= \frac{7}{\sqrt{1,8+4,8+4}} - \frac{8}{\sqrt{1,8-13,2+25}} = \frac{7}{\sqrt{10,6}} - \frac{8}{\sqrt{13,6}}$~~

$$f'(0) = \frac{4}{\sqrt{4}} + \frac{-11}{\sqrt{25}} = \frac{4}{2} - \frac{11}{5} = 2-2,2 < 0$$

$$f'(2) = \frac{14}{\sqrt{40}} + \frac{-1}{\sqrt{1}} = \frac{7}{\sqrt{10}} - 1 > 0$$ т.к. $7>\sqrt{10}$
т.к. $49>10$

Черновик ~~Чистовик~~

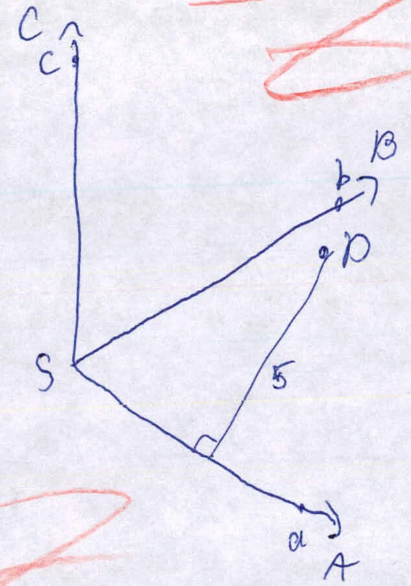
$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} \vee \frac{26}{19}$

$\Leftrightarrow \frac{6}{4} \vee \frac{26^2}{19^2}$ $\Leftrightarrow \frac{3}{2} \vee \frac{676}{361}$ ~~$\Leftrightarrow 3\cdot361 \vee 676\cdot2$~~

$3\cdot361 = 3\cdot300 + 3\cdot61 = 900 + 183 = 1083$

$676\cdot2 = 600\cdot2 + 6\cdot2 + 70\cdot2 = 1200 + 12 + 140 = 1352$

$1352 > 1083 \Leftrightarrow$ ~~$676\cdot2 > 3\cdot361$~~ $3\cdot361 < 676\cdot2 \Leftrightarrow$



$b^2 + c^2 = 25$

$a^2 + c^2 = 20$ $\quad a^2 = 20 - c^2$

$a^2 + b^2 = 13$

$20 - c^2 + b^2 = 13$

$b^2 = c^2 - 7$ $\quad b = 3$

$c^2 - 7 + c^2 = 25$

$2c^2 = 32$ $\quad c = 4$

$c^2 = 16$ $\quad$ тут $a \to x$, $b \to y$ ...

$a = 2$

$V = \frac{abc}{6}$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{xyz}{abc}}$ $\qquad 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{xyz}{6V}}$

Черновик

$\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2} =$

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{1}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{2}} =$

$= \sin\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{26}{19} = \frac{19+7}{19} = 1 + \frac{7}{19}$

$\frac{\pi}{4} \approx \frac{3{,}1416}{4} = \quad \frac{31416}{10000\cdot 4} = 7500 + 4 + 14\cdot 25 =$

$7500 + 4 + 350 = 0{,}7854$

$\frac{26}{19}$ $\sqrt{2}$

$1{,}4^2 = 1{,}96 < 2$

$\Rightarrow 1{,}4 < \sqrt{2}$

$1{,}4 = \frac{7}{5}$

$1+1+1 \geq 3\sqrt[3]{1\cdot1\cdot1}$

$2+2+2$

$\frac{26}{19}$ $\frac{7}{5}$ $\frac{130}{95} < \frac{133}{95}$

361×361: 361, 2166, 1083, 130321

$3{,}14 < \pi < 3{,}15$ $\frac{3{,}14}{4} < \frac{\pi}{4} < \frac{3{,}15}{4}$

$\frac{3{,}14}{4} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} < \frac{3{,}15}{4}$ $\frac{3{,}14}{3} < \frac{\pi}{3} < \frac{3{,}15}{3}$

$3{,}14\cdot 3 \vee 3{,}15\cdot 4$ $15{,}42 > 12{,}6$

$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} > \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin > \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{6}$ $\frac{26}{19}$ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\frac{26^2}{19^2}$ $\frac{6}{4}$

$\frac{676}{361}$ $\frac{3}{2}$ $676\cdot 2$ $361\cdot 3$

$900 + 183$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

$\sqrt{(x-3)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+6)^2}$

$3;0 \qquad 0;-6$

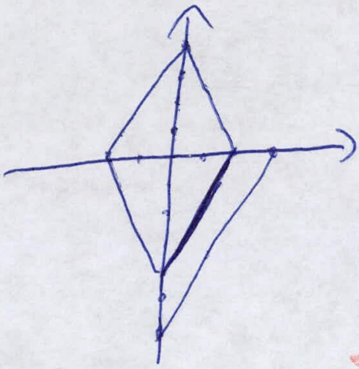
400
441
884

$22 \cdot 14 = 220+88 = 308$

$|y| = 4-2|x| \qquad y = 4-2x$

$25 \cdot 20 = 100 \cdot 5$

$8 \cdot 14 = 80+32 = 112$



$x>0 \quad y<0$

$2x - y = 4 \qquad y = 2x-4$

$549 - 308 = 241$

$\sqrt{(x-3)^2+(2x-4)^2} + \sqrt{x^2+(2x+2)^2} =$

$= \sqrt{x^2-6x+9+4x^2+16-16x} + \sqrt{x^2+4x^2+8x+4}$

$\frac{-b}{2a} = \frac{22}{10} \qquad \frac{-8}{10}$

$= \sqrt{5x^2-22x+25} + \sqrt{5x^2+8x+4}$

$\frac{1}{2\sqrt{5x^2-22x+25}} \cdot (10x-22) + \frac{(10x+8)}{2\sqrt{5x^2+8x+4}}$

$22^2 - 4 \cdot 5 \cdot 25 < 0 \qquad 64 - 4 \cdot 4 \cdot 5 < 0$

$\frac{5x-11}{\sqrt{5x^2-22x+25}} + \frac{5x+4}{\sqrt{5x^2+8x+4}}$

$\frac{5x-11}{\sqrt{1}} = -\frac{5x+4}{\sqrt{2}}$

$x \le 2 \Rightarrow 11-5x>0$

$(11-5x)\sqrt{2} = (5x+4)\sqrt{1}$

$(121-110x+25x^2)(5x^2+8x+4) = (25x^2+40x+16)(5x^2-22x+25)$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$\left(\frac{26}{19}\right)^2 \vee \sin^2+\cos^2+2\sin\cos$

Черновик

$2\sin\frac{1}{2}\ \cos\frac{1}{2} = \sin 1$

$\frac{676}{361}-1 \vee 2\sin\cos$

$\frac{676-361}{361} \vee \sin 1$ $\frac{315}{361}$ $\sin 1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{315}{361} \vee \frac{\sqrt{3}}{2}$ $315\cdot 2 \vee \sqrt{3}\,361$

$315^2\cdot 4 \vee 3\cdot 361^2$

$\times\begin{array}{r}315\\315\end{array}$

$\begin{array}{r}\times 105\\105\\\hline 525\\105\\\hline 11025\end{array}$ $\times 9$

$\begin{array}{r}\times 361\\361\\\hline 361\\2166\\1083\\\hline 130321\end{array}$

$\begin{array}{r}4\\\times 99\\\hline 36\\36\\\hline 396\end{array}$

$\cancel{\times 99225 \cdot 4}$

$99225\cdot 4 = 800+100+99000\cdot 4 =$

$900+396000 = 396900$

390963

$\sin 1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\frac{26}{19}\right)^2 \vee \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{315}{361} \vee \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{315^2}{361^2} \vee \frac{3}{4}$

$315^2\cdot 4 \vee 3\cdot 361^2$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

$v_1 = $ ~~[illegible]~~ $1/3$ кр/мин

Черновик

$v_2 = 1/k$ кр/мин $k \in Z,\ k > 3$

$315 = 3 \cdot 105$

$105^2 = 105 \cdot 5 + 105 \cdot 100 =$

$10500 + 525 = 11025$

99225

396900

$v_r = \frac{1}{3} - \frac{1}{k} = \frac{k-3}{3k}$

$\frac{1}{v_r} = p \quad p \in Z \quad p > 1$

$$\begin{array}{r} 361 \\ \times 361 \\ \hline 361 \\ 2166 \\ 1083 \\ \hline 130321 \end{array}$$

390963

$\frac{3k}{k-3} = p \qquad 3k = pk - 3p$

$(3-p)k = -3p \qquad (p-3)k = 3p$

k	
4	12
5	$\frac{15}{2}$
6	$\frac{18}{3} = 6$
7	$\frac{21}{4}$
8	$\frac{24}{5}$
9	$\frac{27}{6}$
10	$\frac{30}{7}$
11	$\frac{33}{8}$
12	$\frac{36}{9} = 4$

$p = \frac{3k}{k-3} = \frac{3k - 9 + 9}{k-3} = \frac{3(k-3)+9}{k-3}$

$3 + \frac{9}{k-3}$

$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+6)^2}$

$2|x| + |y| = 4$

$\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y - -6)^2}$

$(3;0) \qquad (0;-6)$

$2x + y = 4 \qquad y = -2x + 4$
$\qquad\qquad\qquad y = 2x + 4$