39-04-13-34
(181.5)

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 172

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы"

по математике

Михнево Алексея Олеговича

фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Выход — 12:11 — 12:14

+1 Анна

Дата

«22» марта 2016 года

Подпись участника

Наумченко Абрамов Ильенко ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

39-04-13-34
(181.5)

Черновик 75 (семьдесят пять)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

$$\frac{n^2}{n^2+0,4} = \frac{n^2-6,5n+45}{n^2-6,5n+45,4}$$

$$n^2(n^2-6,5n+45+0,4) = n^2(n^2-6,5n+45)+0,4\cdot(n^2-6,5n+45)$$

$$\cancel{0=}\ 0,4n^2 = 0,4n^2-2,6n+18$$

$$n = \frac{18}{2,6} = \frac{90}{13}$$

$n=0 \quad a'<0$

$n = 100$

$$x+y = \sqrt{\frac{3100}{169}+\frac{2}{5}} + \sqrt{}$$

$$[\log_3(\log_2 x)]^2 - 10\log_3([\log_2 x]) + 21\log_3(\log_2[x])) = 0$$

$$\cancel{[\log_3(\log_2 x)]^2 + 21\log_3(\log_2[x]) = 10\log_3([\log_2 x])}$$

$$\cancel{(\log_3(\log_2 x))^2 - 10\log_3(\log_2 x+1)} +$$

$$a^2-10b+a=0$$

$$\begin{cases} a^2+a-10b \le 0 \\ b^2-10a+b \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2+a-10b \le 0 \\ b^2+b-10a \ge 0 \end{cases}$$

$$b \ge \frac{a^2+a}{10} \qquad a^2+a-10b \le b^2+b-10a$$

$$a^2+11a \le b^2+11b$$

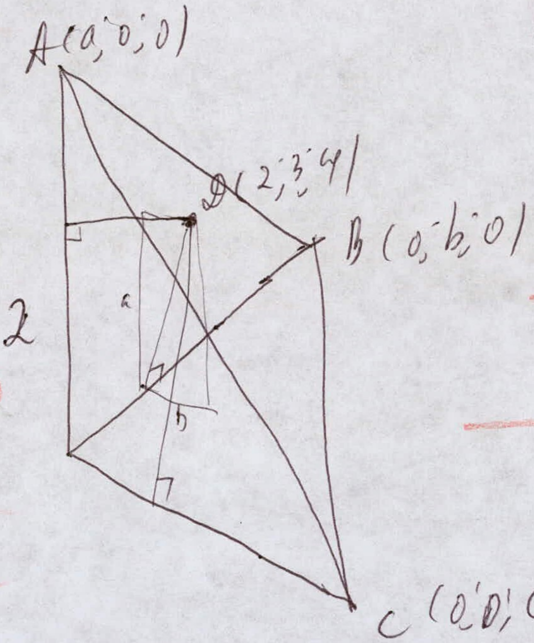
$$\cancel{a \le b} \quad (a-b)(a+b)+11(a-b)$$

$$(a-b)(a+b+11)$$

Черновик

$V = \frac{bc}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{3}$

$V = \frac{abc}{6}$



$a^2+b^2=25$

$b^2+c^2=13$

$a^2+c^2=20$

$\begin{cases} a^2=25-b^2 \\ b^2+c^2=13 \\ 25-b^2+c^2=20 \end{cases}$

$25+2c^2=33$

$2c^2=8$

$c=2,\ b=3,\ a=4$

$\cancel{4x+3y+2z}$

$4+9+16=29$

~~AB=AC~~

$k_1x+k_2y+k_3z+d=0$

$k_1a+d=0$

$k_2b+d=0$

$k_3c+d=0$

$2k_1+3k_2+4k_3+d=0$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

черновик

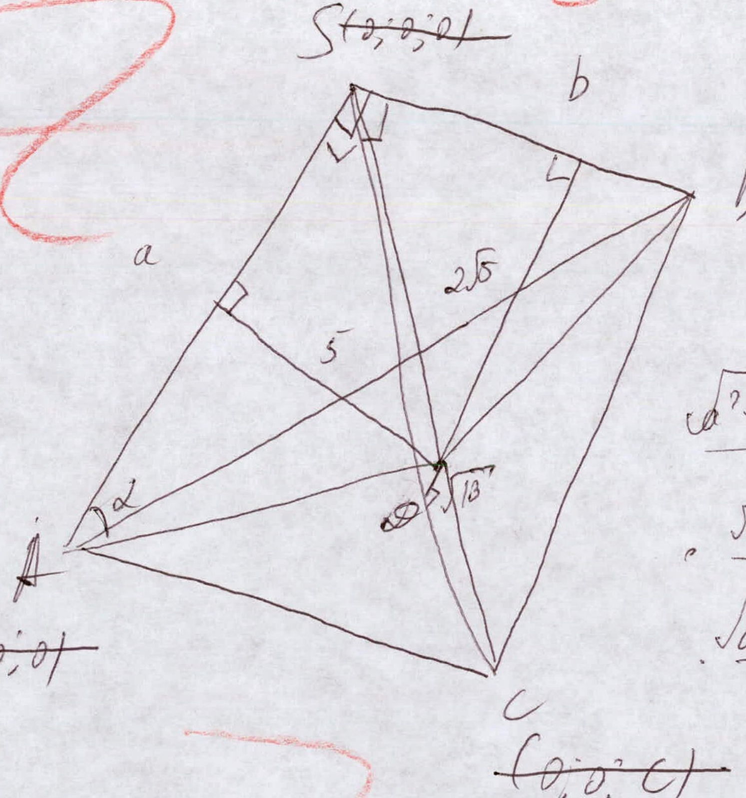
$\log_3 \log_2 [x] \vee \log_3 [\log_2 x]$

$\log_2 [x] \vee [\log_2 x]$

$\log_2 (x-1) \vee \log_2 x$

$25+13+10$

$58 = 2 \cdot 29$



$\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}}{2}$

$\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}-\sqrt{a^2+c^2}}{2}$

$\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2}}{2}$

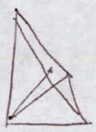
$\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2}$

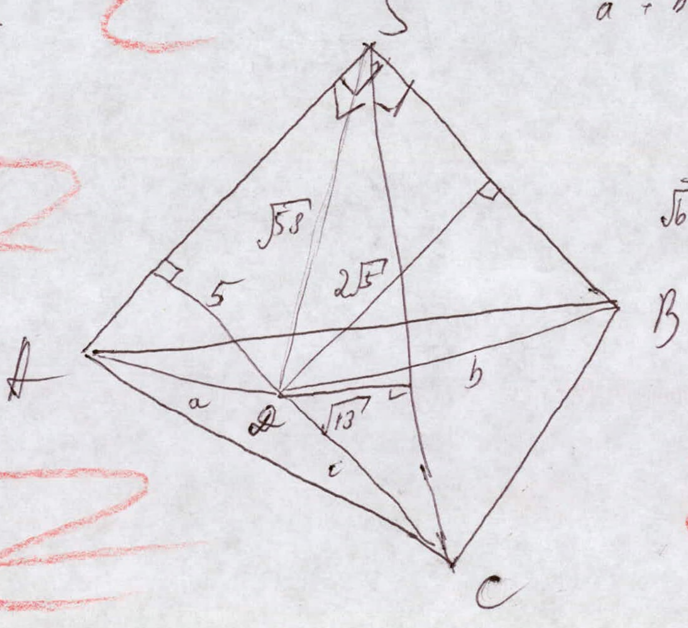
$a^2+b^2 = b^2+c^2+a^2+c^2-$

$-2\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{a^2+c^2}\cos$

$\frac{c^2}{\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{a^2+c^2}} = \cos \alpha$

$\sin = \frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{a^2+c^2}}$





Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

черновик

$\log_3(\log_2 x) < [\log_3(\log_2 x)] \le \log_3(\log_2 x) + 1$

$\log_3(\log_2 x) \le \log_3[\log_2 x] \le \log_3(\log_2 x + 1)$

$\log_3(\log_2 x) \le \log_3(\log_2[x]) \le \log_3(\log_2(x+1))$

$\log_3(\log_2 8) = 1$

$\log_3(\log_2 2) = 0$

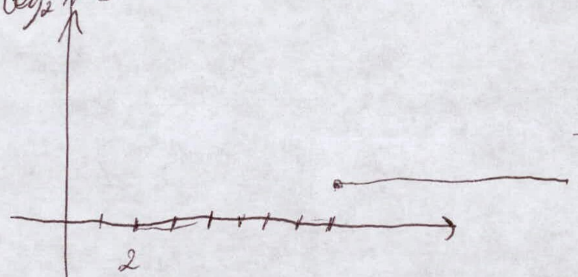
при ~~x~~ $\log_2 x < 0$,
нет реш.

~~$(a+1)^2 - 10a + 21b = 0$~~

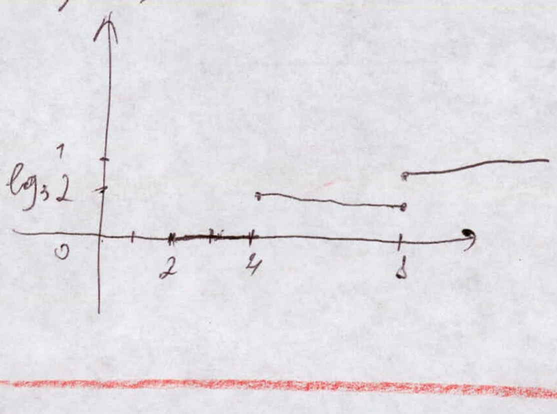
~~$a^2 - 8a + 1 + 21b = 0$~~

$x - 1 \le [x] \le x$

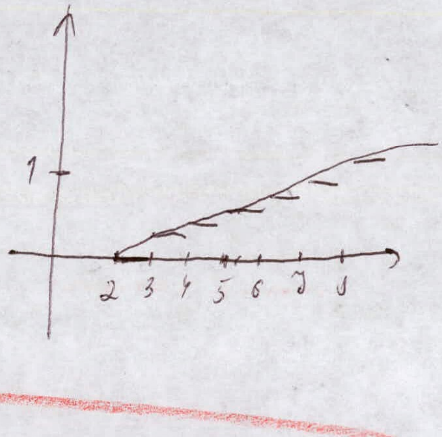
$[\log_3 \log_2 x]$



$\log_3[\log_2 x]$



$\log_3 \log_2 [x]$



39-04-13-34
(181.5)

Чистовик

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

1. $\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$

$\frac{26}{19}\ \vee\ \sqrt{2}$.

$\frac{26}{19}-\sqrt{2}=\frac{26-19\sqrt{2}}{19}\ \vee\ 0$

$26\ \vee\ 19\sqrt{2}$

676

$\cancel{736\ \vee\ 361\cdot 2}$

$736 > 722$

$\Downarrow$

$26 > 19\sqrt{2}$

$\Downarrow$

$\cancel{\frac{26}{19} > \sqrt{2}}$

неверно

$\frac{26}{19} > \sqrt{2} > \sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}$

$\frac{26}{19} > \sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}$

~~Открытыи~~ Чистовик

$BC = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$

Опустим из ~~BC~~ A перпендикуляр к BC, AA_1. Пусть $AA_1 = n$.

$$AB + AC = \sqrt{n^2 + \frac{4}{5}} + \sqrt{(3\sqrt{5}-n)^2 + \frac{4}{5}} = t$$

$$t' = \frac{n}{\sqrt{n^2+\frac{4}{5}}} + \frac{n - 3\sqrt{5}}{\sqrt{(n-3\sqrt{5})^2 + \frac{4}{5}}} = 0$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+\frac{4}{5}}} = \frac{3\sqrt{5}-n}{\sqrt{(n-3\sqrt{5})^2+\frac{4}{5}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n^2}{n^2+\frac{4}{5}} = \frac{(3\sqrt{5}-n)^2}{(3\sqrt{5}-n)^2+0{,}8}$$

$$n^2(3\sqrt{5}-n)^2 + 0{,}8n^2 = n^2(3\sqrt{5}-n^2) + 0{,}8(3\sqrt{5}-n^2)$$

$$0{,}8n^2 = 0{,}8n^2 + 36 - 4{,}8\sqrt{5}\,n$$

$$n = \frac{3}{0{,}4\sqrt{5}}$$

$n = 1{,}5\sqrt{5}$ — точка минимума.

(при ней $t' = 0$, при $n < 1{,}5\sqrt{5}$ $t' < 0$, $n > 1{,}5\sqrt{5}$ $t' > 0$)

При таком n

$$AB + AC = 2\sqrt{(1{,}5\sqrt{5})^2 + 0{,}8} = 2\sqrt{2{,}25\cdot 5 + 0{,}8} =$$

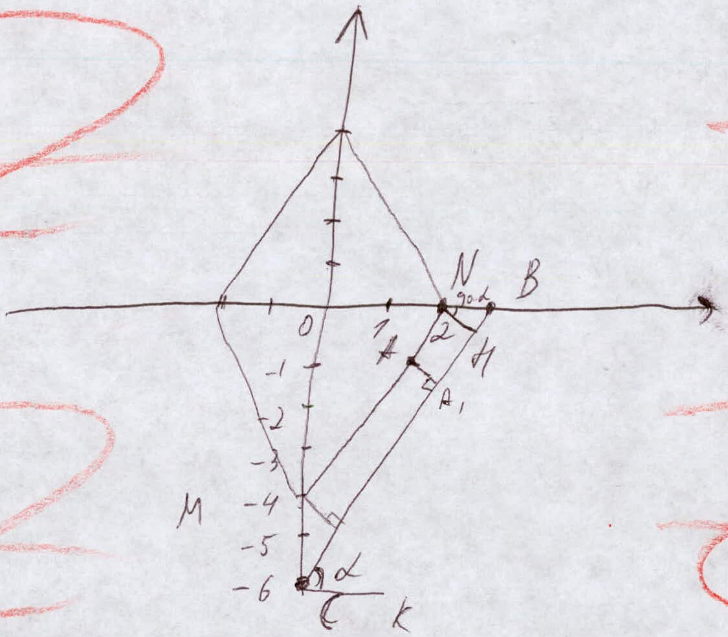
$$= \sqrt{9\cdot 5 + 3{,}2} = \sqrt{48{,}2}$$

3. $\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\overset{\text{чистовик}}{\sqrt{x^2+(y+6)^2}}$ Чистовик

$A(x;y)$ $B(3;0)$ $C(0;-6)$

Данная сумма корней — $AB+AC$, при A, B, C с указанными координатами.

Нарисуем на плоскости B, C и область, где $2|x|+|y|=4$



Очевидно, $A \in MN$ (если $A \notin MN$, то всегда найдется на MN точка X для которой $XB+XC<$ $<BA+CA$)

~~$\rho(MN, BC)=\frac{2}{\sqrt{5}}$ т.к. $BN=1$, а $tg\,\alpha=2$~~

$tg\,BCK=$ ~~2 как коэффициент при x~~ $\frac{6}{3}=2$.

$\parallel$

$tg\,NBH=2 \Rightarrow NH^2+\left(\frac{NH}{2}\right)^2=1$

$NH=\frac{2}{\sqrt{5}}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик

2. Пусть x мин тратит второй водитель на круг, тогда его скорость $\frac{1}{x}$ (примем длину круга за 1)

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{x}} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{x}} > 7 \end{cases}$$

$$\frac{3x}{x-3} > 7$$

Второй водитель медленнее, значит $x > 3$

$3x > 7x - 21$

$4x < 21$

$x < \frac{21}{4}$

Значит, $\left[\begin{array}{l} x = 5, \ \frac{3x}{x-3} = \frac{15}{2}, \text{ не целое, не подходит} \\ x = 4, \ \frac{3x}{x-3} = 12, \text{ подходит} \\ \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right\} \text{ не подходят, } x > 3 \end{array}\right.$

верно

~~Ответ: 4 минуты~~

неверно, не то в ответ записали, но все решено верно.

Ответ

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

39-04-13-34
(181.5)

Черновик

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

$\frac{26}{19} \vee \sqrt{2}$

$26 \vee 19\sqrt{2}$

$26 \cdot 26$: $216 + 52 = 736$

$19 \cdot 19$: $171 + 19 = 361$

$\frac{26}{19} > \sqrt{2} > \sin\frac{1}{2} \cdot \cos\frac{1}{2}$

$361 \cdot 2 = 722$

~~x – время I водителя~~

~~y – скор~~ x – врем II водит

$x \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{x}} \in \mathbb{Z}$

$\frac{3x}{x-3} > 7$ $\qquad 3x > 7x - 21$

$4x < 21$

$x < \frac{21}{4}$

$\left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = 4 \\ x = 3\ - \\ x = 2\ - \\ x = 1\ - \end{array}\right.$

$\frac{15}{2} \notin \mathbb{Z}$

$\frac{12}{1} \in \mathbb{Z}$

4

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

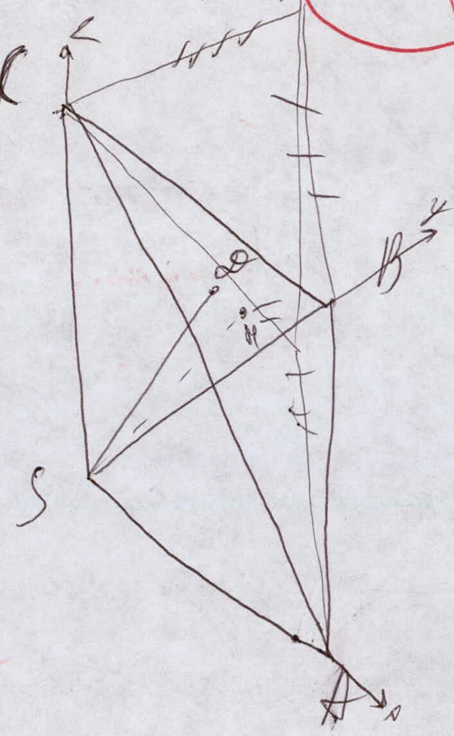
чистовик

Также необходимо, чтобы $21\log_3\left[\log_2[x]\right]-10\log_3\left[\log_2 x\right]=0$. Достигается при $x\in[2;3)$, иначе выражение положительно.

Ответ: $[2;3)$

верно

5.



Введем систему координат с началом в S, осями SA, SB, SC.

$D(x;y;z)$:

$$\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ y^2+z^2=20 \\ x^2+z^2=25 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=13-y^2 \\ y^2+z^2=20 \\ 13-y^2+z^2=25 \end{cases}$$

$2z^2+13=45$

$z=4$

$\Downarrow$

$y=2$

$x=3$

$D(3;2;4)$ $\quad SD=\sqrt{29}$

$x=2,\ y=3,\ z=4$

Минимальный объем пирамиды будет достигнут, если SD – высота, тогда дотп AS·SB·SC – мин

тогда:

$SD\perp ABC$. Ур. ABC: $3x+2y+4z+d=0$

$D\in ABC$: $9+4+16+d=0$, $d=-29$

(Продолжение на др листе)

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

чистовик

4. $\left[\log_3(\log_2 x)\right]^2 - 10\log_3([\log_2 x]) + 21\log_3\log_2[x] = 0.$

При $x<2$ $[\log_2 x]=0$, ~~уравнение~~ $\log_3[\log_2 x]$ не опр.

Докажем, что $\log_3\log_2[x] \geq \log_3[\log_2 x]$ $\forall x \geq 2$

Обе функции ~~монотонно возраст~~ неубывающие при $\log_2 x_0 \in \mathbb{Z}$ $\log_3\log_2[x] = \log_3[\log_2 x] = \log_3\log_2 x$, т.к тогда и $x_0 \in \mathbb{Z}$

Далее при увеличении x $\log_3\log_2[x]$ увеличится при ~~$x \to x+1$~~ переходе на x_0+1, а $\log_3[\log_2 x]$ при переходе на $2x_0$. Т.к $x_0 \geq 2$, $2x_0 > x_0+1$, что означает что x_0 увеличится на 1 раньше чем удвоится, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ на промежутке $[x_0+1; 2x_0)$ $\log_3\log_2[x] > \cancel{\log_3}$ $> \log_3[\log_2 x]$. В точке $2x_0$ ~~это~~ вновь будет равенство, как и на промежутке $[x_0; x_0+1)$.

Значит, $\forall x \geq 2$ $\log_3[\log_2 x] \leq \log_3\log_2[x] \Rightarrow$

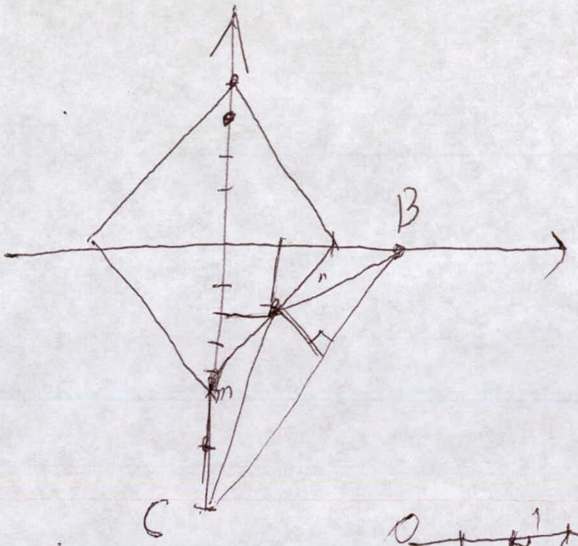
$\Rightarrow 21\log_3\log_2[x] - 10\log_3[\log_2 x] \geq 0$ $\forall x$.

$\left[\log_3(\log_2 x)\right]^2 \geq 0$ $\forall x$, ~~0 дости~~ значит все выражение неотрицательно. 0 достигается при $\left[\log_3(\log_2 x)\right]^2 = 0$, ~~$x=2$~~. $x \in [2; 8)$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

3. $\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+6)^2}$ Черновик

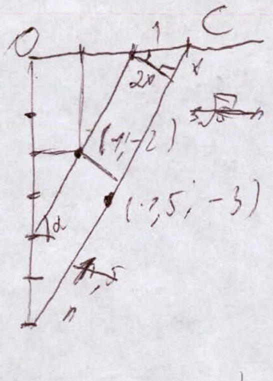
$A(x;y)$ $B(3;0)$ $C(0;-6)$ $y=4-2x$



$mn = \cancel{const}$

$m+n-\min$

m



$\vec{p}\ (0,5;\ -1)$ $tg\alpha = 2$

$|\vec{p}| = \frac{\sqrt5}{2}$ $tg\beta = \frac12$

$BC = \sqrt{9+36} = 3\sqrt5$

$x^2+4x^2=1$

$x=\frac{1}{\sqrt5}$

$h=\frac{2}{\sqrt5}$

$a=\sqrt{n^2+h^2}+\sqrt{(3\sqrt5-n)^2+h^2}$

$\sqrt{n^2+\frac{2}{5}}+\sqrt{45-6\sqrt5 n+n^2+\frac{2}{5}}=$

$=\sqrt{n^2+\frac{2}{5}}+\sqrt{45,4-6\sqrt5 n+n^2}$

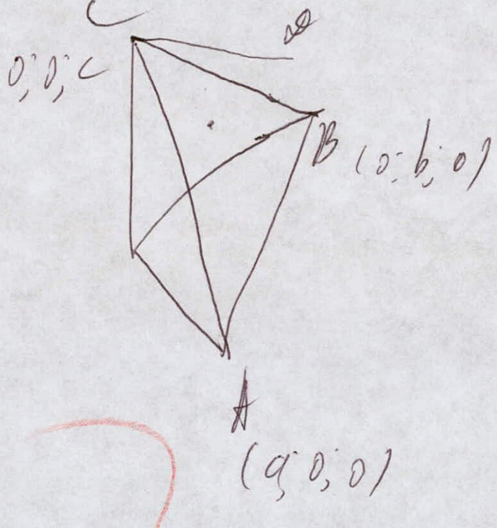
$a' = \frac{n}{\sqrt{n^2+\frac{2}{5}}}+\frac{n-3\sqrt5}{\sqrt{n^2-6\sqrt5 n+45,4}}=0$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

39-04-13-34
(181.5)

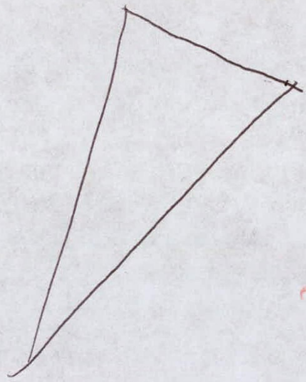
Олимпиада ПВГ 2016

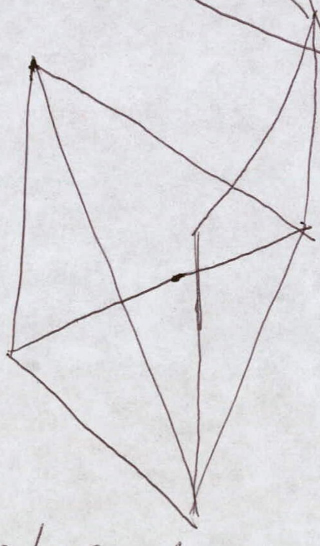
Черновик



$\frac{abc}{6}$ – min

SD





$3a + d = 0$ $\quad 3a = 2b = 4c$

$2b + d = 0$

$4c + d = 0$

2a≈ ~~3a + 2b + 4c + d = 0~~

$d = -29$

$a = \frac{29}{3}$

$b = \frac{29}{2}$ $\quad c = \frac{29}{4}$

Математика

(продолжение з. 6)

$A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$

$A \in ABS$ $B \in ABC$, $C \in ABC$

$$\begin{cases} 3a = 29 \\ 2b = 29 \\ 4c = 29 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a &= \frac{29}{3} \\ b &= \frac{29}{2} \\ c &= \frac{29}{4} \end{aligned}$$

$$V_{ABCS} = \frac{abc}{6} = \frac{29^3}{24 \cdot 6} = \frac{15389}{144}$$

неверно, но идея верная

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

m n p Черновик

$ma-d=0$

$nb-d=0$

$pc-d=0$

$\sqrt{m^2+n^2+p^2}=\sqrt{29}\sin\alpha$

$m^2+n^2+p^2=29\sin^2\alpha$

$ma-29\cos^2\alpha=0$

$nb-29\cos^2\alpha=0$

$pc-29\cos^2\alpha=0$

$abc=\dfrac{29^3\cos^6\alpha}{mnp}$

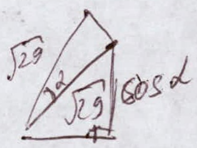
$29 \times 29 = 841$

$841 \times 29 = 24389$

$24 \times 6 = 144$

$m^2+n^2+p^2=29\cos^2\alpha$

$mnp=\dfrac{29^3\cos^6\alpha}{abc}$



Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!