69-15-55-47
(181.5)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 172

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы

по МАТЕМАТИКЕ

Орешкина Артёма Александровича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Выход: 11:54 – 12:00

Дата
«22» марта 2016 года

Подпись участника

Оценку оставить без изменения

(Дьячков)

Председателю Апелляционной комиссии олимпиады школьников „Покори Воробьёвы горы"

От ученика 11 класса Лицея „Вторая школа" гор. Москвы Орешкина Артёма Александровича

Заявление

Прошу пересмотреть поставленные мне баллы за задачу №3, так как моё решение совпадает с приведённым на сайте и не содержит лишь одного шага до ответа.

Прошу повысить мне (не до полного) баллы за эту задачу.

31. 03. 2016

69-15-55-47 (181.5)

Хуранов (АХур) 85/ восемьдесят пять Жемов (Жем) Ильгова (ИБ)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

Чистовик

№1

верно

Рассмотрим $f(x) = \sin x + \cos x$; $f'(x) = \cos x - \sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ монотонно возрастает

$\pi > 3 \Rightarrow \frac{\pi}{6} > \frac{1}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{6}) > f(\frac{1}{2})$; $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$f(\frac{\pi}{6}) \vee \frac{26}{19} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{2} \vee \frac{26}{19} \Leftrightarrow 19\sqrt{3} + 19 \vee 52 \Leftrightarrow 19\sqrt{3} \vee 33$

$361 \cdot 3 \vee 9 \cdot 121 \Leftrightarrow 361 \vee 363$; $363 > 361 \Rightarrow \frac{26}{19} > f(\frac{\pi}{6})$

$\frac{26}{19} > f(\frac{\pi}{6}) > f(\frac{1}{2}) = \sin(\frac{1}{2}) + \cos(\frac{1}{2})$

Ответ: $\frac{26}{19} > (\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2})$

№2

верно

Пусть v_1 ($\frac{\text{круги}}{\text{мин}}$) - скорость быстрого водителя; v_2 ($\frac{\text{кр.}}{\text{мин}}$) - скорость медленного.

z_1 - время, за которое медленный проезжает круг; z_2 - время между обгонами.

Тогда: $\frac{1}{v_1} = 3$; $\frac{1}{v_2} = z_1$; $z_1 \in Z$; $z_1 > 3$

$\frac{1}{v_1 - v_2} = z_2$; $z_2 \in Z$; $z_2 > 7$

$v_1 = \frac{1}{3}$; $v_2 = \frac{1}{z_1} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{z_1}} = z_2 \Rightarrow \frac{3z_1}{z_1 - 3} = z_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3z_1 = z_1 z_2 - 3z_2 \Rightarrow 3z_1 + 3z_2 = z_1 z_2 \Rightarrow \frac{3}{z_1} + \frac{3}{z_2} = 1$

Продолжение на след. странице!

Чистовик №5. Продолжение

Часть 2

по т. Пифагора $DH_3 = \sqrt{DH_1^2 + DH_2^2} = \sqrt{x^2+y^2}$

$\Downarrow$

аналогично для других осей:

$$\begin{cases} 25 = y_0^2+z_0^2 : \text{для } SA \\ 20 = x_0^2+z_0^2 : \text{для } SB \\ 13 = x_0^2+y_0^2 : \text{для } SC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 = 8 \\ 2y_0^2 = 18 \\ 2z_0^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 3 \\ z_0 = 4 \end{cases}$$

~~точка $D \in (ABC) \Rightarrow ax_0+by_0+cz_0=1 \Rightarrow 2a+3b+4c=1$~~
~~$D(x_0;y_0;z_0)$~~

~~$\Rightarrow a = \frac{1-3b-4c}{2} \Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{6abc} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{bc\left(\frac{1-3b-4c}{2}\right)}$~~

~~$\frac{1}{6}\cdot\frac{2a+3b+4c}{abc}$~~

если плоскость $(ABC): a_0x+b_0y+c_0z=d_0 \Rightarrow A\left(\frac{d_0}{a_0};0;0\right)$

$B\left(0;\frac{d_0}{b_0};0\right)$; $C\left(0;0;\frac{d_0}{c_0}\right) \Rightarrow$ из первого продолжения

$\cancel{\Rightarrow V = \frac{1}{6}}$ $\quad V = \frac{1}{6} SA\cdot SB\cdot SC = \frac{d_0^3}{6a_0b_0c_0}$

$D\in(ABC) \Rightarrow 2a_0+3b_0+4c_0=d_0 \Rightarrow V = \frac{1}{6}\frac{(2a_0+3b_0+4c_0)^3}{a_0b_0c_0} =$

$= \frac{1}{6}\left(2\sqrt[3]{\frac{a_0^2}{b_0c_0}} + 3\sqrt[3]{\frac{b_0^2}{a_0c_0}} + 4\sqrt[3]{\frac{c_0^2}{a_0b_0}}\right)^3$

$2\sqrt[3]{\frac{a_0^2}{b_0c_0}} + 3\sqrt[3]{\frac{b_0^2}{a_0c_0}} + 4\sqrt[3]{\frac{c_0^2}{a_0b_0}} \geqslant 3\sqrt[3]{2\cdot3\cdot4\cdot1}$ по т. Коши

$\Downarrow$

$\min V = \frac{1}{6}\cdot 3^3\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 3^3\cdot 4 = 108$

(он существует при $a_0; b_0; c_0$ задаваемых сист. из 3-х уравн. и 3-х неизвест.:

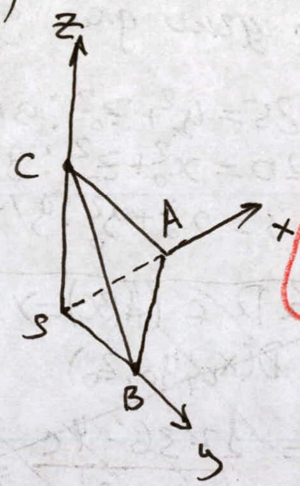
$$\begin{cases} 2\sqrt[3]{\frac{a_0^2}{b_0c_0}} = \sqrt[3]{24} \\ 3\sqrt[3]{\frac{b_0^2}{a_0c_0}} = \sqrt[3]{24} \\ 4\sqrt[3]{\frac{c_0^2}{b_0c_0}} = \sqrt[3]{24} \end{cases}$$

Ответ: 108.

Чистовик.

№5. Продолжение

$A(\frac{1}{a};0;0);\ B(0;\frac{1}{b};0);\ C(0;0;\frac{1}{c})$



$V_{SABC}=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\cdot SC\cdot S_{ABS}$

$SC\perp SA;\ SC\perp SB\Rightarrow SC\perp(SAB)$

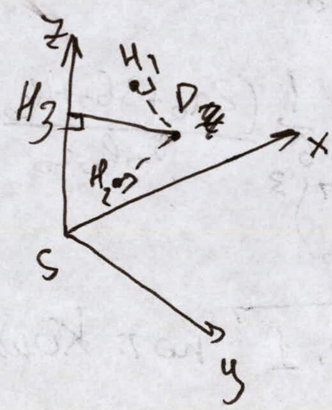
$SA\perp SB\Rightarrow S_{SAB}=\frac{1}{2}\cdot SA\cdot SB$

$\Downarrow$

$V_{SABC}=\frac{1}{6}\cdot SA\cdot SB\cdot SC=\frac{1}{6abc}$

Рассмотрим точку D, докажем, что расстояние от точки до ~~оси~~ одной оси координат - сумма ~~квадратов расстояний~~ корень из суммы квадратов двух других координат:

~~$\rho(D;(OY))=\sqrt{x^2+z^2}$~~ на примере $\rho(D;OZ)=\sqrt{x^2+y^2}$



H_3: $DH_3\perp OZ$; $H_3\in OZ$

H_1: $DH_1\perp(OXZ)$; $H_1\in(OXZ)$

H_2: $DH_2\perp(OYZ)$; $H_2\in(OYZ)$

$DH_1\perp(OXZ)$; $OY\perp(OXZ)\Rightarrow$

$\Rightarrow DH_1\parallel OY$; Аналогично $DH_2\parallel OX\Rightarrow$

$\Rightarrow(DH_1H_2)\parallel(OXY)\Rightarrow(DH_1H_2)\perp(OZ)$

$\Rightarrow DH_3\in(DH_1H_2)$. (От противного: если бы $(DH_1H_2)\times(OZ)=H_3'\Rightarrow DH_3'\perp OZ;\ DH_3\perp OZ$ - противоречие) $\Rightarrow$ т.к. $DH_1\parallel(OY)$; $DH_2\parallel(OX)\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теореме о раскрытой книге: $\boxed{\text{Продолж. на след. стран.!!!}}$

~~(OXZ)~~ $(OX)\in(OXZ)$; $DH_2\in(DH_1H_2)\Bigr\}\Rightarrow H_1H_3\parallel DH_2$;

аналогично $H_2H_3\parallel DH_1\Rightarrow$ т.к. $(OX)\perp(OY)$ $DH_1H_2H_3$ - прямоуг.

Чистовик №2. Продолжение

$\frac{3}{z_1}+\frac{3}{z_2}=1$

$z_1 \in \mathbb{Z}$; $z_2 \in \mathbb{Z}$; $z_1>3$; $z_2>7 \Rightarrow \frac{3}{z_2}<\frac{1}{2}$;

целые числа

$\frac{3}{z_2}<\frac{1}{2}$, т.к. $\frac{3}{z_1}+\frac{3}{z_1}=1 \Rightarrow \frac{3}{z_1}>\frac{1}{2} \Rightarrow z_1<6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=4 \\ z_1=5 \end{array}\right.$ $(z_1 \in \mathbb{Z}; z_1<6; z_1>3)$

При $z_1=4$ $\frac{3}{z_2}=\frac{1}{4} \Rightarrow z_2=12$

При $z_1=5$ $\frac{3}{z_2}=\frac{2}{5} \Rightarrow z_2=\frac{15}{2}\notin \mathbb{Z}$ –

$\Downarrow$

$z_1=4$ мин; $z_2=12$ мин.

Ответ: время между обгонами: 12 минут.

№5 верно

т.к. $SA\perp SB; SA\perp SC; SB\perp SC$

$\Downarrow$

$(SAB)\perp(SBC)$; $(SAB)\perp(SAC)$

$(SBC)\perp(SAC) \Rightarrow$ можно ввести координаты $x; y; z$

так, что $(SA)\equiv(Ox)$; $(SB)\equiv(Oy)$; $(SC)\equiv(Oz)$

! Далее (xyz) – плоскость через 3 точки $x; y; z$

Пусть плоскость (ABC) задаётся уравнением

$a_0x+b_0y+c_0z+d_0=0$; $d_0\neq 0$, т.к. точка $S(0;0;0)\notin(ABC)$

$\Rightarrow a=\frac{a_0}{d_0}$; $b=\frac{b_0}{d_0}$; $c=\frac{c_0}{d_0}$; $ax+by+cz=1$ – уравн. (ABC),

тогда т.к. $A\in(Ox) \Rightarrow$ для точки A: $ax_A+b\cdot 0+c\cdot 0=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_A=\frac{1}{a} \Rightarrow A(\frac{1}{a};0;0)$, аналогично $B(0;\frac{1}{b};0)$; $C(0;0;\frac{1}{c})$

Продолжение на следующ. странице

Чистовик №4 верно

$f(x)=[\log_3(\log_2 x)]^2 - 10\log_3([\log_2 x]) + 21\log_3(\log_2([x])) = 0$

~~Пусть $x \neq 2^n, n \in \mathbb{Z}$~~ ~~ОДЗ: $x \geq 0$; $x \geq 1$; $\log_2[x] > 0$~~

~~Тогда~~ ~~$[x] > 2$~~ ~~$[x] \geq 2$~~

~~$[x] \geq 2 \Rightarrow x \geq 2$~~

$[x] \neq 0$; $[x] \neq 1$ $(\log_2[x] \neq 0) \Rightarrow [x] \geq 2$

$[x] > 0$

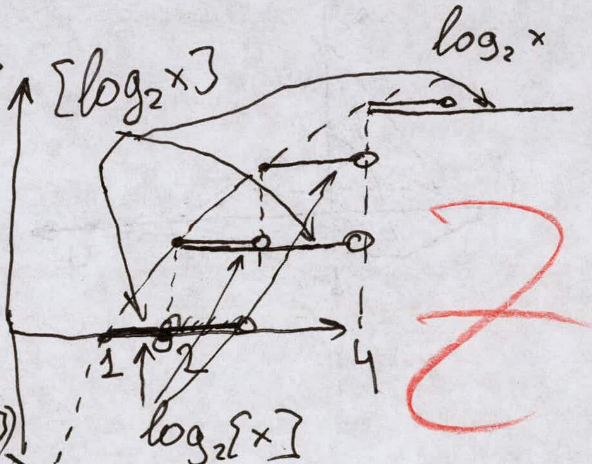
$[x] \geq 2 \Rightarrow \log_2[x] \geq 1 \Rightarrow \log_3(\log_2[x]) \geq 0$

$\log_3(\log_2[x]) \vee \log_3([\log_2 x])$; $\log_3$ - мон. возр.

$\Updownarrow$

$\log_2[x] \vee [\log_2 x]$

Рассмотрим графики:



$\Downarrow$

$\log_2[x] \geq [\log_2[x]]$

$\Downarrow$

$21\log_3(\log_2([x])) - 10\log_3([\log_2 x]) \geq 0$

равенство нулю при $\log_3(\log_2[x])=0$; $\log_3[\log_2 x]=0$

$[\log_3(\log_2 x)]^2 \geq 0 \Rightarrow f(x)=0$ только при

$[\log_3(\log_2 x)]^2=0 \wedge \log_3(\log_2[x])=0 \wedge \log_3([\log_2 x])=0$

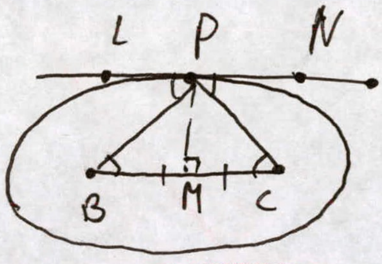
$\log_2 x \in [1;3)$ $\qquad \log_2[x]=1$ $\qquad [\log_2 x]=1$

$x \in [2;8)$ $\qquad [x]=2$ $\qquad \log_2 x \in [1;2)$

$x \in [2;3)$ $\qquad x \in [2;4)$

Ответ: $x \in [2;3)$.

чистовик №3. Продолжение



P – точка касания

При этом по св. эллипса

$\angle BPL = \angle CPN$;

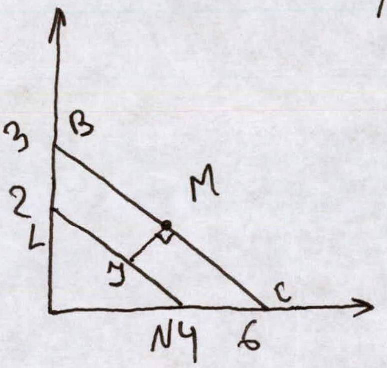
т.к. $LN \parallel BC \Rightarrow \angle PBC = \angle PCB \Rightarrow$

$\Rightarrow PB = PC \Rightarrow P \in$ сер. пер. BC

$BC = y = -\frac{1}{2}x + 3$; $M(3; 1,5)$

сер. пер. к BC: $y = 2(x-3) + 1,5 =$

$= 2x - 4,5$



LN: $y = -\frac{1}{2}x + 2$

LN × сер. пер.: $2x - 4,5 = -\frac{1}{2}x + 2$

$4x - 9 = -x + 4$

$5x = 13$

$\begin{cases} x = \frac{13}{5} = 2,6 \\ y = 0,7 \end{cases}$

$J(2,6; 0,7)$

$MJ = \sqrt{(3-2,6)^2 + (1,5-0,7)^2} = \sqrt{0,16 + 0,64} = \sqrt{0,8} =$

$= \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0,4\sqrt{5}$

Ответ: $0,4\sqrt{5}$.

найдено не то значение; задача ~~решена~~ не доведена до конца

Шифр

Чистовик №3

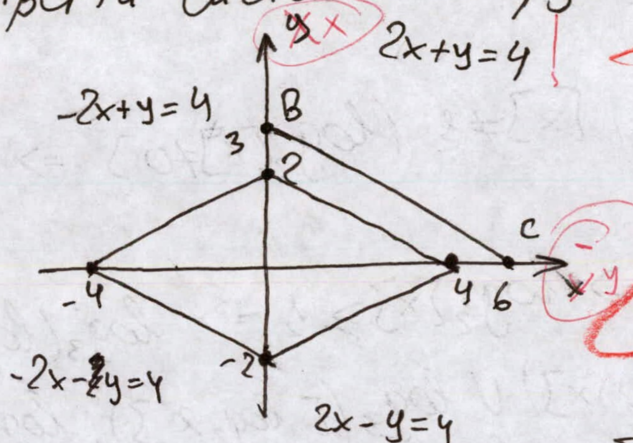
Рассмотрим точку $A(x;y)$

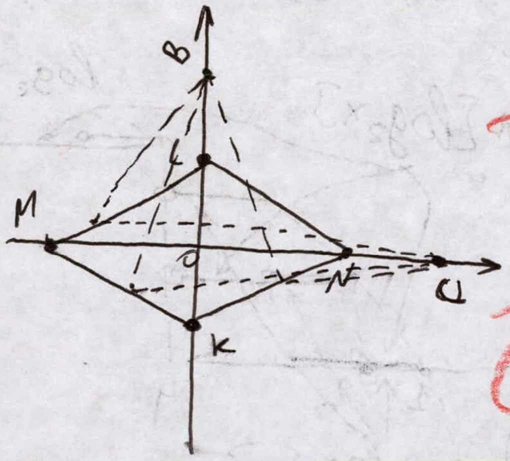
$\sqrt{(x-3)^2+y^2} = \rho(A;(3;0))$; $\sqrt{x^2+(y-6)^2} = \rho(A;(0;6))$

$\sqrt{(x-3)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y-6)^2} = \rho(A;(3;0)) + \rho(A;(0;6))$

Изобразим $2|x|+|y|=4$; раскрыв модули в каждой четверти системы координат

Пусть $B(3;0)$
$C(0;6)$





Пусть ромб: $MLNK$
любая точка ромба
T, $T \notin LN$
тогда ~~любо~~ или
$L \in \triangle TBC$
или $N \in \triangle TBC \Rightarrow$
$\Rightarrow TB+TC > LB+LC \Rightarrow$
$\Rightarrow$ можно рассматривать
на минимальность $AB+AC$ только точки $A \in [L;N]$

$\frac{LO}{ON} = \frac{BO}{OC} = \frac{1}{2} \Rightarrow LN \parallel BC$. Будем рассматривать геометрические места точек, сумма расстояний от которых до B и до C постоянна: это будут эллипсы с фокусами в B и C. Увеличивая эти суммы эллипс однажды ~~в первый~~ в первый раз коснётся LN. ~~т.к. $LN \parallel BC$~~. Пусть P-точка касания. Продолжение на след. странице

69-15-55-47
(181.5)

Черновик

$\frac{26}{19} \vee (\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2})$

$\sin x+\cos x = \sqrt{(\sin x+\cos x)^2} = \sqrt{1+\sin 2x}$

$\max = \sqrt{2}$

$\frac{26}{19} \vee \sqrt{2}$

$26 \vee 19\sqrt{2}$

$676 \vee 361 \cdot 2$

$676 \vee 722$

$169 \cdot 4$

$400+240+36 = 676$

19×19: 171, 19, 361

$\log_3(\log_2 x)) \in [0;1)$

$\log_2 x \in [1;3]$

$400+ \ldots = 361$

$(\sin x+\cos x)' = \cos x - \sin x > 0$

при $x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin x+\cos x$ - возр.

$\Rightarrow$ т.к. $\frac{\pi}{6} > \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6} > \sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}$

$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \vee \frac{26}{19}$

$19+19\sqrt{3} \vee 52$

$19\sqrt{3} \vee 33$

$361 \cdot 3 \vee 9 \cdot 121$

$361 \leq 363$

$\frac{S}{v_1} = 3$

$\frac{S}{v_2} = t_2$

$\frac{S}{v_1 - v_2} = t\ 7$

$\frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{t_2}} = t\ 7$

$\frac{3t_2}{t_2-3} = t_1$

$3t_2 = t_1 t_2 - 3t_1$

$\vdots 3$

$3(a+b) = ab$

$x^2 - t + 3t = 0$

$1 = \frac{3}{t_1} + \frac{3}{t_2}$

$\frac{3}{t_1} < \frac{3}{7}$, $\frac{3}{7} < 0{,}5 \Rightarrow$

$\frac{3}{t_2} > 0{,}5 \Rightarrow t_2 < 6$

$t_2 > 3 \Rightarrow$

$t_1 = 12$

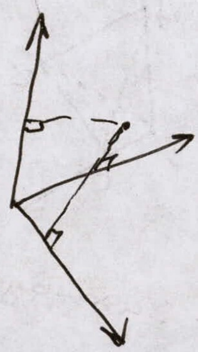
$t_2 = 4$: $1 = \frac{3}{t_1} + \frac{3}{4}$

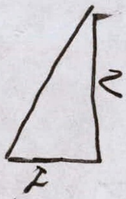
$t_2 = 5$: $1 = \frac{3}{t_1} + \frac{3}{5}$

$\frac{2}{5} = \frac{3}{t_1} \Rightarrow \frac{15}{2} = t_1\ \varnothing$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

черновик





$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4}$

$\frac{1}{h^2} = \frac{5}{4}$

$h^2 = 0,8$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!