68-47-34-52
(183.3)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 174

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы Горы

по математике

Тамадаряна Георгия Георгиевича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата «22» марта 201__ года

Подпись участника

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

68-47-34-52
(183.3)

65 (шестьдесят пять баллов)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

Черновик.

№1.

$\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2} \vee \frac{40}{29}$

$\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{1}{2}\right) \vee \frac{40}{29}$

$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) \vee \frac{40}{29}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) \vee \frac{40}{29\cdot\sqrt{2}}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) \vee \frac{40\cdot\sqrt{2}}{29\cdot 2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) \vee \frac{20\sqrt{2}}{29}$

~~Сравним~~ $\cancel{\sin\frac{\pi}{4}}$ ~~с~~ $\frac{20\sqrt{2}}{29}$

$\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \vee \cancel{\frac{40}{\frac{20\sqrt{2}}{29}}}$

$\cancel{1 \wedge \frac{40}{29}}$

$\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}$: Проверка для большего угла.

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) \vee \frac{20\sqrt{2}}{29}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$

$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} < \frac{20\sqrt{2}}{29}$

$\sqrt{3}+1 < \frac{80}{29}$

$\sqrt{3} < \frac{51}{29}$

$3 < \frac{2601}{841}$

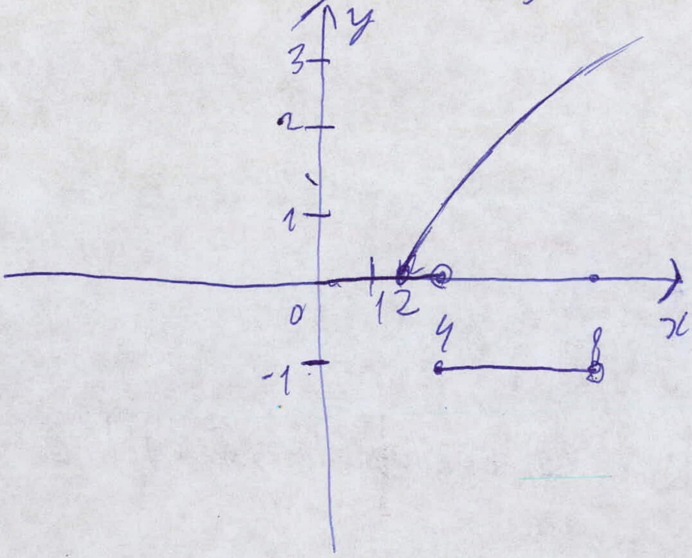
$3 < 3\frac{78}{841}$ $\Rightarrow$ Если для ~~меньш~~ синуса большего угла $\frac{40}{29}$ больше,

№4(2). Чистовик.

$20\log_3(\log_2([x])) - 12\log_3([\log_2 x]) = -([\log_3(\log_2 x)])^2$

Если $x \in \mathbb{Z}$ и у него два делителя: 1 и 2^n, то можно записать

$8\log_3(\log_2 x) = -([\log_3(\log_2 x)])^2$



$x = 2$

Если $x \notin \mathbb{Z}$, то

$\log_3(\log_2[x])^{20} - \log_3([\log_2 x])^{12} = -([\log_3(\log_2 x)])^2$

$\log_3\frac{(\log_2[x])^{20}}{[\log_2 x]^{12}} = -[\log_3(\log_2 x)]^2$

возр. ф. убыв. функция $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1 реш. $\Rightarrow x = 2$

Ответ: 2.

ответ неполный
не рассмотрели
другие точки
входящие в ОДЗ

№5(2) Чистовик.

$$\frac{3}{a}+\frac{4}{b}+\frac{2}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{6\cdot 4}{abc}}$$

$$1=\frac{3}{a}+\frac{4}{b}+\frac{2}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{4}{V}}$$

$$1\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{4}{V}}$$

$$1\geqslant 27\cdot\frac{4}{V}$$

$$V\geqslant 27\cdot 4$$

$$V\geqslant \underline{108}$$

Ответ: 108. верно

№4

$$[\log_3(\log_2 x)]^2-12\log_3([\log_2 x])+20\log_3(\log_2([x]))=0$$

~~$\log_3(\log_2([x]))$~~

1. $\log_2([x])>0$

$[x]>1$

$x\in[2;+\infty)$

2. $[\log_2 x]>0$

$x\in[2;+\infty)$

3. $\log_2 x>0$

$x\in(1;+\infty)\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ОДЗ: $x\in[2;+\infty)$

1) При $x=2$, равенство выполняется.

~~и у него два делителя это 1 и 2^n, то~~

~~2) Если $x\in\mathbb{Z}$, то можно записать~~

~~можн~~

№1(2)

Чистовик

то для синуса меньшего угла, он будет тем более больше.

это верно, хотя нигде не показано что на интересующем промежутке sin возрастает

Ответ: $\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}<\frac{40}{29}$

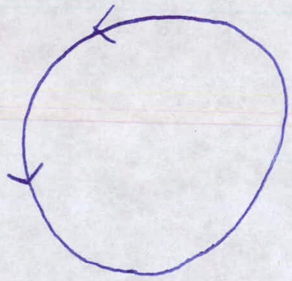
задача решена верно

№2.

	t	V	S
I авт	3	$\frac{S}{3}$	S
II авт	x	$\frac{S}{x}$	S

S – длина круга

x – время, за которое проходит круг медленный авт.



$x>3$

$x\in Z$

~~Пусть~~ Рассмотрим тот момент времени, когда быстрый авт. догнал медленного. Скажем, что обгон – начало ~~движения~~ двух автомобилей. Тогда быстрый автомобиль сделает круг и пройдет некоторое расстояние, а время обгона будет одинаковым. Это можно записать:

$t_{об}\cdot\frac{S}{x}=\frac{S}{3}\cdot t_{об}-S$, где $t_{об}$ – время обгона

$t_{об}\geq 8$

$t_{об}\left(\frac{S}{3}-\frac{S}{x}\right)=S$

$t_{об}=\frac{S}{\frac{S}{3}-\frac{S}{x}}=\frac{S\cdot 3x}{Sx-3S}=\frac{3x}{x-3}$

$\begin{cases}\frac{3x}{x-3}\geq 8\\ x\in Z\\ x>3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x\geq 8x-24\\ x>3\\ x\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}24\geq 5x\\ x>3\\ x\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq\frac{24}{5}\\ x>3\\ x\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cancel{x\in\{4;}\end{cases}$

68-47-34-52 (183.3)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

Чистовик

№2(2)

$$\Leftarrow \begin{cases} x \in \{1,2,3,4\} \\ x > 3 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x=4$; Проверка для tоб.

$t_{об} = \frac{12}{4-3} = 12$ – целое число

верно

Ответ: за 4 минуты

2

№3.

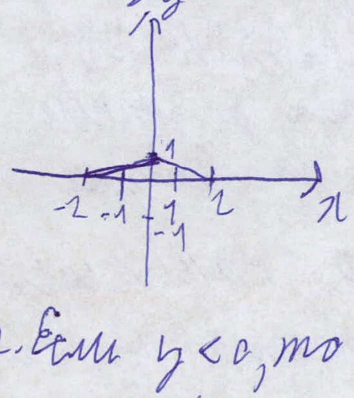
$$\begin{cases} \sqrt{(x+4)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+2)^2} - min \\ |x|+2|y|=2 \end{cases}$$

$|x|+2|y|=2$

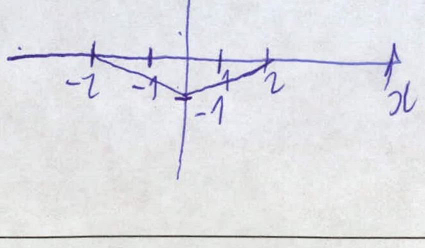
$2|y| = 2 - \frac{|x|}{2}$

$|y| = 1 - \frac{|x|}{2}$

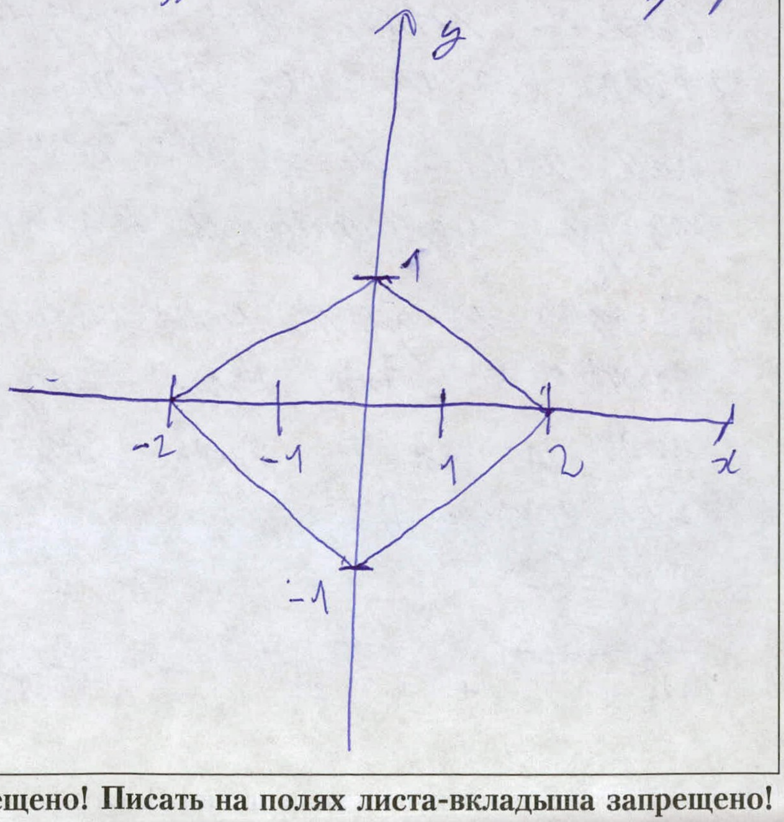
1. Если $y \geq 0$, то



2. Если $y<0$, то



3. Если совместить граф.



Чистовик

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2=13 \\ y_0^2+z_0^2=25 \\ x_0^2+z_0^2=20 \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2=29 \end{cases}$$

1. $z_0^2=29-13=16$

$z_0=4$

2. $x_0^2=29-25=4$

$x_0=2$

3. $y_0^2=29-20=9$

$y_0=3$

$D(2;3;4)$

Пусть $SA=a$; $SC=c$; $SB=b$.

$V_{пир.}=c\cdot\frac{ab}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{abc}{6}$

Точка D делит пирамиду SABC на три пирамиды:

1) DSBA
2) DSCA
3) DSBC

$V_{DSBA}=\frac{1}{3}\cdot2\cdot\frac{b\cdot a}{2}=\frac{ba}{3}$

$V_{DSCA}=\frac{1}{3}\cdot4\cdot\frac{c\cdot a}{2}=\frac{2ca}{\cancel{6}3}$

$V_{DSBC}=\frac{1}{3}\cdot3\cdot\frac{b\cdot c}{2}=\frac{bc}{2}$

$\frac{abc}{6}=\frac{bc}{2}+\frac{2ca}{3}+\frac{ba}{3}\quad|\cdot6$

$abc=3bc+4ca+2ba\quad|:abc$

$1=\frac{3}{a}+\frac{4}{b}+\frac{2}{c}$

$\frac{3}{a}+\frac{4}{b}+\frac{2}{c}\geqslant3\sqrt[3]{\frac{3\cdot4\cdot2}{abc}}$

№3(3) Чистовик.

Для точки C:

$C(x;y) = (0;-1)$

$\sqrt{4^2+(-1)^2} + \sqrt{0+(-1+2)^2} = \sqrt{17} + \cancel{1}\ 1$

Сравним:

$\sqrt{17}+1 \vee 2+2\sqrt{2}$

$\sqrt{17} \vee 1+2\sqrt{2}$

$17 \vee 1+8+4\sqrt{2}$

$8 \vee 4\sqrt{2}$

$64 \vee 32 \Rightarrow$

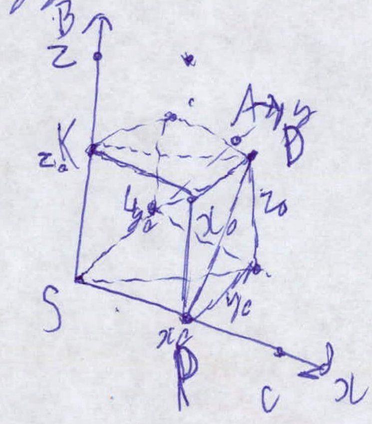
$\Rightarrow \cancel{EC+FC - min}\ 2+2\sqrt{2} = ED+DF - min$

Ответ: ~~$1+\sqrt{17}$~~ $2+2\sqrt{2}$

не верно — ответ получен при ошибочной гипотезе!

№5.

Введем Д.С.К., где начало координат будет точка S.



$KD = \sqrt{13}$

$DP = 5$ — по услов.

$DL = 2\sqrt{5}$

Отпустим из т. D высоты к плоскостям (SBC); (SBA); (SAC)

Образуется четырехугольная призма.

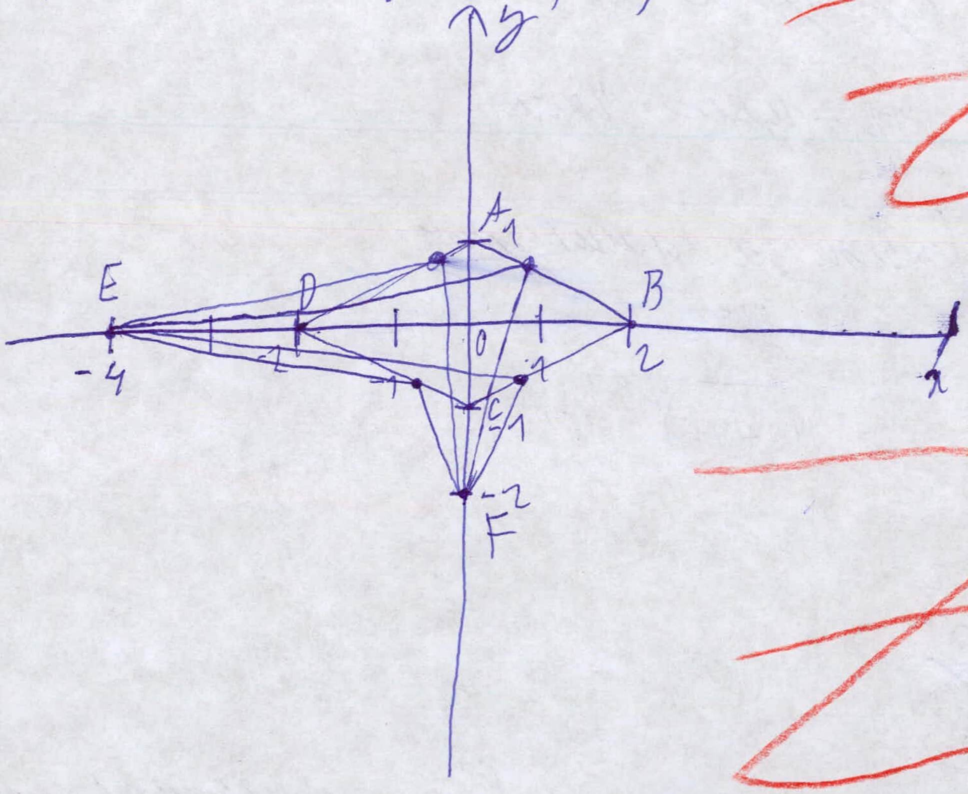
Пусть координаты т. D в данной системе равны $(x_0; y_0; z_0)$, тогда их можно записать:

$$\begin{cases} y_0^2 + x_0^2 = 13 \\ y_0^2 + z_0^2 = 25 \\ x_0^2 + z_0^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \frac{13+25+20}{2} = 29$$

№3(2) Чистовик.

$\sqrt{(x+4)^2+y^2}$ – это длина отрезка, где координаты одного его конца $(-4;0)$

$\sqrt{x^2+(y+2)^2}$ – это длина отрезка, где координаты одного его конца $(\cancel{2}\,0;-2)$



Второй конец двух отрезков будет одна общая точка. Она не будет лежать на A_1B; DA_1; CB, так как если бы она там лежала то заданные отрезки увеличивались в длинах, а на отрезке DC

до этого места верно

одна из длин принимает своё наименьшее значение. ~~Это будет~~ Второй точкой будет либо точка D, либо точка C.

Для точки D:

$D(x;y)=(-2;0)$

$\sqrt{(+2)^2+0}+\sqrt{(-2)^2+(2)^2}=2+2\sqrt{2}$

это утв не верно
∃ точка отрезка DC
где сумма длин
меньше, хотя
каждая длина
больше!

68-47-34-52 (183.3)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

Черновик

$\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}$ $\quad \frac{40}{29}$ $\quad 29\cdot 29 = 261 + 58 = 841$

$\cancel{1+2\sin\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{1}{2}}$ $\quad \frac{1600}{841}$

$\sin\frac{1}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)$ $\quad \frac{40}{29}$

$2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{1-\frac{\pi}{2}}{2}$

$2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$

$\sqrt{2}\cdot|\cos$

$\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}$ $\quad \frac{40}{29}$ $\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{2}\right)$ $\qquad 2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$

$\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$ $\quad \frac{40}{29}$ $\qquad 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\vee\frac{1600}{841}$

$\cos t$

$-\sin(1)$

$\sqrt{2} > \frac{40}{29}$ $\qquad 1600-841=759$

$2 > \frac{1600}{841}$

$2 > 1\frac{759}{841}$

$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\vee\frac{\cancel{1600}\ 800}{841}$

$-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\vee-\frac{41}{841}$

$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\vee\frac{41}{841}$

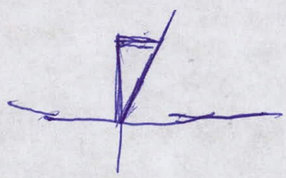
Черновик

$\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}$ $\frac{40}{29}$

$1 + 2\sin\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{1}{2}$ V $\frac{1600}{841}$

$$\begin{array}{r} 1600 \\ -841 \\ \hline 759 \end{array}$$

$\sin 1$ V $\frac{759}{841}$



$841 \sin 1$ V 759

$\sin\frac{\alpha}{2}$

$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$ $\frac{40}{29}$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$ $\frac{1600}{841}$

$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$ $\frac{800}{841}$

~~$1 - \cos^2 \frac{\pi}{}$~~

$\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$ $\frac{40}{29}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$ $\frac{40}{29\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{29}$

$\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)}{2}$ V $\frac{800}{841}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ > [illegible] $\frac{20}{29}$

$1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$ V $\frac{1600}{841}$

$1 > \frac{20}{29}$

$1 + \sin(1)$

$\sin 1$ V $\frac{759}{841}$

$\sin^2 1$ V 759

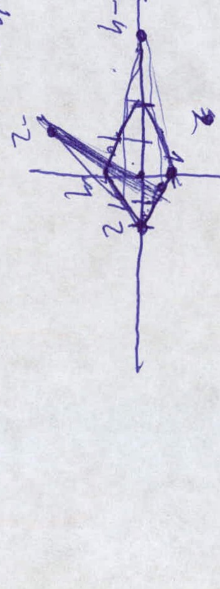
№3

$2|y| = 2 - |x|$

$|y| = 1 - \frac{|x|}{2}$

$x_0 = -4$ $y_0 = 0$

$\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$



$x = 2$ $y = 0$

$\sqrt{36+4} + \sqrt{4+4}$

$6 + 2\sqrt{2}$

$\sqrt{36+1} + \sqrt{9} = 3 + \sqrt{37}$

2

Черновик

$\sin\frac{\pi}{4}$ $\quad \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$ $\quad 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

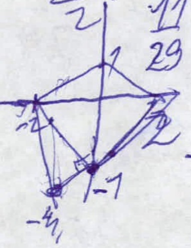
$\log_2 x > 0$ $\quad \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ $\quad \frac{11}{29}$ $\vee \sin\frac{1}{2}$

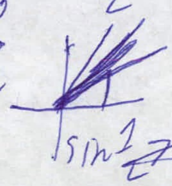
$\sin\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} < \frac{\pi}{6}$

$\log_2 x > \log_2 1$

3π $\quad SABC$

$x > 1$





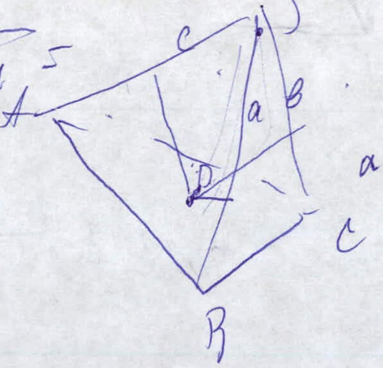
$\sin\frac{1}{2} \vee \sin\frac{\pi}{6}$

$x = -2$

$y = 0$

$2+\sqrt{4+4}$

$2+2\sqrt{2}$



$[t]^2 - 12[t] + 20 \cdot 9 = 0$

$a\cdot\frac{CB}{2}\cdot\frac{1}{3}$

$y = -1$

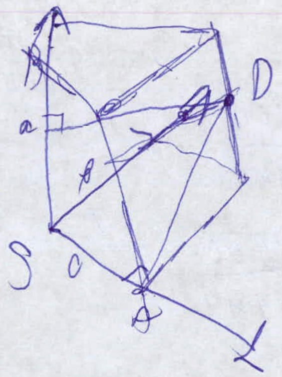
$x = 0$

$t^2 - 12t + 20\,9 = 0$

$\sqrt{16+1}+\sqrt{1}$

$\frac{D}{4} = 36 - 20\,9$

$\sqrt{17}+1$



$\sqrt{17}+\sqrt{1} \vee \sqrt{4}+\sqrt{8}$

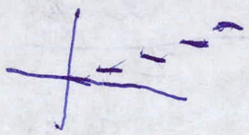
$2\sqrt{2}+2 \vee \sqrt{17}+1$

$2\sqrt{2}+1 \vee \sqrt{17}$

$8+1+4\sqrt{2} \vee 17$

$4\sqrt{2} \vee 8$

$32 \vee 64$



$\log_3(\log_2 x) > 4$

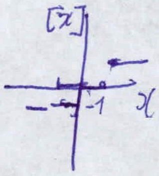
$\log_2 x > [illegible]$

$t^2 - 12t + 20\,t = 0$

$\log_3 \log_2 x = 4$

$\frac{D}{4} = 36 - 20 = 16$

$\log_2 x = 3^4$



$t = 6 \pm 4$

$t = 10$

$t = 2$

$x = 2^{34}$

$x = 2^{12}$

$\log_3 \log_2 [x] = 0$

$\log_2 [x] > 0$

$[x] > 1$

$x \in [2; +\infty)$

$\log_3 [\log_2 x]$ [illegible]

$[\log_2 x] > 0 \checkmark$

Шифр

Черновик.

I $S = 3$ мин

II $S - x$ мин

$x > 3$

$v_1 = \frac{S}{3}$

$v_2 = \frac{S}{x}$

№3

$$\begin{cases} \sqrt{(x+4)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+2)^2} \\ |x|+2|y| = 2 \end{cases}$$

$|x|+2|y|=2$

$2|y| = 2-|x|$

$|y| = 1 - \frac{|x|}{2}$

1. $y \geq 0$

$t \cdot \frac{S}{x} = t \cdot \frac{S}{3} - S$

$t\left(\frac{S}{x} - \frac{S}{3}\right) = S - S$

$t\left(\frac{S}{3} - \frac{S}{x}\right) = S$

$t = \frac{S}{\frac{S}{3} - \frac{S}{x}} = \frac{S}{\frac{Sx - S3}{3x}} =$

$= \frac{3x}{x-3}$

$\frac{3x}{x-3} > 8$

$3x > 8x - 24$

$24 > 5x$

$\frac{24}{5} > x$

$4 > x$

$\frac{2}{\sqrt{1}} \cdot \frac{2}{\sqrt{1}} + \frac{2}{\sqrt{1}} \cdot \frac{2}{\sqrt{1}}$

$y^2+z^2 = 25$

$x^2+y^2 = 13$

$z^2+x^2 = 20$

$y^2+z^2+x^2 = 29$

$[\log_3 2]$

$\log_3 \frac{1}{4}$