08-10-14-38
(181.5)

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 172

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы Горы

по математике

Терякова Филиппа Андриановича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«22» марта 2016 года

Подпись участника

08-10-14-38
(181.5)

65 (шестьдесят пять)

Чистовик.

№1.

Сравнить $\frac{26}{19} \vee \sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}$.

1) $\pi \approx 3{,}14 \Rightarrow \frac{\pi}{6} > \frac{1}{2}$.

Сравним $\frac{26}{19} \vee \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}$.

$$\frac{26}{19} \vee \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{52}{19} \vee 1 + \sqrt{3}$$

$$\frac{33}{19} \vee \sqrt{3}$$

$$33^2 \vee 3 \cdot 19^2$$

$$1089 \vee 1083$$

$$1089 > 1083$$

больше

$$\frac{26}{19} > \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}.$$

2) Пусть α такое, что $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} - \alpha$.

Сравним $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) \vee \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}$.

$$\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right) \vee \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha\right) \vee \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

Очевидно, что если $\alpha = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}$, то $\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha\right) \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а значит

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha\right) < \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2} < \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} < \frac{26}{19} \quad (\text{п. } 1.)$$

Ответ: $\frac{26}{19} > \sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}$.

Верно

Чистовик

№3

Продолжение.

Таким образом, нужно отразить $N(3;0)$ от прямой $OP: y=2x-4$ и найти MN', причем $M(0;-6)$.

Прямая $a: y=2x-6$ | $N \in a$. $a \parallel OP$ (угл. коэф. равны).

$$\rho(a;OP)=\rho(N;OP)=\frac{|0-6+4|}{\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$b: y=2x-2$. $$\rho(b;OP)=\frac{2}{\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\rho(a;OP)$$

Значит: $N' \in b$.

$N'N \perp OP \Rightarrow$ если прямая NN' задается $y=kx+b$, то

$$k=-\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+b \\ (3;0)\in NN' \end{cases} \Rightarrow 0=-\frac{1}{2}\cdot 3+b, \quad b=\frac{3}{2}$$

$$NN': y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.$$

$$NN' \cap b = N'(x;y) \quad \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ y=2x-2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{5} \\ y=\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$N'\left(\frac{7}{5};\frac{4}{5}\right).$$

Значит: $$\Big(\rho((0;-6);A)+\rho(3;0;A)\Big)\min=\rho\left((0;-6);\left(\frac{7}{5};\frac{4}{5}\right)\right)$$

$$\rho_{min}=\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}+6\right)^2}=\sqrt{\frac{49}{25}+\frac{34^2}{25}}=\sqrt{49+\underline{34^2}}\cdot\frac{1}{5}=\sqrt{\frac{\cancel{601}\ 241}{5}}$$

Арифметическая ошибка

Ответ: $\sqrt{\frac{\cancel{601}\ 241}{5}}$

Ответ ~~Не~~верный, но решение хорошее

Чистовик.
№3

Найти: $\min\left(\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+6)^2}\right)$.

при усл. $2|x|+|y|=4$.

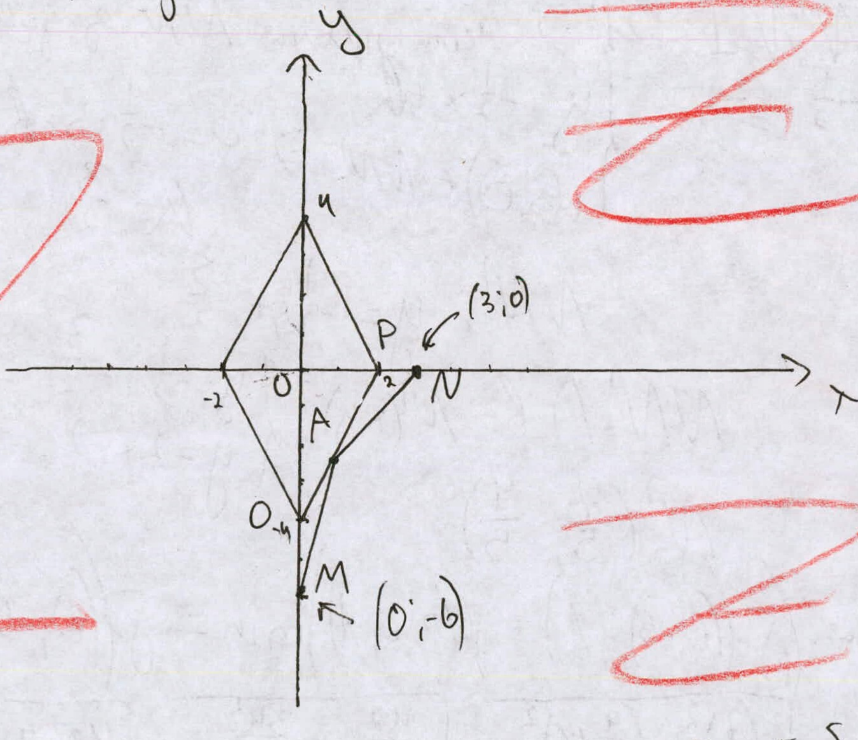
Пусть есть точка $A(x;y)$. Тогда

$\rho(A;(3;0))=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

$\rho(A;(0;-6))=\sqrt{x^2+(y+6)^2}$

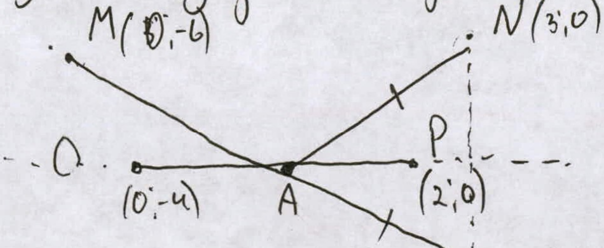
Значит нужно найти: $\min\left(\rho(A;(3;0)+\rho(0;-6)\right)$
причем $A\in$ графику $2|x|+|y|=4$.

Начертим $2|x|+|y|=4$.



Очевидно из графика, что сумма искомых расстояний будет минимальна, если A будет лежать на части графика, которая принадлежит IV коорд. четверти. $\Rightarrow$ $x>0$ $y<0$ $\to$ $A\in$ гр. $y=2x-4$.

Значит задача сводится к следующей:



$A\in OP$

$MA+AN=\min$ — ?

Отразим N от прямой OP. $N\to N'$

Тогда очевидно, что $MN'=\min(MA+AN)$

Чистовик
№2.

Пусть весь круг имеет длину S.

Пусть медленный водитель объезжает круг за k мин. Тогда $k>3$ мин. $v_{быстр}=\frac{S}{3}$; $v_{мед}=\frac{S}{k}$.

~~Ср~~ Скорость быстрого относительного медленного равна $v_б - v_м = \frac{S}{3}-\frac{S}{k}$. Тогда время обгона:

$\frac{S}{v_б - v_м}=\frac{S}{\frac{S}{3}-\frac{S}{k}}$. По условию:

$$\frac{S}{\frac{S}{3}-\frac{S}{k}}>7$$

$$\frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{k}}>7$$

$$* \ \frac{3k}{k-3}>7 \quad (k>3 \Rightarrow k-3>0)$$

$$3k>7k-21$$

$$4k<21$$

$$\left.\begin{cases} k<5\frac{1}{4} \\ k\in\mathbb{Z} \\ k>3 \end{cases}\right| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=5 \\ k=4. \end{array}\right.$$

Посчитаем T - время обгона $T=\frac{3k}{k-3}$ *.

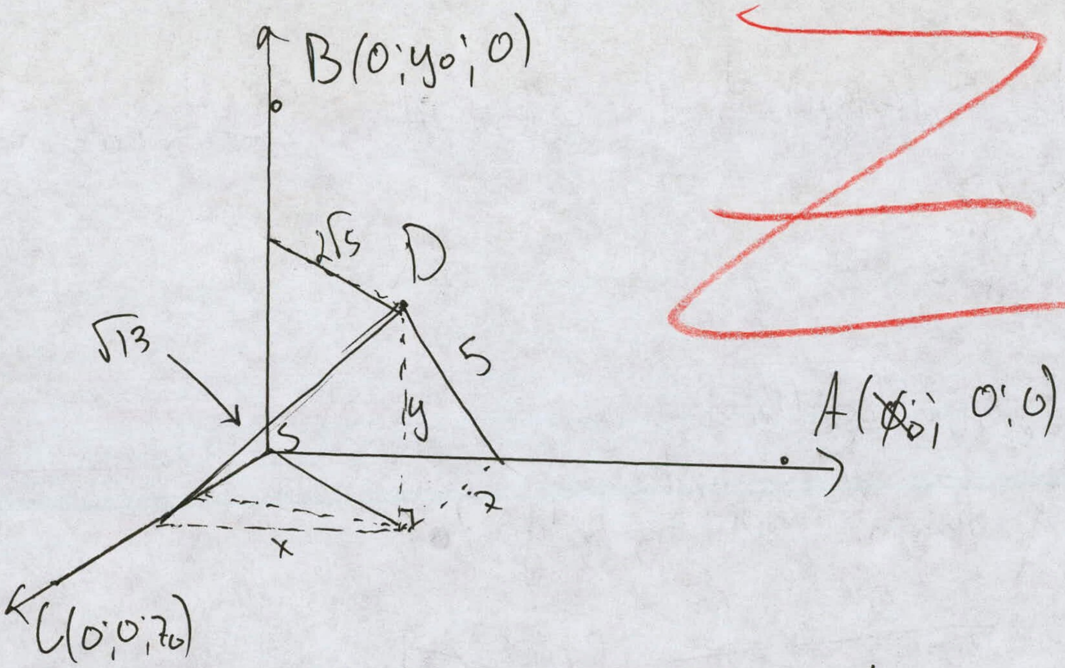
1. $k=4 \Rightarrow T=\frac{3\cdot 4}{1}=12$ мин. - целое, подходит.
2. $k=5 \Rightarrow T=\frac{3\cdot 5}{2}=7,5$ мин - не цело, не подх по условию.

Ответ: 12 мин.

Чистовик.

№5.

Пусть S - начало коорд. плоск.



Пусть $D(x;y;z)$ Тогда $x = \sqrt{13 - y^2}$
$z = \sqrt{25 - y^2}$
$x^2 + z^2 = (2\sqrt{5})^2$ $\Rightarrow$ $13 - y^2 + 25 - y^2 = 20$.
$y^2 = 9$
$y = 3$
$\Downarrow$
$x = 2$
$z = 4$.

Значит $D(2;3;4)$

Если $D \in (ABC)$ и $A(x_0;0;0)$ $B(0;y_0;0)$ $C(0;0;z_0)$ то перейдем в систему координат $(SA; SB; SC)$, значит

деление

$D(2/x_0; 3/y_0; 4/z_0)$ и по св. т.к. D лежит в плоскости концов задающих векторов базиса, координаты точки D в сумме дают $\underline{1}$.

Чистовик
№5

продолжение:

Значит: $2/x_0 + 3/y_0 + 4/z_0 = 1$.

$V = S_\triangle(SBA) \cdot \frac{1}{3} \cdot H = SB \cdot SA \cdot \frac{1}{3} \cdot SC = \frac{1}{3} x_0 y_0 z_0$.

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ y_0 > 0 \\ z_0 > 0 \\ 2/x_0 + 3/y_0 + 4/z_0 = 1 \\ \text{Найти: } \min\left(\frac{1}{3} x_0 y_0 z_0\right). \end{cases}$$

~~$x_0 = \frac{a}{2}$, $y_0 = \frac{b}{3}$, $z_0 = \frac{c}{4}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a,b,c>0 \\ \min \frac{1}{72} abc \end{cases}$~~

$\cancel{2x}$ $\frac{2}{x_0} + \frac{3}{y_0} + \frac{4}{z_0} = 1$.

Подругому задача сводится к такой.

Есть точка $D(2;3;4)$. Плоскость, проходящая через неё отсекает от Iой коорд. восьмушки тетраэдр. Найти его min объем.

Ур. этой плоскости:

$a(x-2) + b(y-3) + c(z-4) = 0$.

08-10-14-38
(181.5)

Черновик.

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

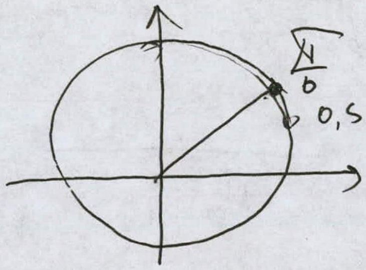
$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

$\frac{26}{19}$ $\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}$.

$\cancel{\sin\frac{1}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)}$ $\cancel{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)}$

$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$1\frac{7}{19}$ $0{,}5<\frac{\pi}{6}$.



$\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}=$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$.

$\frac{26}{19}=\frac{52}{38}$

$\frac{52}{38} > \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$

$\frac{33}{38} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{33}{19} > \sqrt{3}$

$33^2 > 3\cdot 19^2$

19×19: 171, 19, 361 $\times 3 = 1083$

33×33: 99, 99, 1089

$\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) \vee \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}-\alpha\right) \vee \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\left(\frac{5}{12}\pi-\alpha\right) \vee \sin\left(\frac{5}{12}\pi\right)$

$<$

Ответ: $\frac{26}{19}$.

$2a+3b+4z+d=0$.

№5. черновик

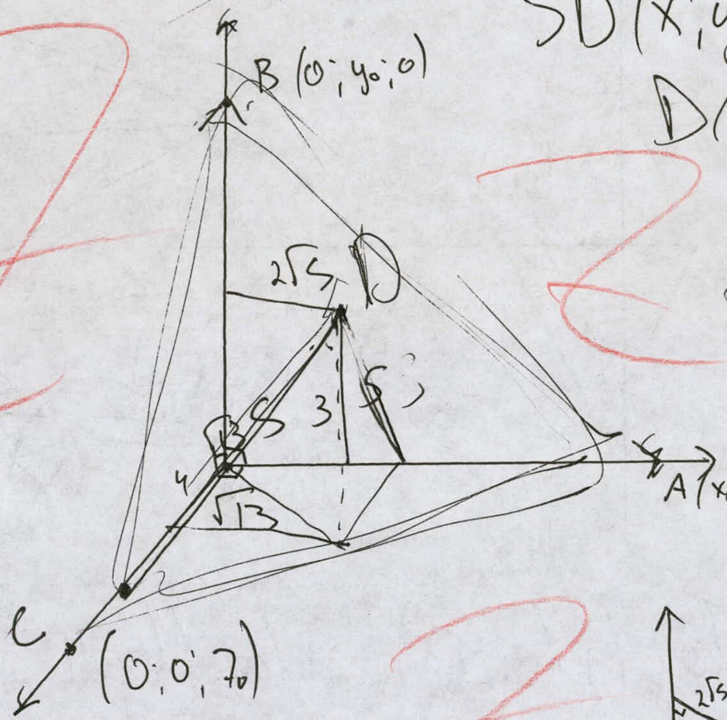
$SD(x;y;1-x-y)$.

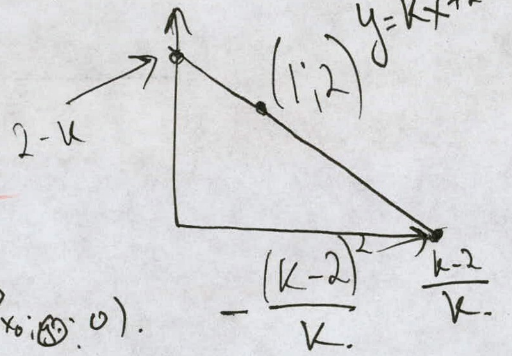
$D(2;3;4)$

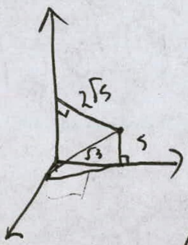
$2=k+b$

$b=2-k$

$y=kx+2-k$







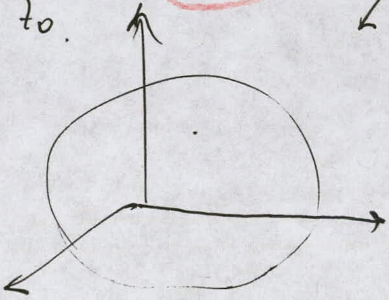
$D(2;3;4)$

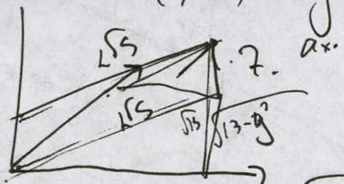
$2x_0+3y_0+4z_0=1$.

$ax+by+cz+d=0$.

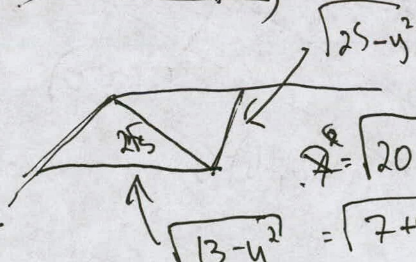
$a(x-2)+b(y-3)+c(z-4)=0$

$V=\frac{1}{3}x_0y_0z_0$.





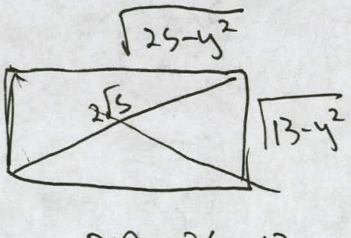
$D(\sqrt{y^2-5};y;\sqrt{y^2+7})$



$z=\sqrt{20-13+y^2}=\sqrt{7+y^2}$

~~$x_0\sqrt{y^2-5}+y_0y+z_0\sqrt{y^2+7}=1$~~.

$x=\sqrt{y^2-5}$.

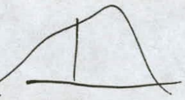


$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

min xyz.

$\frac{yz+xz+xy}{xyz}=1$.

$xyz=$



$20=25+13-2y^2$.

$y^2=9$

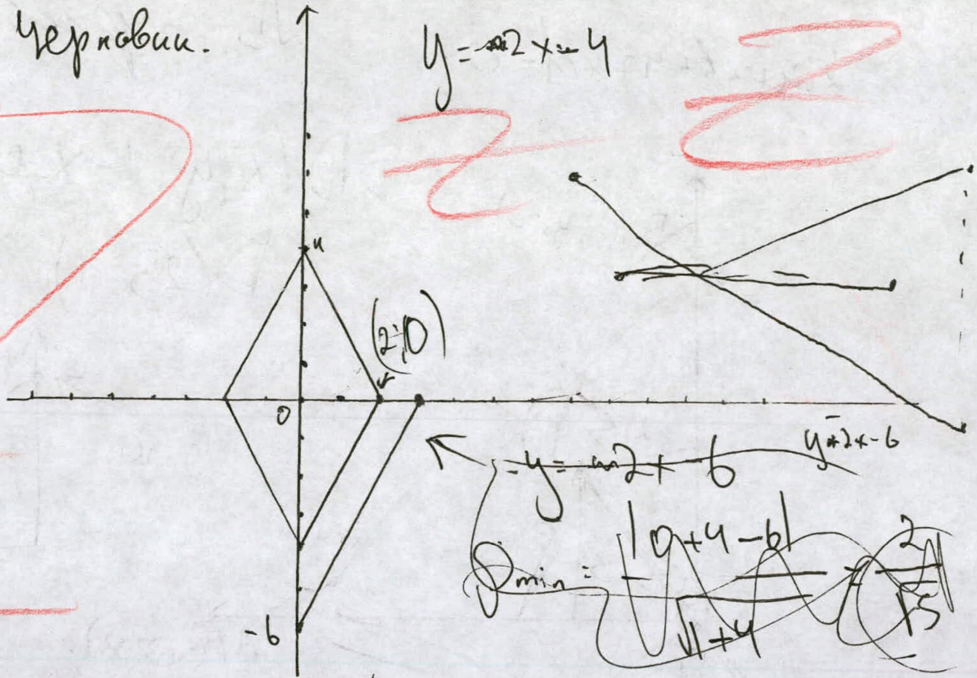
$y=3$.

$xyz=x(z+y)+yz$.

Черновик.

$\sqrt{(x-3)^2+}$

$y = 2x - 4$



$y = 2x - 6$

$y = 2x - 6$

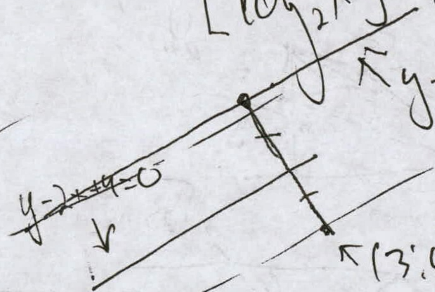
$\rho_{min} = \frac{|9+4-6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

№4.

$$\left[\log_3(\log_2 x)\right]^2 - 10\log_3([\log_2 x]) + 21\log_3(\log_2([x])) = 0$$

$x > 1$.

$[\log_2 x] = \log_2 x \quad 2 \Rightarrow x = 2^2$



$y - 2x + 2 = 0$

$y = 2x - 2$

$y - 2x + 4 = 0$

$(3;0)$

$y - 2x + 6 = 0$

$y = -\frac{1}{2}x + b$

$0 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + b$

$b = 1{,}5$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

$y = 2x - 2$.

$\frac{5}{2}x = \frac{3}{2} + 2$.

$5x = 3 + 4 = 7$.

$x = \frac{7}{5}$.

$y = \frac{4}{5}$.

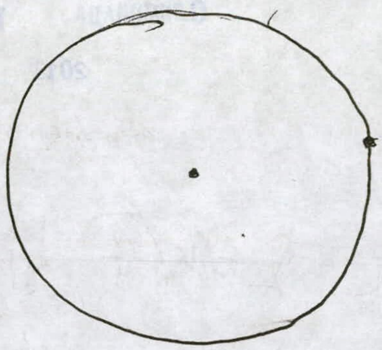
$\frac{4}{5} + 6 = \frac{4}{5} + \frac{30}{5} = \frac{34}{5}$.

$(7+34)^2 - 2 \cdot 7 \cdot 34 =$

$34 \times 34 = 136$

$1156 + 49 = \frac{1205}{25} = \sqrt{\frac{601}{5}}$

Черновик



$t_{min} = 3$ мин

$t_{max} = k$ мин

$$\frac{S}{\frac{S}{3} - \frac{S}{k}} > 7.$$

$$\frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{k}} > 7.$$

$$\frac{1}{\frac{k-3}{3k}}$$

$$\frac{3k}{k-3} > 7.$$

$3k > 7k - 21.$

$4k < 21$

$k < \frac{21}{4}.$

$k < 5\frac{1}{4}$

$k = 4$ $k = 5$

$$\frac{3k}{k-3} - 7 > 0$$

$$\frac{\quad}{7(k-3)}$$

$$t_{общ} = \frac{3k}{k-3}$$

$k = 4$

$t = \frac{12}{1} = 12$

$k = 5$

$t = \frac{15}{2} = 7{,}5 \cancel{<} 7.$

№3

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+6)^2}$$

$|y| = -2|x| + 4$

$y = -2x + 4.$