49-65-63-93
(176.1)

Олимпиада ЦВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Работа сдана 16^{00}

Вариант 9-1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьевы Горы!"

по математике

Романчева Игоря Дмитриевича

фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата

«20» марта 2016 года

Подпись участника

100 (сто)

49-65-63-93 (176.1)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

Чистовик

Задача №1

Пусть x-кол-во учеников. $\frac{1}{7}x$ - натуральное число, т.к это кол-во детей с золотыми медалями => $x \vdots 7$, Аналогично $x \vdots 4$. Также $x \leq 40$ (вместимость автобуса) Подходит только $x=28$ (7 и 4 - взаимно просты) 56 > 40. Значит всего - 28 участников. 4 - золото 7 - бронза и 7 - серебро. Медалистов в сумме - 18, Значит без медалей 10 ребят. Столько же надо тортов.

Ответ: 10

Задача решена

Задача №2

Пусть x_1 и x_2 - корни, тогда $x_1 \neq x_2$ и (различные)

$x_1^3 = 2015x_1 - 2016$

$x_2^3 = 2015x_2 - 2016$

$x_1^3 - x_2^3 = 2015(x_1 - x_2)$

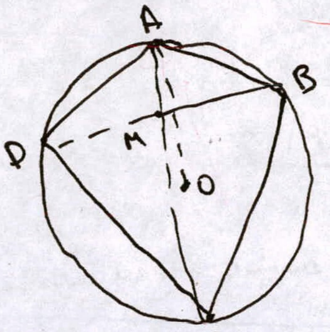
$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 2015(x_1 - x_2)$ $x_1 \neq x_2$ => можно сократить

$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 2015$ - всегда

Задача решена

Ответ: 2015

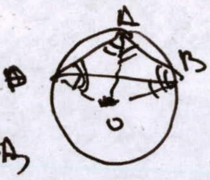
Задача №3



AM = 4

AB = 6

∂AB и AD равноудалены от т.O => AO – бисс угла DAB (св-во бис)



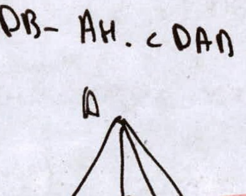
OD = OA = OB => ∠ODA = ∠OAD, ∠OAB = ∠OBA, ∠ODB = ∠OBD. ∠OAD = ∠OAB, т.к. AO – бис.

∠BDA = ∠ODA − ∠ODB = ∠OBA − ∠OBD = ∠DBA => ABD – равнобедренный

AB = AD = 6

По т. косинусов

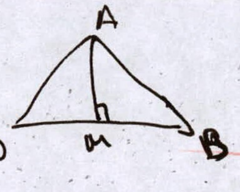
$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos\angle DAB$. => чем больше cos∠DAB, тем меньше BD. (∠DAB ∈ [0; π]) cos∠DAB растет с уменьшением ∠DAB. Уменьшая ∠DAB мы увеличиваем ∠ADB => увеличиваем высоту △ADB – AH. ∠DAB – мин, когда AH = AM. (В ост. случаях AM > AH)



Значит BD – мин, когда AM – высота

AM = 4

AB = AD = 6



$BD = 2\sqrt{36-16} = 4\sqrt{5}$ по т. Пифагора

Ответ: $4\sqrt{5}$

Задача решена

2

Задача №4

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1} \geq \sin\left(\arcsin\frac{x}{10}\right)-\frac{x}{10}$$

на О.Д.З. $\left|\frac{x}{10}\right| \leq 1$, $\sin\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{2} \neq 1$

1) $\sin\left(\arcsin\frac{x}{10}\right)=\frac{x}{10} \Rightarrow \frac{\sin\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{\pi x}{2}+1}{\sin\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{2}-1} \geq 0$

$$\frac{\left(\sin\frac{\pi x}{2}-\left(\cos\frac{\pi x}{2}-1\right)\right)\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{2}-1\right)}{\underbrace{\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{2}-1\right)^2}_{t,\ t\neq 0}} \geq 0$$

знаменатель $\neq 0 \Rightarrow$ умножим числитель и знаменатель

$$\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2}-\left(\cos\frac{\pi x}{2}-1\right)^2}{t} \geq 0$$

$$\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2}-\cos^2\frac{\pi x}{2}+2\cos\frac{\pi x}{2}-1}{t} \geq 0 \qquad \sin^2\frac{\pi x}{2}=1-\cos^2\frac{\pi x}{2}\ (\text{О.Т.Т.})$$

$$\frac{1-2\cos^2\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{2}-1}{t} \geq 0$$

$$\frac{\cos^2\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{\pi x}{2}}{t} \leq 0$$

$$\frac{\cos\frac{\pi x}{2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}-1\right)}{t} \leq 0 \Rightarrow \cos\frac{\pi x}{2} \in [0,1] \text{ и } t \neq 0$$

$$\frac{\pi x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right] \quad k \in \mathbb{Z}$$

$x \in [-1+4k;\ 1+4k]$ $\quad |x| \leq 10$ (О.Д.З.) и $t \neq 0$

Подходящие $x \in$ ~~(-3;1;5;7;9)~~ $- (\underbrace{-9;-8;-7}_{k=-2};\underbrace{-5;-4;-3}_{k=-1};\underbrace{-1;0;1}_{k=0};\underbrace{3;4;5}_{k=1})$

3

$2^{x-2} \cdot \log_2 x.$

При $x \in (1;2)$, оба мн-ля больше 0 и оба убывают отн. x, значит их произведение тоже убывает.

При $x \in (0;1]$ - произведение <0 и удовл. нужному неравенству. $(2^{x-2} > 0, \log_2 x < 0)$

~~После этого~~ При $x \geq 2$, оба мн-ля больше 0 и возрастают с x => произведение тоже возрастает и будет больше 1.

6

Ответ-12 Задача решена

Задача №5

$$\begin{cases} x^2+2y^2+2y(x-a)+a^2=0 & (1) \\ 2^{-2y}\cdot\log_2 x<1 & (2) \end{cases}$$ ОДЗ $x>0$

Будем решать ур-ние (1) как квадратное отн. y
Чтобы были решения, $D\geq 0$

$2y^2+2y(x-a)+x^2+a^2=0$

$D=b^2-4ac=4(x-a)^2-8(x^2+a^2)=4x^2+4a^2-8ax-8x^2-8a^2=$

$=-4(x^2+a^2+2ax)=-4(x+a)^2$ $\quad 4(x+a)^2\geq 0 \Rightarrow x=-a$, чтобы были решения. Заменим ~~a на~~ $-x$ в (1).

$x^2+2y^2+2y\cdot 2x+x^2=0$

$2(x^2+y^2+2yx)=0$

$2(x+y)^2=0$

$x=-y=-a$ – все решения такого вида

$2^{x-2}\log_2 x<1$

2^{x-2} и $\log_2 x$ – возраст. отн. x $(2>1)$. $2^{x-2}>0$ всегда, поэтому $2^{x-2}\cdot\log_2 x$ – возраст. отн. x. В т. $x=2$, $2^{x-2}\log_2 x=1$ при $x\in(0;2)$

Значит при $x>2$, $2^{x-2}\log_2 x>1$, при $x<2$, $2^{x-2}\log_2 x<1$, но ОДЗ $x\in(0;2) \Rightarrow a\in(-2;0) \Rightarrow y\in(-2;0)$. При других a решений нет.

Ответ: $a\in(-2;0)$, $x=-a$, $y=a$ $\quad$ См. след. стр.

Задача решена. $\quad$ 5

$t \neq 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\frac{\pi x}{2} \neq 1$

$\sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cancel{\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi m \quad m \in \mathbb{Z}}$

$\cancel{\frac{\pi x}{2} \neq \pi m}$

$\cancel{x \neq 2m \Rightarrow x\text{ - нечетное}}$

$$\begin{cases} \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} + 2\pi m \\ \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \frac{\pi x}{2} \neq 2\pi m \\ \frac{\pi x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4m \\ x \neq 1 + 4m \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Значит ~~из~~ среди из прошлых значений подходят только $-9, -5, -1, 3$

в сумме -12

Проверим $x = -9$

$$\frac{\sin(4{,}5\pi) - \cos(4{,}5\pi) + 1}{\sin(4{,}5\pi) + \cos(4{,}5\pi) - 1} = \frac{0}{-2} = 0 \text{ - удовл}$$

$x = -5$

$$\frac{\sin(-2{,}5\pi) - \cos(-2{,}5\pi) + 1}{\sin(-2{,}5\pi) - \cos(-2{,}5\pi) - 1} = \frac{0}{-2} \text{ - удовл}$$ аналогично

$x = -1$ и $3 \Rightarrow$

9

49-65-63-93
(176.1)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

Черновик

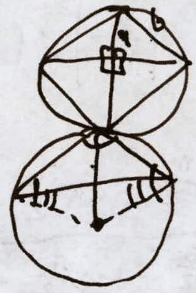
:7 28

ик

7 14 28 56

4-3 7-с 7-б

10



$x_1^2+x_1x_2+x_2^2$

$(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=$

$x^3-2015x+2016=0$

$=x_1^3+\cancel{x_1^2x_2}+\cancel{x_1x_2^2}-\cancel{x_1^2x_2}-\cancel{x_2^2x_1}-x_2^3=$

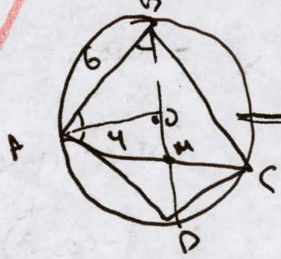
$x^3+1-2015x+2015$

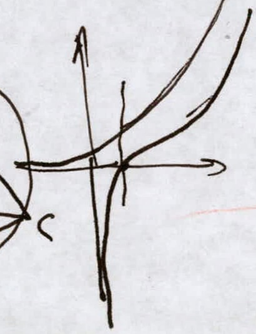
$2016=x(2015-x^2)$

$=x_1^3-x_2^3$

$x_1^3=2015x_1-2016$

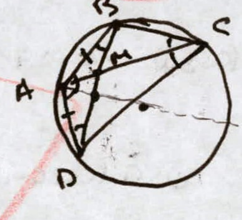
$x_2^3=2015x_2-2016$





$x_1^3-x_2^3=2015(x_1-x_2)$

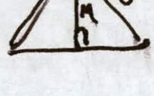
$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=2015$



$BD_{min}-?$

$AM=4$

$AB=6$



$\sqrt{36-16}=\sqrt{20}$ $\sqrt{20}=8\sqrt{5}$

Черновик

$2^{-(y+2)}\log_2 x < 1$

$\frac{\log_2 x}{2^{y+2}} < 1$

$\log_2 x < (2^{y+2} < 4 \cdot 2^y)$

$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) =$

$\frac{\pi x}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m$

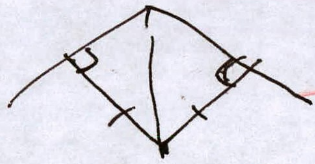
$x = 3\pi + 4\pi m$

$x^2 + 2y^2 + 2y(x-a) + a^2 = 0$

$2y(y+x-a) + x^2 + a^2 = 0$

$2y($

$2y(a-x-y) = x^2+a^2$



$2y^2 + 2y(x-a) + x^2 + a^2 = 0$

$D = 2(x-a)^2 - 4\cdot 2\cdot(x^2+a^2) = 4(x^2+a^2-2xa) - 8x^2 - 8a^2 =$

$= -8xa - 4x^2 - 4a^2 = -4(a^2+x^2+2ax) = -4(a+x)^2$

$\boxed{a = -x}$

$2y^2 + 2y\cdot 2x + x^2 + x^2 = 0$

$2y^2 + 4xy + 2x^2$

$2(y+x)^2 = 0$

$y = -x = a$

$2^{x-2}\log_2 x < 1$

$2^0 = 1$

$1 < 1$

$\boxed{\begin{matrix} x \geq 1 \\ a < -1 \\ y < -1 \end{matrix}}$

Черновик

$\sin(\arcsin\frac{x}{10}) - \frac{x}{10} = 0$

$\left|\frac{x}{10}\right| \leq 1$

$\sin^{\pi x} + \cos a x + 1$

$$\frac{\sin\frac{\pi x}{2} - \cos\frac{\pi x}{2} + 1}{\sin\frac{\pi x}{2} + \cos\frac{\pi x}{2} - 1} \geq 0$$

$$\frac{\sin\frac{\pi x}{2} - (\cos\frac{\pi x}{2} - 1)}{\sin\frac{\pi x}{2} + \cos\frac{\pi x}{2} - 1} = \frac{\sin\frac{\pi x}{2}^2 - (\cos\frac{\pi x}{2} - 1)^2}{(\quad)^2} =$$

$= (\sin a)^2 - (\cos a^2 - 2\cos a + 1) =$

$$= \frac{\sin a^2 - \cos a^2 + 2\cos a - 1}{(\ldots)} =$$

$= -\cos a$

$\sin a^2 - (1 - \sin a^2)$

$(1 - \cos a^2) - \cos a^2 + 2\cos a - 1 =$

$= -2(\cos a)^2 + 2\cos a$

$\cos a(\cos a - 1) \leq 0$

$\cos a \geq 0$

$\in [0; 1]$