98-94-29-45
(183.3)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 174

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы Горы

по математике

Савина Дмитрия Алексеевича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

выход $11^{40} - 11^{42}$

Дата
«22» марта 2016 года

Подпись участника

90 (девяносто баллов)

98-94-29-45 (183.3)

Олимпиада ПВГ 2016

80

Чистовик.

№1.

$\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2} \vee \frac{40}{29}.$

$\frac{1}{2} \approx \frac{\pi}{6}.$

$<$

$\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6} \vee \frac{40}{29}.$ $<$

$\frac{1+\sqrt{3}}{2} < \frac{40}{29}$

$\sqrt{3} < \frac{51}{29}$

$3 < \frac{2601}{841}$

Сравним $\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}$ и $\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}$ $>$

$2\sin\left(\frac{\pi-3}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi+3}{12}\right)-2\sin\left(\frac{\pi-3}{12}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi+3}{12}\right) \vee 0$ $>$

$\cos\left(\frac{\pi+3}{12}\right)-\sin\left(\frac{\pi+3}{12}\right)>0$

это верно ~~нало~~ обосновано

$\frac{\pi+3}{12}<\frac{\pi}{4}$, значит.

$\cos\left(\frac{\pi+3}{12}\right)>\sin\left(\frac{\pi+3}{12}\right)$

т.е. сменив в начале $\frac{1}{2}$ на $\frac{\pi}{6}$, мы увеличим исходное выражение, но оно осталось меньше, чем $\frac{40}{29}$, т.е. исходное тоже меньше $\frac{40}{29}$.

Ответ: $\left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)$

задача решена верно

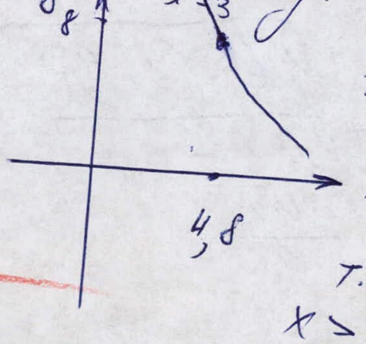
№2.

	V	S	t
1в	$\frac{1}{3}$	1	3
2в	$\frac{1}{x}$	1	x

$V_{отн}=\frac{1}{3}-\frac{1}{x}$

y - время обгона.

$\frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{x}}=y.$



$\frac{3x}{x-3}=y.$

$f'(x)=\frac{3(x-3)-3x}{(x-3)^2}=\frac{-9}{(x-3)^2}$

$f(x)\downarrow$ на ОДЗ.

$y=8$, при $x=4,8$.

т.е. $y>8$ при $x<4,8$.

т.к. по условию $x\in N$, ~~тогда~~ и $x>3$, тогда $x=4$.

Ответ: 4 мин.

верно

Черновик. №14.5 (продолжение)

~~$[\log_3(\log_2 x)]^2 - 12\log_3(\log_2 x)$~~

~~$+20\log_3(\log_2 x) \geq 0$~~

забыто 3

$f(l) = V_{пир} = \frac{16(l+3)^3}{3 \cdot l^2}$

$f'(l) = \frac{48(l+3)^2 \cdot l^2 - \cancel{48}^{32}(l+3)^3 l}{l^4} = 0.$

$48l^2(l^2+6l+9) - 32l(l^3+9l^2+27l+27) = 0.$

$48l^4 + \cancel{288l^3} + 432l^2 - 32l^4 - \cancel{288l^3} - 864l^2 - 864l = 0$

$16l^3 - 432l - 864 = 0.$

$8l^3 - 216l - 432 = 0.$

$4l^3 - 108l - 216 = 0.$

$2l^3 - 54l - 108 = 0.$

$l^3 - 27l - 54 = 0$

$l^3 - 27l - 54 = 0.$

l чуть меньше 6.

кубическое уравнение не решено

$V = \frac{16(l+3)^3}{3 l^2} = 324.$

не чуть меньше
а точно =

Ответ: 324. неверно из-за ошибки

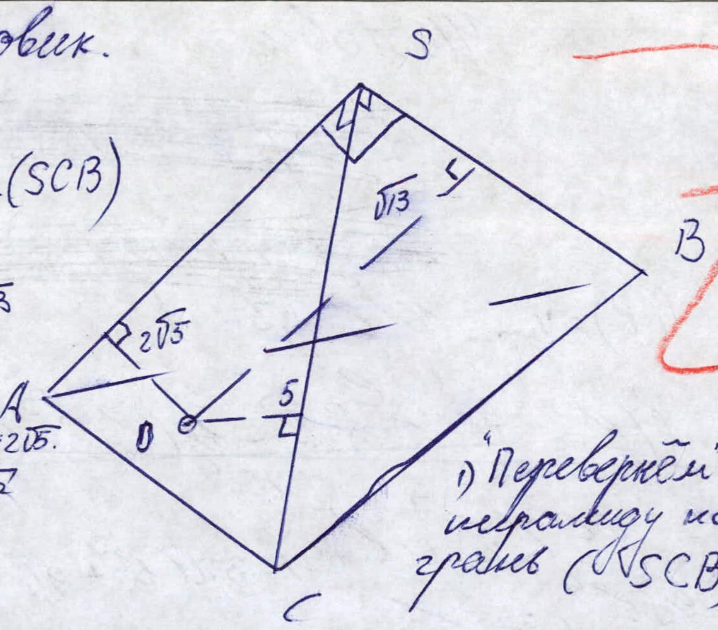
Ответ должен был получиться 324

с учетом ошибки $\frac{1}{3}$

получили бы верный ответ

Чистовик.

№5.



1) "Перевернём" пирамиду на грань ($\triangle SCB$).

2) т. D' - проекция т. D на (SCB)

Пусть $DD' = x$

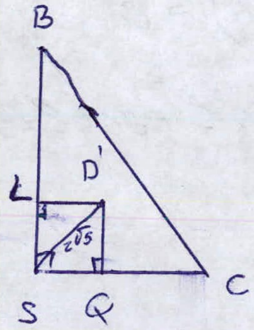
$LD = \rho(D; SB) = \sqrt{13}$

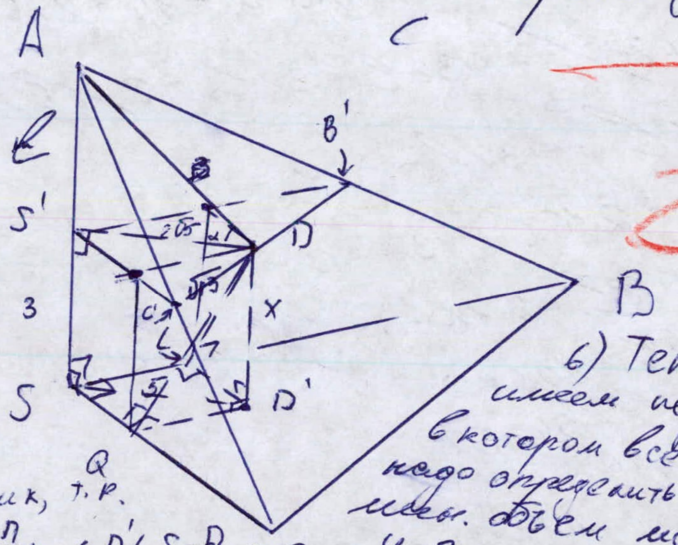
$QD = \rho(D; SC) = 5$

$S'D = SD' = \rho(D; AS) = 2\sqrt{5}$.

3) Тогда $QD' = \sqrt{25 - x^2}$

$LD' = \sqrt{13 - x^2}$





4) $SL = \sqrt{7 + x^2}$ из $\triangle LSD'$

5) т.к. $SLD'Q$ - прямоугольник, т.к. $\angle S = \frac{\pi}{2}$; $\angle D'QS = \frac{\pi}{2}$ и $\angle D'LS = \frac{\pi}{2}$, то $LS = D'Q$

$\sqrt{7 + x^2} = \sqrt{25 - x^2}$

$\Downarrow$

$x = 3$.

$D'L = 2$

$D'Q = 4$.

6) Теперь мы имеем параллелепипед, в котором все известно, надо определить какой мин. объем может быть у 3-уг. пирамиды, в которую он вписан.

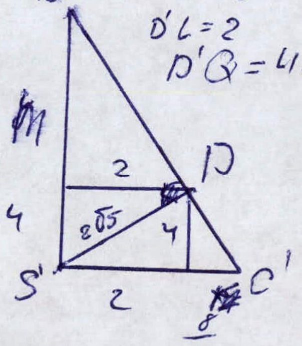
~~7) Наименьший объем будет тогда, когда D будет лежать на расстоянии от т. A до CB, т.е.~~

~~$S'D \perp C'B'$.~~

~~8)~~

~~$\frac{2\sqrt{5}}{2+x} = \frac{2}{4+y}$~~

~~$\frac{4}{4+y} = \frac{x}{2+x}$~~



7) Наименьшая площадь $S'C'B'$ при $m = 4$.

$S = (m+4) \cdot \left(2 + \frac{8}{m}\right) \cdot \frac{1}{2} = m + 8 + \frac{16}{m}$

$S' = 1 - \frac{16}{m^2} = 0$

$m = \pm 4$.

$+ \quad - \quad - \quad +$

$-4 \qquad 4 \qquad m$

8) Пусть $S'A = l$, тогда:

$V_{пир.} \left(\frac{l}{l+3}\right)^3 = \frac{16 l}{3}$.

$V_{пир.} = \frac{16(l+3)^3}{3l^2}$.

Чистовик

№3.

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+2)^2}$$

Это сумма расстояний ~~от точек~~ между точками

$A(-4;0)$

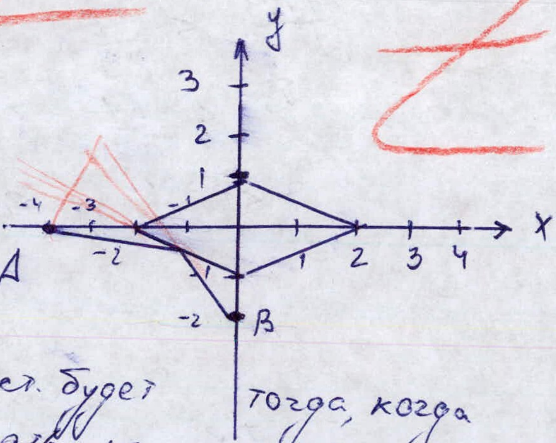
$B(0;-2)$

$C(x;y)$

$|x|+2|y|=2$

$|y|=1-\frac{|x|}{2}$

$y=1-\frac{x}{2}.$



Наименьшее расст. будет тогда, когда т. $C(x;y)$ будет лежать на прямой $y=-1-\frac{x}{2}$, где $x\in[-2;0]$,

тогда: $C\left(x;-1-\frac{x}{2}\right)$.

$$\min\left(\sqrt{(x+4)^2+\left(-1-\frac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{x^2+\left(1-\frac{x}{2}\right)^2}\right)$$, т.к. оба слагаемых положительны, то минимум достигается, когда они равны (из нер-ва Коши).

в общем случае утверждение не верно но в этом случае правильно необходимо строгое обоснование факта достижения min при равенстве корней!

$$(x+4)^2+\left(-1-\frac{x}{2}\right)^2=x^2+\left(1-\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\cancel{x^2}+8x+16+1+\cancel{\frac{x^2}{4}}+x=\cancel{x^2}+\cancel{1}-x+\cancel{\frac{x^2}{4}}$$

$$10x=-16$$

$$x=-\frac{8}{5}.\ \in[-2;0].$$

$$\sqrt{\left(-\frac{8}{5}+4\right)^2+\left(-1+\frac{4}{5}\right)^2}+\sqrt{\left(-\frac{8}{5}\right)^2+\left(1+\frac{4}{5}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{1}{25}}+\sqrt{\frac{64}{25}+\frac{81}{25}}=\frac{2\sqrt{145}}{5}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{145}}{5}.$

верно

не доказано отсутствие других точек минимума.

98-94-29-45
(183.3)

Чистовик

№4.

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

$[\log_3(\log_2 x)]^2 - 12\log_3([\log_2 x]) + 20\log_3(\log_2[x]) = 0.$

$x > 1.$

Пусть $\log_3(\log_2 x) = a.$

Первый член – целый, а 2 и 3 – могут быть иррац. и целыми. При чём они вместе относ. к одному множеству.

$a^2 + 8a = 0$

$a = 0 \quad a = -8.$

$\log_3([\log_2 x]) = 0 \quad \log_3(\log_2[x]) = -8$

$x \in [2;4).$

$\cancel{[x]} =$

$\log_2[x] = \frac{1}{3^8}$

$[\log_3(\log_2 x)] = 0$

$x \in [2;3).$

$[x] = 2^{\frac{1}{3^8}}$

$\emptyset.$

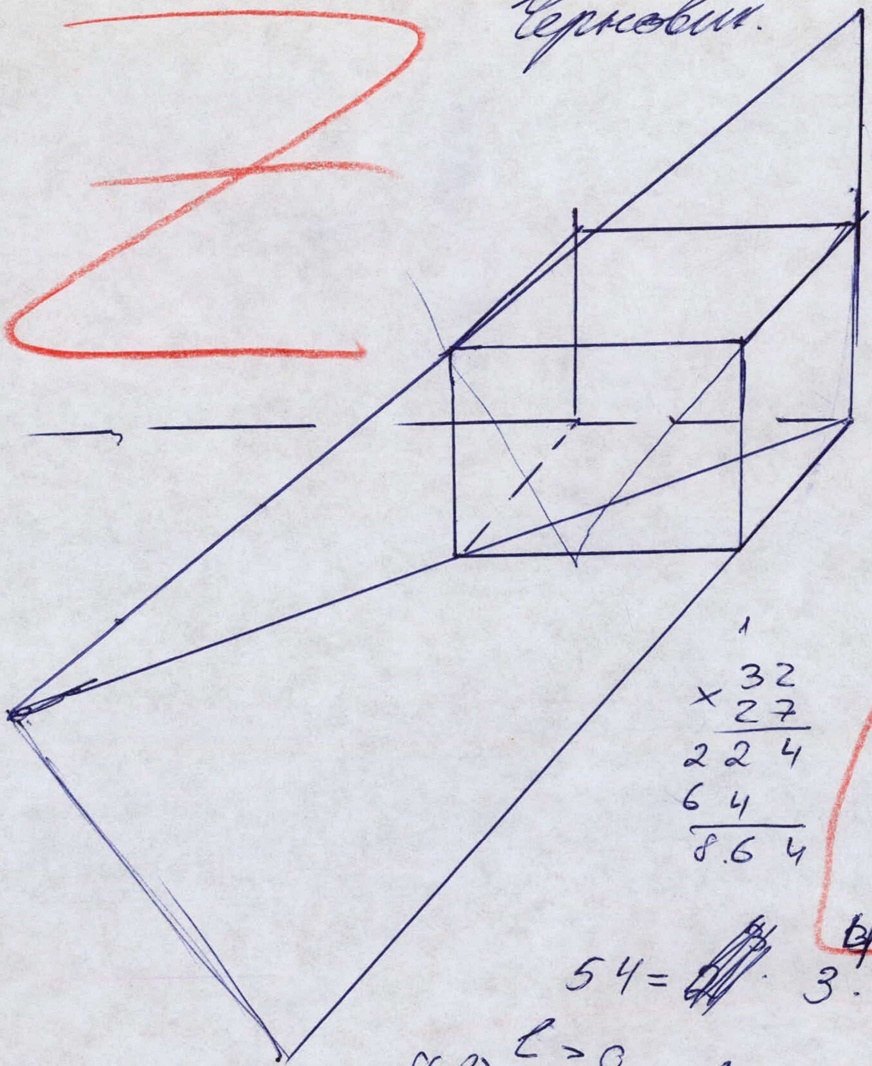
$\log_3(\log_2[x]) = 0$

$x \in [2;3).$

Ответ: $x \in [2;3).$

верно

Черновик.



$$\begin{array}{r} \times\ 32 \\ 27 \\ \hline 224 \\ 64 \\ \hline 864 \end{array}$$

$54 = \ldots 3 \cdot 2.$

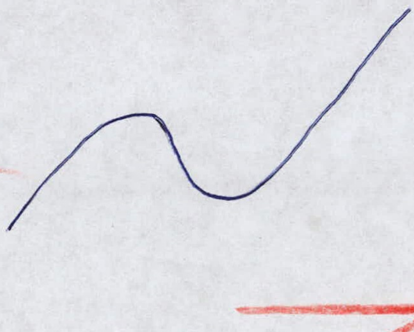
$l > 0$

$f(l) = l^3 - 27l - 54$

$f'(l) = 3l^2 - 27 = 3(l^2 - 9) = 0.$

$+ \quad -3 \quad - \quad 3 \quad + \qquad l$

$27 - 81 - 54 < 0$



98-94-29-45
(183.3)

Олимпиада ПВГ 2016

Черновик.

$\frac{1}{2} < \frac{\pi}{6}$

№1.

$\frac{1}{2} \approx \frac{\pi}{6}$ $\quad \sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2} \vee$ $\quad \frac{40}{29}$.

$\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}$

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \frac{40}{29}$

$\sin\frac{\pi}{6} - \sin\frac{1}{2} = 2\sin\left(\frac{\pi-3}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi+3}{12}\right)$ $\quad \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{1}{2} =$

$= -2\sin($

$\frac{255}{29}$

$51 \cdot 51 = 2601$, $\quad 29 \cdot 29 = 841$

$\sqrt{3}$ $\quad \frac{51}{29}$

$\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \vee \sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}$ $\quad 3 < \frac{2601}{841}$

$\boxed{841\cdot 3 = 2523}$

$2\sin\left(\frac{\pi-3}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi+3}{12}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi-3}{12}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi+3}{12}\right) \vee 0$

$\cancel{\sin\left(\frac{\pi-3}{12}\right)}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi+3}{12}\right) - \sin\left(\frac{\pi+3}{12}\right)\right) > 0$

№2.

	S	V	t
1в.	1	$\frac{1}{3}$	3
2в.	1	$\frac{1}{x}$	x

$x \in \mathbb{Z}$. $\quad x - ?$

$V_{отн.}\ \frac{1}{x} - \frac{1}{3}$

$V_{отн.}\ \frac{1}{8} - \frac{1}{x}$ $\quad y - 8.$

	S	V	t
1в.			
2в.	n		y

$y \in \mathbb{Z}$. $\quad y > 8.$

$\frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{x}} = y.$

$\frac{3x}{x-3} = y.$

$3x = xy - 3y$

$x(3-y) = -3y$

$x = \frac{3y}{y-3}.$

$3x = 8x - 24$

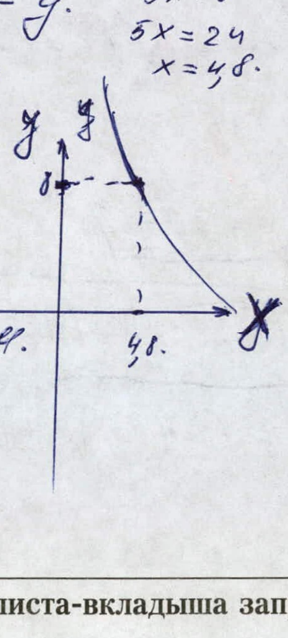
$5x = 24$

$x = 4{,}8.$

$f(y) = \frac{3y}{y-3}.$

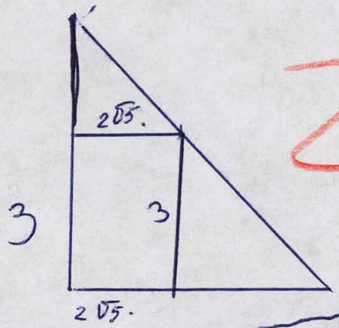
$f'(y) = \frac{3(y-3) - 3y}{(y-3)^2} = \frac{-3}{(y-3)^2} \downarrow.$

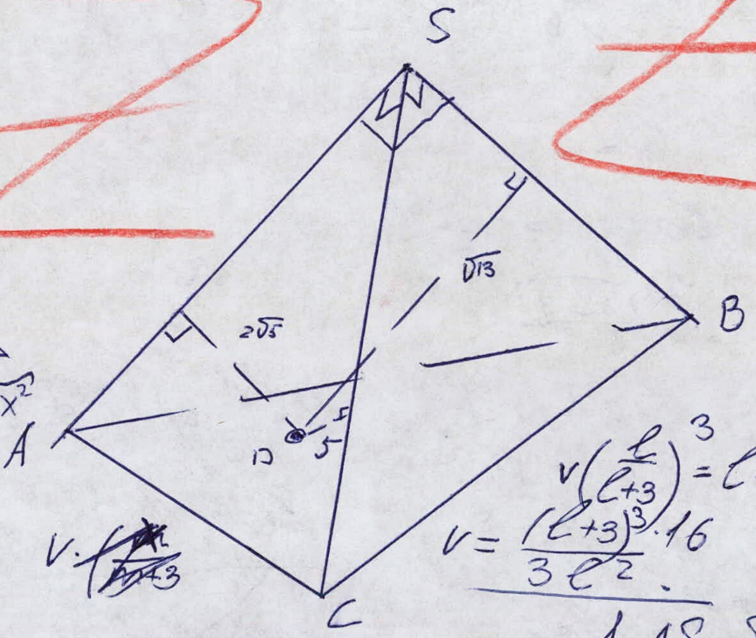
$f(8) = \frac{24}{5} = 4{,}8.$



Ответ: 4 мин.

Черновик. №5.





$\sqrt{7+x^2}=\sqrt{25-x^2}$

$7+x^2=25-x^2$

$2x^2=18$

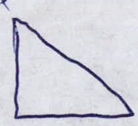
$x^2=9 \quad \underline{x=3}$

$\sqrt{20-13+x}$

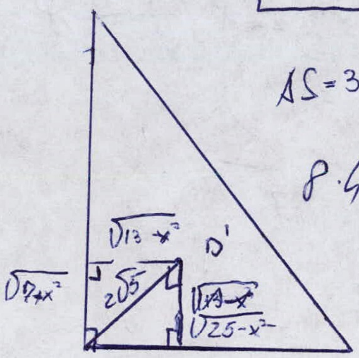
$V\left(\frac{\ell}{\ell+3}\right)^3=\ell\cdot\frac{16}{3}$

$V=\frac{(\ell+3)^3\cdot 16}{3\ell^2}$.

$V=\frac{1}{3}\cdot AS\cdot S_{SCB}$.

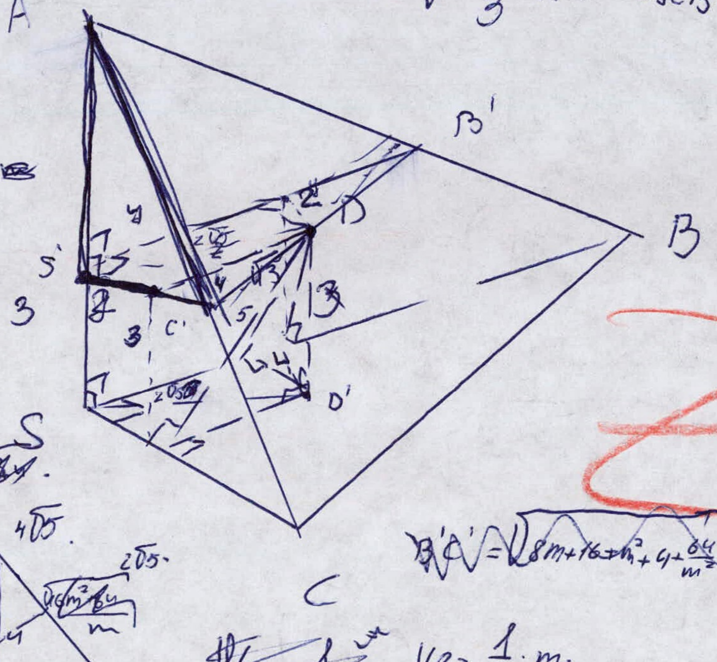


13



$AS=3+$

8·4



S

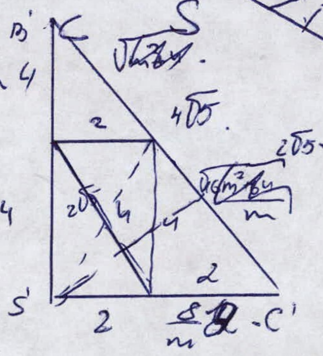
$\frac{m}{4+m}=\frac{2}{S'C'}$

$S'C'=\frac{8+2m}{m}=$

$=\frac{8}{m}+2$.

m 4

4



$B'C'=\sqrt{8m+16+m^2+4+\frac{64}{m^2}+\frac{32}{m}}=$

$\cancel{V}=\frac{1}{3}$

$V_B=\frac{1}{3}\cdot m$.

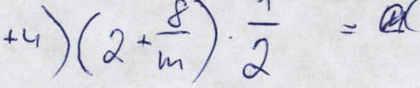
$\sqrt{16+\frac{64}{m^2}}=$

$(m+4)\left(2+\frac{8}{m}\right)\cdot\frac{1}{2}=(m+4)\left(1+\frac{4}{m}\right)=m+4+4+\frac{16}{m}=$

$f(m)=\qquad =m+8+\frac{16}{m}$.

$f'(m)=1-\frac{16}{m^2}=0$.

$\frac{m^2-16}{m^2}=0$



Черновик №4.

$$[\log_3(\log_2 x)]^2 - 12\log_3([\log_2 x]) + 20\log_3(\log_2[x])$$

a.

$x > 0$.

$\log_2 x > 0$.

$\boxed{x > 1}$

$a^2 + 8a = 0$

$a(a+8) = 0$

$a = 0 \quad a = -8$.

1) $\log_3([\log_2 x]) = 0$.

$[\log_2 x] = 1$.

$x \in [2; 4)$.

$\log_3(\log_2[x]) = 0$

$\log_2[x] = 1$.

$\boxed{x \in [2; 3)}$

$[\log_3(\log_2 x)]^2 = 0$

$\log_2(x) \in [1; 3)$.

$x \in [2; 8)$.

2) $\log_3(\log_2[x]) = -8$.

$\log_2[x] = \frac{1}{3^8}$

$\boxed{[x] = 2^{\frac{1}{3^8}}}$

2) $\log_3(\log_2[x]) = -8$.

$\log_2[x] = \frac{1}{3^8}$

W.

$[x] =$

Ответ: $x \in [2; 3)$.

№3.

Черновик: $\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+2)^2}$

$\cancel{A}(-4;0)$

$\frac{58}{10}$ $\frac{29}{5}$. $5\frac{8}{10}$

$B(0;-2)$.

$C(x;y)$

$|x|+2|y|=2$.

$27\cdot 6=$ $2|y|=2-|x|$

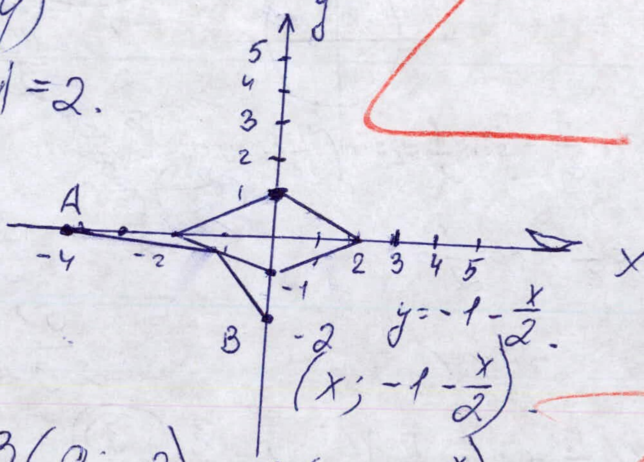
$162+54=206$

$|y|=1-\frac{|x|}{2}$

$6\cdot 36=$ $y=1-\frac{x}{2}$.

$\cancel{18}\ \cancel{196}$.

216



$y=-1-\frac{x}{2}$.

$(x;-1-\frac{x}{2})$.

$A(-4;0)$ $B(0;-2)$ $C(x;-1-\frac{x}{2})$.

$216-206=10$.

$\sqrt{(x+4)^2+(-1-\frac{x}{2})^2}+\sqrt{x^2+(1-\frac{x}{2})^2}=$

$2^{4^2}\ 3\ 64$

$=\sqrt{x^2+8x+16+1+\frac{x^2}{4}+x}+\sqrt{x^2+1-x+\frac{x^2}{4}}=$

$\frac{2}{7}\cdot\frac{9}{7}=$

$=\sqrt{\frac{5x^2}{4}+9x+17}+\sqrt{\frac{5x^2}{4}-x+1}$

$\cancel{D=81-5\cdot 17\cdot 4}$ $\cancel{D=1-5=4}$.

$\cancel{D=81}$

$x_{в_1}=-\frac{9}{5}\cdot 2=-\frac{18}{5}$ $x_{в_2}=\frac{1}{5}\cdot 2=\frac{2}{5}$.

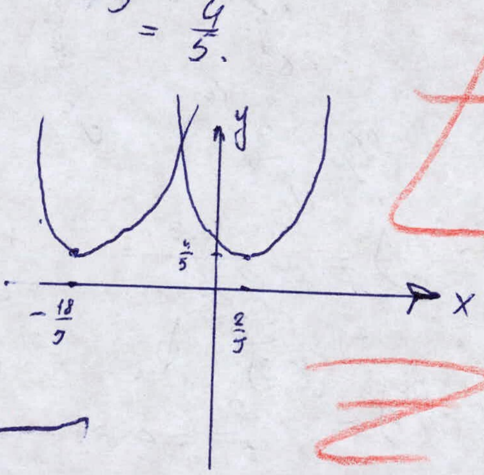
$81/162$

$\frac{5}{4}\cdot\frac{324}{25}-\frac{162}{5}+17=$ $\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{25}-\frac{2}{5}+1$

$=\frac{81}{5}-\frac{81}{5}+17=\frac{4}{5}$. $=\frac{4}{5}$.

$(x+4)^2+(-1-\frac{x}{2})^2=x^2+(1-\frac{x}{2})^2$

$\cancel{x^2}+8x+16+1+\cancel{\frac{x^2}{4}}+x=\cancel{x^2}+\cancel{\frac{x^2}{4}}-x+1$



$9x+17=-x+1$

$10x=-16$ $-\frac{8}{5}$

$\boxed{x=-\frac{16}{10}}$

$\sqrt{(-\frac{16}{10}+4)^2+(-1+\frac{8}{10})^2}+\sqrt{(}$

$\sqrt{(-\frac{8}{5}+4)^2+(-1+\frac{4}{5})^2}+\sqrt{(-\frac{8}{5})^2+(1+\frac{4}{5})^2}=\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{1}{25}}+\sqrt{\frac{64}{25}+\frac{81}{25}}=$

$=\cancel{\sqrt{}}\ \cancel{\sqrt{145}}\ \frac{\sqrt{145}}{5}+\frac{\sqrt{145}}{5}=$

$=\frac{2\sqrt{145}}{5}$.