06-32-36-53
(176.1)

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Выход $16^{14} - 16^{16}$

+1 лист: ~~16~~ 16:58

Вариант 4-1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьевы горы!"

по математике

Северина Никиты Николаевича

фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата

«20» марта 2016 года

Подпись участника

Сев

80 (восемьдесят)

06-32-36-53 (176.1)

~~чистовик~~ стр 1.

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

№1.

Пусть x - общее количество учеников, $x \in N$.
Тогда, по условию $x \leq 40$.
Кроме того, по условию, $\frac{1}{7}x$ ~~учеников~~ завоевали золотые медали, $\frac{1}{4}x$ - серебряные, $\frac{1}{4}x$ - бронзовые.
=> т.к. $\frac{1}{7}x$ - натуральное число, что $x \vdots 7$, а т.к. $\frac{1}{4}x$ - тоже натуральное, то $x \vdots 4$. => т.к. НОД$(4,7)=1$, $x \vdots 28$.
=> учитывая условие, что $x \leq 40$, получаем, что $x = 28$.
Тогда количество детей без медалей $= x - \frac{1}{7}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x =$
$= 28 - 4 - 7 - 7 = 10$. Значит нужно купить 10 тортов.
Ответ: 10. Задача решена

№2.

Т.к. x_1 и x_2 - корни данного уравнения, то:
$x_1^3 - 2015x_1 + 2016 = x_2^3 - 2015x_2 + 2016 = 0$.
$\Rightarrow x_1^3 - x_2^3 = 2015(x_1 - x_2)$
$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 2015(x_1 - x_2)$.
Т.к., по условию, $x_1 \neq x_2$, то $x_1 - x_2 \neq 0$ => мы можем обе части уравнения разделить на $x_1 - x_2$
$\Rightarrow x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 2015$.
Ответ: 2015. Задача решена

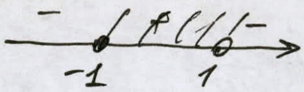
черновик

стр. 4

$$\frac{2t+2t^2}{-2t^2+2t} \geq 0$$

$$\frac{2t(t+1)}{2t(1-t)} \geq 0. \mid t \neq 0$$

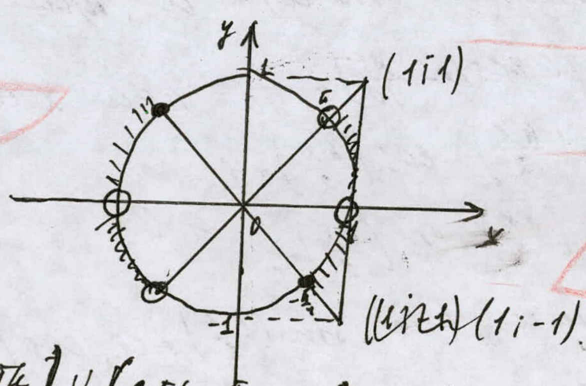
$$\Leftrightarrow \frac{t+1}{1-t} \geq 0$$



$\Rightarrow t \in [-1;1)$.

Вернемся к замене:

$$\begin{cases} tg\frac{\pi x}{4} \geq -1 \\ tg\frac{\pi x}{4} < 1. \end{cases}$$



$\Rightarrow \frac{\pi x}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k; 2\pi k\right) \cup \left(2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi k\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}+2\pi k; \pi+2\pi k\right) \cup$

$\cup \left(\pi+2\pi k; \frac{5\pi}{4}+2\pi k\right), k \in Z.$

1. $-\frac{\pi}{4}+2\pi k \leq \frac{\pi x}{4} < \frac{\pi}{4}+2\pi k$, $\frac{\pi x}{4} \neq 2\pi k$.

$-1+8k \leq x < 1+8k$, $x \neq 8k$.

Из условия про $|x| \leq 10$ и промежутка $[-7{,}5;5]$ следует, что:

$$\begin{cases} -1+8k \leq 5. \\ 1+8k > -10 \end{cases} \quad \begin{cases} 8k \leq 6 \\ 8k > -11 \end{cases} \quad \begin{cases} k \leq \frac{3}{4} \\ k > -\frac{11}{8} \end{cases}$$

$\Rightarrow k = -1$; $k = 0$.

$\Rightarrow -1-8 \leq x < 1-8$

$-9 \leq x < -7$, $x \neq -8$.

$\Rightarrow$ целые x: $x = -9$

$\to -1 \leq x < 1$, $x \neq 0$.

$\Rightarrow$ целые x: $x = -1$.

чистовик стр. 3.

Задача решена верно

$\Rightarrow \cancel{a} \in (-2;-1)$ – подходит.

Ответ: $a \in (-2;0) \Rightarrow \underline{x \in (0;2),\ y \in (-2;0),\ x = -y}$.

$\begin{cases} x \in (0;2) \\ \cancel{y \in (-2;0)} \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (0;2) \\ y \in (-2;0) \\ x = -y. \end{cases}$

– не является решением системы уравнений.

№4.

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1} \geq \sin\left(\arcsin\frac{x}{10}\right) - \frac{x}{10}.$$

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{x}{10} \in [-1;1] \Rightarrow x \in [-10;10]. \\ \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \neq 1 \end{cases}$

т.к. $\sin(\arcsin a) = a$, при $a \in$ ОДЗ, то

$\sin\left(\arcsin\frac{x}{10}\right) = \frac{x}{10}$, при $x \in$ ОДЗ.

$$\Rightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1} \geq 0.$$

Заметим, что $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \neq 0$, $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \neq 0$ – не уд. ОДЗ.

$\Rightarrow$ заменим:

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \Big| : \cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \frac{2\,tg\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{tg^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) + 1}$$

$$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \Big| : \cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \frac{1 - tg^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}.$$

Заменим: $tg\left(\frac{\pi x}{4}\right) = t$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2t}{t^2+1} - \frac{1-t^2}{t^2+1} + 1}{\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1-t^2}{t^2+1} - 1} \geq 0$$

т.к. $t^2+1 > 0$ при $t \in R$, то ~~разделим~~ умножим и ч-ль и зн-ль на t^2+1

$$\Rightarrow \frac{2t - 1 + t^2 + t^2 + 1}{2t + 1 - t^2 - t^2 - 1} \geq 0$$

чистовик. стр. 2. №5

$$\begin{cases} x^2+2y^2+2y(x-a)+a^2=0 \\ 2^{-2-y}\cdot \log_2 x < 1. \end{cases} \Rightarrow ОДЗ: x>0$$

Рассмотрим первое уравнение системы:

$x^2+2y^2+2y(x-a)+a^2=0$

$x^2+2xy+y^2+y^2-2ay+a^2=0$

$(x+y)^2+(y-a)^2=0.$

Заметим, что $(x+y)^2 \geq 0$, $(y-a)^2 \geq 0$.

$\Rightarrow$ уравнение будет иметь решения только, если:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y-a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ y=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ x=-a. \\ y=a \end{cases}$$ – это решение системы

из ОДЗ 2-го уравнения следует, что:

$$\begin{cases} x>0 \\ y<0 \\ a<0 \end{cases}$$

Подставим во 2-е ур-е $y=-x$:

$2^{x-2}\cdot \log_2 x < 1.$

~~$\Leftrightarrow 2^x \log_2 x$~~

Заметим, что при $x \geq 2$

$2^{x-2} \geq 1$, $\log_2 x \geq 1$ (т.к. ф-и $y=2^x$ и $y=\log_2 x$ – возрастающие).

$\Rightarrow$ при $x \geq 2$ – решений нет. $\Rightarrow a \leq -2$ – не подходит

Заметим, что при $x \leq 1$.

$2^{x-2} \geq 0$, $\log_2 x \leq 0 \Rightarrow 2^{x-2}\cdot \log_2 x \leq 0 < 1.$

$\Rightarrow x \leq 1$ – подходит. $\Rightarrow a \geq -1$ – подходит $\Rightarrow y \geq -1$

При $x \in (1;2)$:

$$\begin{cases} 2^{x-2} < 2^0 = 1 \\ \log_2 x < \log_2 2 < 1. \end{cases} \Rightarrow 2^{x-2}\cdot \log_2 x < 1$$

$\Rightarrow x \in (1;2)$ – подходит $\Rightarrow y \in (-2;1)$

чистовик стр. 5.

2. $\frac{3\pi}{4}+2\pi k \le \frac{\pi x}{4} \le \frac{5\pi}{4}+2\pi k$, $\frac{\pi x}{4} \ne \pi+2\pi k$

$3+8k \le x \le 5+8k$, $x \ne 8k+4$.

Из условия про $|x| \le 10$ и промежутка $[-7{,}5; 5]$ следует:

$\begin{cases} 3+8k \le 5 \\ 5+8k > -10 \end{cases}$ $\begin{cases} 8k \le 2 \\ 8k > -15 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} k \le \frac{1}{4} \\ k > -\frac{15}{8} \end{cases}$

$\Rightarrow k = -1$, $k = 0$

$\Rightarrow 3-8 \le x \le 5-8$, $x \ne -4$ $\qquad$ $3 \le x < 5$, $x \ne 4$.

$-5 \le x \le -3$, $x \ne -4$ $\qquad$ $\Rightarrow$ целые x: $x = 3$.

$\Rightarrow$ целые x: $x = -5$.

$\Rightarrow$ сумма всех целых $x = -9 - 1 - 5 + 3 = -12$.

Ответ: -12. Задача решена

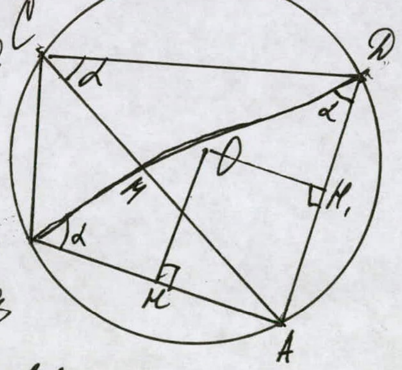
№ 3.

Дано:
$ABCD$ - впис. ч-к.
$AC \cap BD = M$
$AM = 4$, $AB = 6$
AB и AD - равноуд-ны от (.) O.

BD мин. - ?

Решение:

т.к. (.) O равноудалено от AB и AD, то высота $OH = OH_1$.
Рассмотрим $\triangle OAH$ и $\triangle AH_1O$ - прямоуг.: OA - общая сторона,



$OH = OH_1$ (из ранее док-го) $\Rightarrow \triangle OHA = \triangle AH_1O$ (по катету и гип-зе).
$\Rightarrow AH_1 = AH$.

Заметим, что $\triangle BOA$ - равнобедренный ($OB = OA$ как радиусы) $\Rightarrow AH = \frac{1}{2}AB = 3$. $\Rightarrow AH_1 = 3$.

Аналогично в $\triangle AOD$ - равнобедренном ($OA = OD$ как р-сы)
$AH_1 = \frac{1}{2}AD \Rightarrow AD = 2AH_1 = 6$.
$\Rightarrow AB = AD$.

$\Rightarrow \triangle ABD$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle ABD = \angle DBA$. Обозначим его за

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

2 — чистовик стр. 6.

$\angle DCA = \angle DBA$ (как впис. на одной дуге) $= \alpha$

$\angle ACB = \angle BDA$ (как впис. на одной дуге) $= \alpha$

Пусть $\angle C\overset{DB}{\cancel{BD}} = \beta$, тогда как впис. на одной дуге $\angle CAB = \beta$.

$\Rightarrow$ в $\triangle BCD$ $\angle CBD = 180 - 2\alpha - \beta$.

Ан-но $\angle CAD = 180 - 2\alpha - \beta$. в $\triangle ABD$

черновик

№1.

x — всего.

$x \leq 40$.

$\frac{1}{7}x$ — золото, $\frac{1}{4}x$ — серебро, $\frac{1}{4}x$ — бронза.

без медалей — $x - \frac{1}{7}x - \frac{1}{2}x = \frac{14-2-7}{14}x = \frac{5}{14}x$.

$x \vdots 7$, $x \vdots 4$. $\Rightarrow x \vdots 28$.

$\Rightarrow 28 = x$.

$\frac{5}{14} \cdot 28 = 10$ гостов. $\frac{1}{7} \cdot 28 = 4$, $\frac{1}{4} \cdot 28 = 7$.

$7 + 7 + 4 = 18 + 10 = 28$.

Ответ: 10 гостов.

№2.

$x^3 - 2015x + 2016 = 0$

~~$x = 1$ — подходит.~~

$x_1^3 - 2015x_1 + 2016 = 0$

~~$x_1^2(x_1^2 - 2015) = 2016$~~

$x_1^3 - 2015x_1 + 2016 = x_2^3 - 2015x_2 + 2016 = 0$

$x_1^3 - x_2^3 = 2015(x_1 - x_2)$

$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 2015(x_1 - x_2)$

$\Rightarrow x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \underline{2015}$.

~~$x_1^3 - 2015x_1 + a = x_2^3 - 2015x_2$~~

~~$x_1^3 - 2014x_1 - x_1 + 2016$~~

№5. черновик

$$\begin{cases} x^2+2yx+2y^2-2ya+a^2=0 \\ 2^{-2-y}\cdot\log_2 x<1. \end{cases}$$

$(x+y)^2+(y-a)^2=0$

$\geq 0 \quad \geq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} y=-x \\ y=a. \end{cases}$ ОДЗ: $x>0$ $\Rightarrow a<0$, $y<0$.

$2^{x-2}\cdot\log_2 x<1.$

$\log_2 x<\frac{1}{2^{x-2}}$

$x<2^{\frac{1}{2^{x-2}}}$

$2^{x-2}\cdot\log_2 x<1.$

~~x=1 подходит~~ $\Rightarrow a=-1.$

$x\geq 2$ - р-й нет.

$x\leq 1$ - подходит.

$\underbrace{2^x}_{<2}\underbrace{\log_2 x}_{<2}<4$

$x\in\cancel{(1;2)}$

$\log_2 x$

черновик

1. $\frac{\pi x}{2}$

$\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4} =$

$\frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \le \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le \frac{\pi x}{2} \le \pi + 2\pi k$

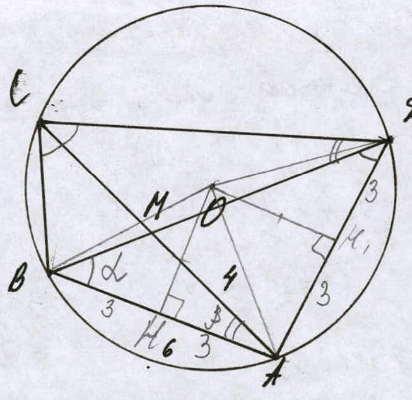
$1 + 4k \le x \le 2 + 4k$

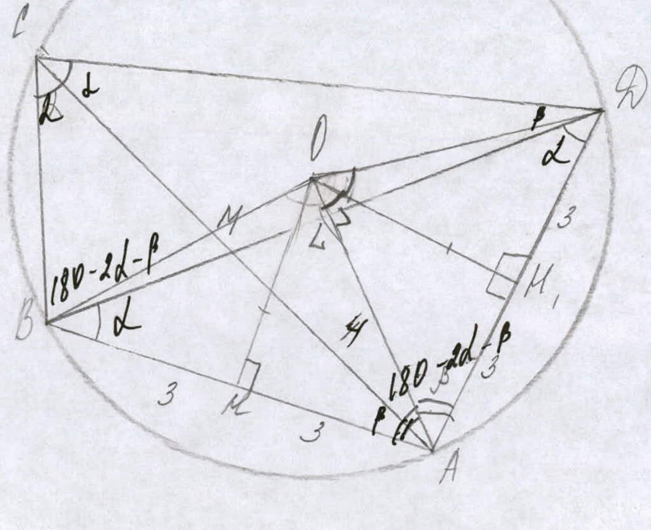
$\begin{cases} 1 + 4k \le 10 \\ 2 + 4k \ge -10 \end{cases}$ $\begin{cases} k \le \frac{9}{4} \\ k \ge -3 \end{cases}$ $k \in [-3; 2]$.

№3.

$BD = \sqrt{72 - 72\cos 2\alpha}$

$BD =$





$AM = 4$

$AB = AD = 6$

$\angle C = 2\alpha$

$\angle B + \angle D = 180 - 2\alpha$

$\angle DAB = 180 - 2\alpha$

$\Rightarrow \angle DAB = \angle B + \angle D$

$\Rightarrow \alpha = \beta$

$\Rightarrow \angle A = 90$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

черновик.

№ 4. $[-75;5]$

$|x| \leq 10.$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1} \geq \sin\left(\arcsin\frac{x}{10}\right) - \frac{x}{10}$$

ОДЗ: $\left|\frac{x}{10}\right| \leq 1.$

$|x| \leq 10$

$-10 \leq x \leq 10$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1} \geq 0?$$

$$\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 1}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 1} \geq 0$$

Р-м ур-е $\sin\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

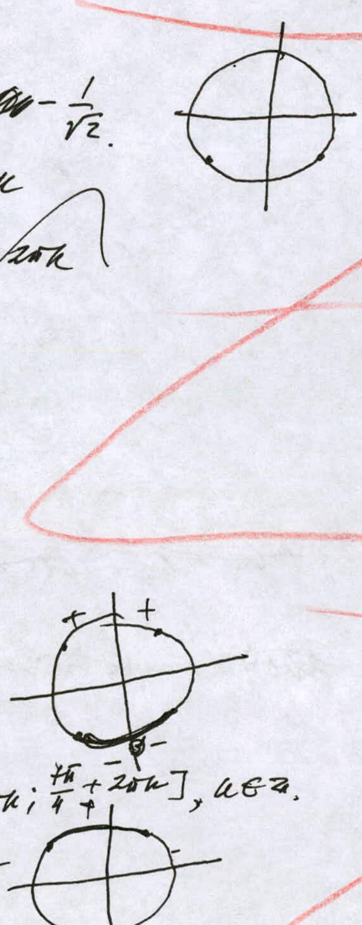
$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{array}\right.$

$\left[\frac{\pi x}{2} = 2\pi k\right.$

α

$$\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 1}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 1} \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{2}\sin\alpha + 1}{\sqrt{2}\cos\alpha - 1} \geq 0.$$



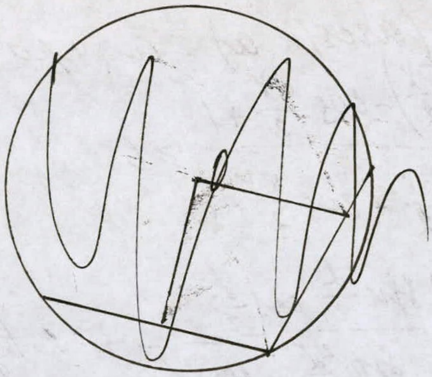
$\alpha \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}.$

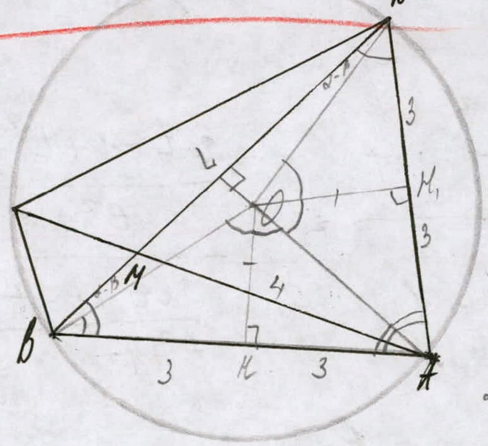
Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

06-32-36-53
(176.1)

черновик

№3.





$AH = 4$

$AB = 6 = AD$

$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$

$\alpha + \beta = 90^\circ$

$\alpha - \beta + \alpha - \beta + \gamma = 180^\circ$

$2\alpha - 2\beta + \gamma = 180^\circ$

$\gamma = 180 - 2\alpha - 2\beta$

$180 - 2\alpha - 2\beta + 4\alpha = 360^\circ$

$2\alpha - 2\beta = 180^\circ$

черновик

1. $\cancel{\frac{\pi}{4}}$ $\frac{\pi}{4}$ ...

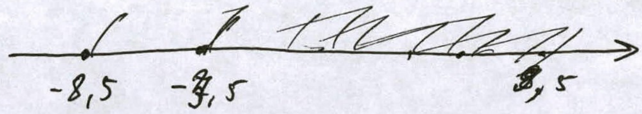
$-\frac{\pi}{4}+2\pi k \le \frac{\pi x}{2} \le \frac{\pi}{4}+2\pi k$

$\cancel{x \ne \pi k}$ $\frac{\pi x}{2} \ne \pi k$

$x \ne 2k.$

$-\frac{1}{2}+4k \le x \le \frac{1}{2}+4k$

$\begin{cases} -\frac{1}{2}+4k \le 10 \\ \frac{1}{2}+4k \ge -10 \end{cases}$ $\begin{cases} 4k \le \frac{21}{2} \\ 4k \ge -\frac{21}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} k \le \frac{21}{8} \\ k \ge -\frac{21}{8}. \end{cases}$ $k = -2, -1, 0, 1, 2.$



черновик №4.

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1} \geq \sin\left(\arcsin\frac{x}{10}\right)-\frac{x}{10}$$

ОДЗ: $\left|\frac{x}{10}\right| \leq 1. \Rightarrow -10 \leq x \leq 10.$

$\Leftrightarrow \sin(\arcsin a)=a$, при $a\in[-1;1]$.

$$\Rightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\cos\frac{\pi x}{2}+1}{\sin\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{2}-1} \geq 0$$

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\,tg\frac{\alpha}{2}}{tg^2\frac{\alpha}{2}+1}$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$\cancel{2\ 2tg}\frac{\alpha}{2}$

$$\frac{\frac{2t}{t^2+1}-\frac{1-t^2}{t^2+1}+1}{\frac{2t}{t^2+1}+\frac{1-t^2}{t^2+1}-1} = \frac{\frac{2t-1+t^2+t^2+1}{t^2+1}}{\frac{2t+1-t^2-t^2-1}{t^2+1}} =$$

$$= \frac{2t^2+2t}{-2t^2+2t} = \quad t\neq 0 \quad \frac{t+1}{1-t}$$

$\Rightarrow t\in[-1;1].$

$$\Rightarrow \begin{cases} tg\frac{\pi x}{4} \geq -1 \\ tg\frac{\pi x}{4} \leq +1. \end{cases}, \quad tg\frac{\pi x}{2}\neq 0.$$