41-77-43-93
(182.2)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 173

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы

по математике

Степанова Григория Сергеевича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«22» марта 2016 года

Подпись участника
Степанов

41-77-43-93
(182.2)

Чистовик:

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

65 (шестьдесят пять)

① $\sin 1 + \cos 1 = \sqrt{2}\sin(1+\frac{\pi}{4})$

$\frac{\pi}{4} < 1 \leq \frac{\pi}{3}$

$\sqrt{2}\sin(\frac{7\pi}{12}) < \sqrt{2}\sin(1+\frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$

$\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

1) $\frac{42}{31}$ очевидно меньше $\sqrt{2}$, т.к. $\sqrt{2} \geq 1{,}394$

$1\frac{11}{31} < 1{,}37$

2) $\frac{42}{31} \vee \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$31(\sqrt{3}+1) \vee 84 \,|\, :31$

$\sqrt{3} \vee 1{,}71$

$3 > 2{,}8241$

$\Downarrow$

$\boxed{\sin 1 + \cos 1 > \frac{42}{31}}$

Верно!

$84 : 31 = 2{,}7098\ldots \leq 2{,}71$

$-84 \;|\; 31$
62
-220
217
-300
279
210

171×171:
171
1197
171
$2{,}8241$

② $\sqrt{(x-3)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+9)^2}$ — сумма расстояний ~~точки~~ точки $(x;y)$ до точек: $(3;0)$ и $(0;-9)$

Построим график

$3|x|+|y|=6$

4) $[\log_2(\log_2 x)]^2 - 8\log_2([\log_3 x]) + 15(\log_2(\log_3[x])/8$

$[\log_2(\log_2 x)] \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} \log_2[\log_3 x] \in \cancel{\#}\,\mathbb{Q} \\ \log_2[\log_3[x] \in \mathbb{Q} \end{cases}$

найдем целые корни:

$x = 3 \Rightarrow x \in [3; 4)$

Недостаточно обоснований! Ответ верный!

Тогда T (искомое время)

$T = \frac{7t}{t-7}$, $t > 7$, $T \geqslant 16$

последовательность убывает

(как минимум потому что чем медленнее бежит второй, тем реже его обгоняет первый)

$T(8) = 56$

$T(9) = \frac{7 \cdot 9}{2} \notin \mathbb{Z}$ $\qquad$ $T(11) = \frac{77}{4} \notin \mathbb{Z}$

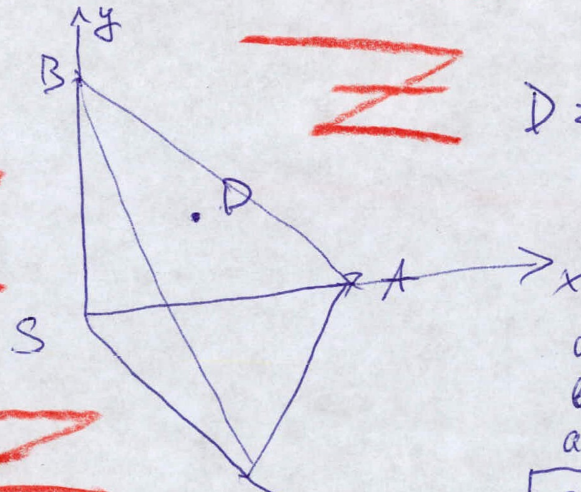
$T(10) = \frac{70}{3} \notin \mathbb{Z}$ $\qquad$ $T(12) = \frac{84}{5} \notin \mathbb{Z}$

$T(13) = \frac{7 \cdot 13}{6} \notin \mathbb{Z}$

$T(14) = \frac{7 \cdot 14}{7} = 14 < 16$

Ответ: 56 минут. Верно!

5



$D = (a; b; c)$

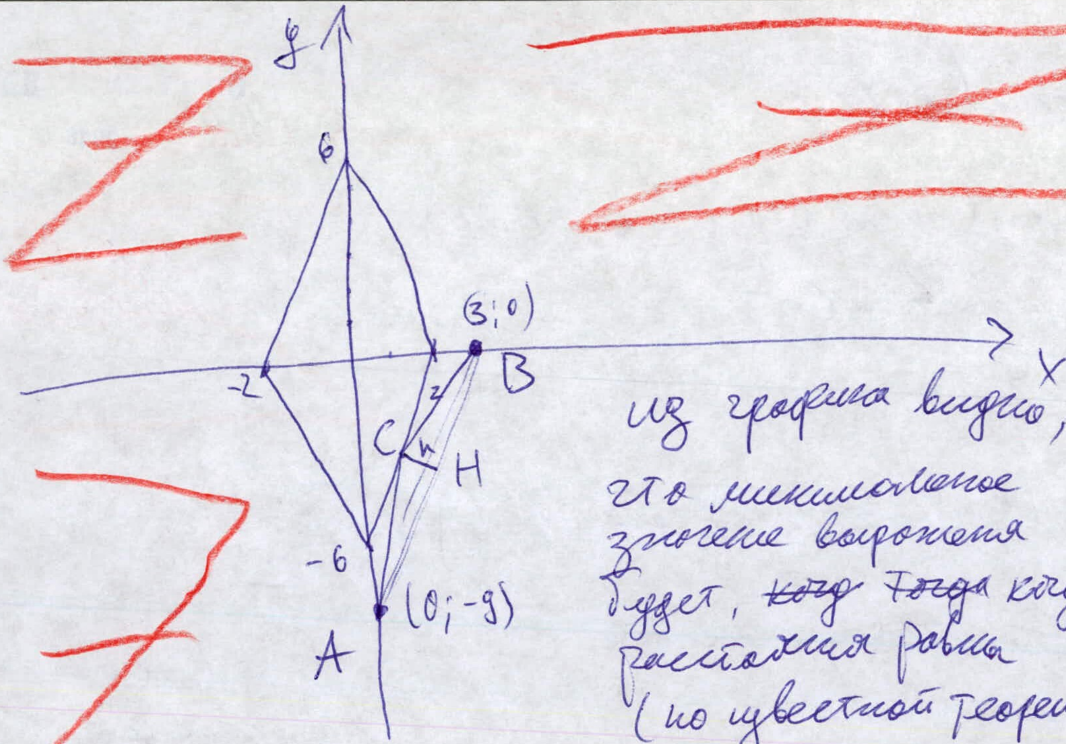
$a^2 + b^2 = 5$
$b^2 + c^2 = 13$
$a^2 + c^2 = 10$

$\boxed{a = 1;\ b = 2;\ c = 3}$

По известной теореме объем будет минимален, когда $AS = 2a$, $BS = 2b$, $SC = 2c$,

Тогда $V = \frac{1}{6} \cdot 8abc = 8$ Ответ неверный!

Ответ. 8



из графика видно, что минимальное значение выражения будет, ~~когд~~ ~~тогда~~ когда расстояния равны (по известной теореме)

прямые параллельны, поэтому $h = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$AB = \sqrt{81+9} = 3\sqrt{10}$

$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{2{,}25 \cdot 10 + 10} = \sqrt{32{,}5} = \sqrt{\frac{65}{2}}$

$AC + CB = 2\sqrt{\frac{65}{2}} = \sqrt{130}$

Ответ $\sqrt{130}$ Ответ неверный!

(2) Допустим второй пробегал за τ минут, тогда спустя время $7 \cdot \tau$ они оба окажутся в начальной точке, причём первый пробежит τ кругов, а второй 7.

Тогда нев первый обгонит второго ~~$7-\tau$~~ $\tau - 7$ раз

41-77-43-93 (182.2)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

Черновик

7, T

7T

Пч 7 кружк.

$\frac{7-T}{}$

$\frac{7T}{T-7}$

$\frac{7T}{T-7} = 56$

$\frac{7T}{7-T} = \frac{7T^2}{7(7-T)} - 2T$

$\frac{7\cdot 9}{2}$ $ab + \frac{b^2}{tg^2\alpha} + \frac{a^2 tg^2\alpha}{2}$

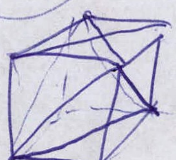
$\frac{7\cdot 8}{3}$

$\frac{7\cdot 8}{3}, \frac{7\cdot 9}{4}, \frac{7\cdot 10}{5} = 14$ $\frac{1}{5}Sh$

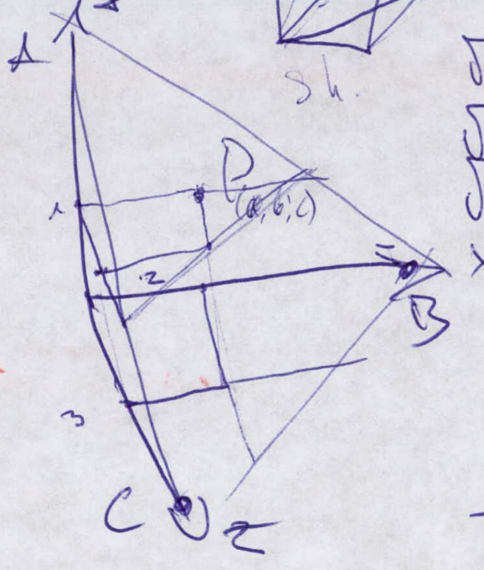
$\frac{7\cdot 7}{4}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{7\cdot 6}{3} = 14$



Sh



$\sqrt{a^2+c^2} = \sqrt{13}$

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5}$

$\sqrt{b^2+c^2} = \sqrt{10}$

$c - b = 8$

$a^2+c^2 = 13$

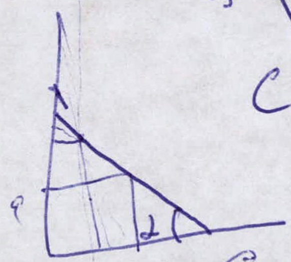
$a^2+b^2 = 5$

$b^2+c^2 = 10$

$2c - 8 = 10$

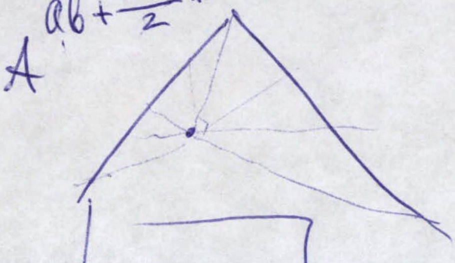
$a = 4, c = 8$

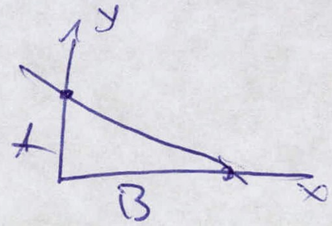
$\boxed{a = 2, c = 3, b = 1}$

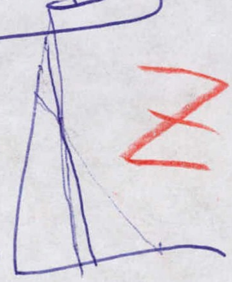


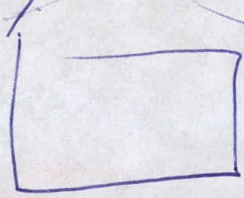
$C = 0 \to Ax + Bx =$

$ab + \frac{b^2 \sin\alpha}{2} +$









$y =$

$ax + by = c$

$Aa = c$

$Bb = c$

41-77-43-93
(182.2)

$\sin 1 + \cos 1 = \sqrt{2}\cos\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ Черновик

$1\frac{11}{31}$ $\sqrt{1,5} \ge \sqrt{2}\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right) \ge \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} \le \frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}$

$\sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\frac{6}{4} \vee \frac{42}{31}$

$$\begin{array}{r} \times\; 42 \\ 42 \\ \hline 84 \\ 168 \\ \hline 1764 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\; 31 \\ 31 \\ \hline 31 \\ 93 \\ \hline 961 \end{array}$$

$1\frac{1}{2}$

$\frac{42}{31} \vee \frac{\sqrt{6}}{4}$

$4\cdot 1764 \vee 6\cdot 961$

$\frac{1764}{961} \vee \frac{6}{4}$

$$\begin{array}{r} \times\; 1764 \\ 4 \\ \hline 7056 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\; 961 \\ 6 \\ \hline \end{array}$$

4.

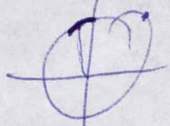
$\frac{\pi}{4} \le 1 \le \frac{\pi}{3}$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ -4 & 1,7 \\ 30 & \end{array}$$

$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

$\sin 1 + \cos 1 \le \sqrt{2}\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sqrt{2}\ \cancel{\cos}\ \sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$



$\left(\frac{42}{31}\right)^2 < \frac{6}{4}$

$84^2 < 6\cdot 31^2$

$$\begin{array}{r} \times\; 84 \\ 84 \\ \hline 336 \\ 672 \end{array}$$

$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) =$

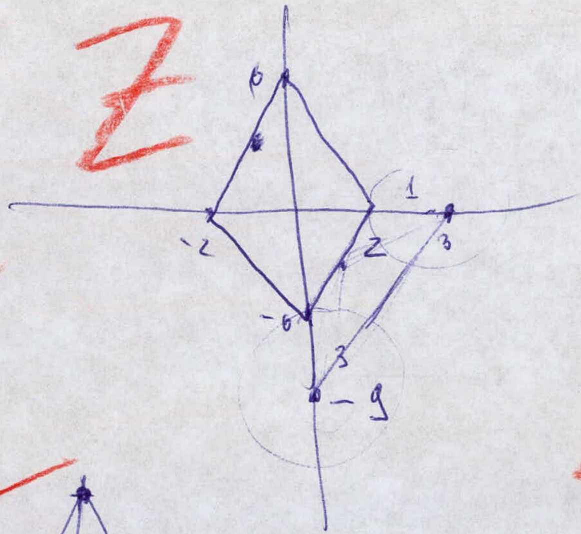
$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\frac{2\sqrt{3}+2}{4} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ $\quad \frac{\sqrt{3}+1}{2} \vee \frac{42}{31}$

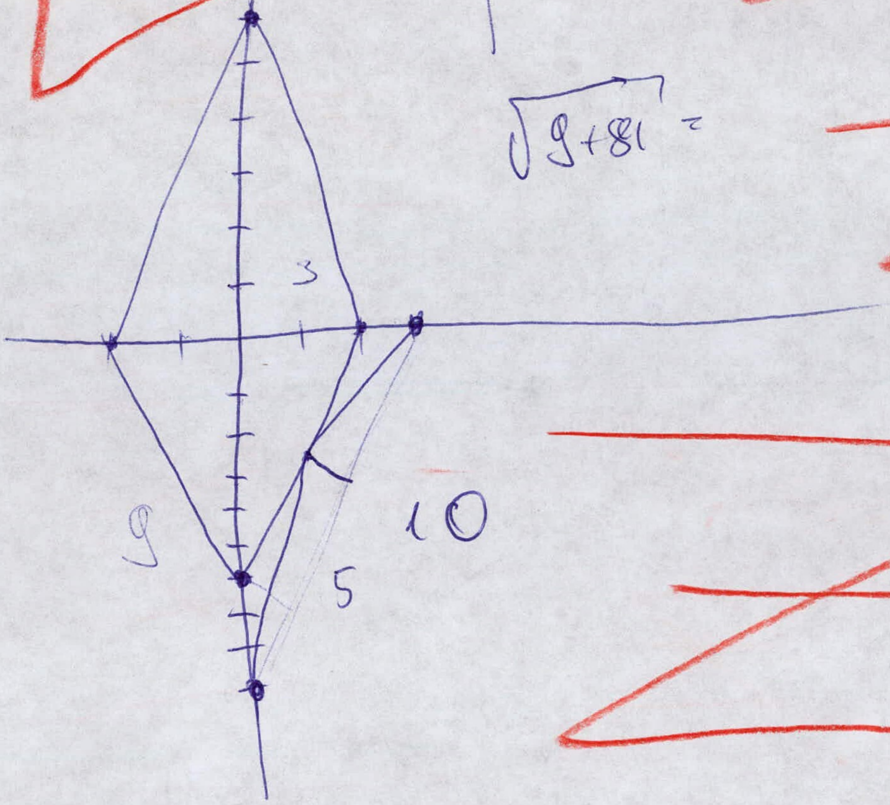
$\frac{\sqrt{3}}{2} +$ $\quad \frac{31(\sqrt{3}+1)}{62} > \frac{\cancel{42\sqrt{3+1}}\ 84}{62}$

$$\begin{array}{r|l} 84 & 31 \\ -62 & 2,07096 \\ \hline 220 & \\ 217 & \\ \hline 300 & \\ -279 & \\ \hline 210 & \\ -186 & \\ \hline 240 & \end{array}$$

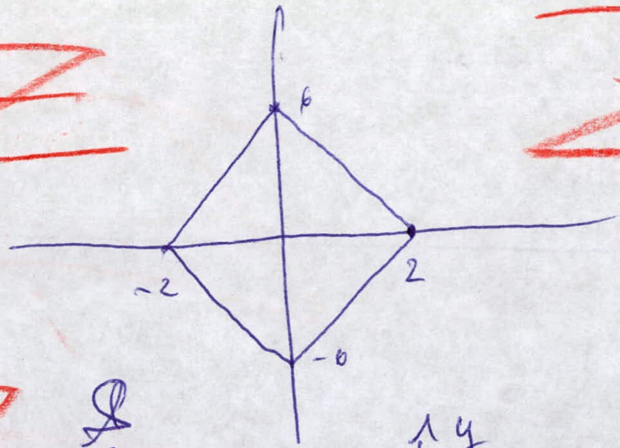
$$\begin{array}{r} \times\; 2,071 \\ 2,071 \\ \hline 1,071 \end{array}$$

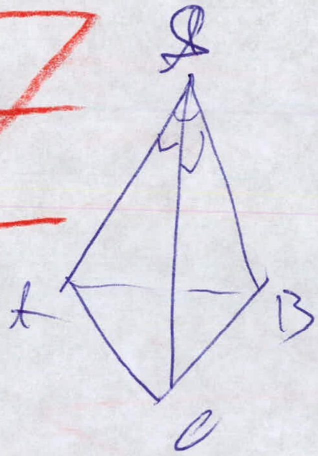


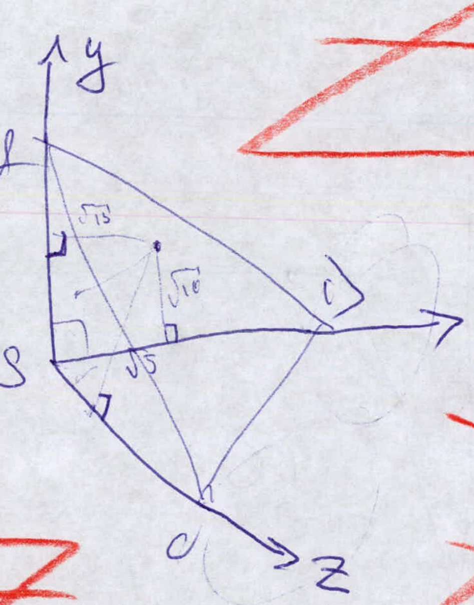
$\sqrt{9+81} =$



$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+9)^2}=0$$







$S_A = \cancel{8} = 0$

$\cancel{X} = 0$

$$\left[\log_2(\log_3 x)\right]^2 - 8\log_2\left([\log_3 x]\right) + 15\log_2\left(\log_3[x]\right) = 0$$

Z

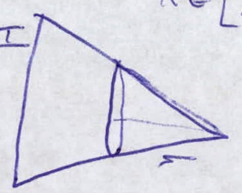
$\log(Z)$

$x \in [5;6)$

$x \in [3;4)$

$x = 3^8$

$x = 3^{32}$



$$\int_0^H S\,dh = \frac{S_0}{H^2}\int_0^H h^2\,dh$$

$$\frac{S_0}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3}$$

$$\frac{S_0 H}{3}$$

$$S(h) = S_0\frac{h^2}{H^2}$$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Шифр

$\cancel{T} = 7 + \tau =$

$(7+\tau)\frac{\alpha}{\tau} = \alpha +$

$v_1 \quad v_1 T \equiv v_2 T \mod \alpha$

$\frac{\alpha}{7}\cancel{T} \equiv \frac{\alpha}{\tau}\cancel{T} \mod \alpha$

$\frac{\alpha}{7} \equiv \frac{\alpha}{\tau} \mod \alpha$

$\frac{1}{7} \equiv \frac{1}{\tau} \mod 1 \qquad \frac{8}{7}, \frac{15}{7}, \frac{22}{7} ..$

$\cancel{N \cdot \alpha +} \qquad x = \frac{\alpha}{7}(T-14)$

$\frac{2\alpha + x}{\frac{\alpha}{7}} = \frac{\alpha + x}{\frac{\alpha}{\tau}}$

$T : 7$

$14\alpha + 7x = 7\alpha + 7x \qquad x = \frac{\alpha}{7}(T-14)$

$14 + (T-14) = \tau + \frac{\tau}{7}(T-14)$

$\frac{2\alpha + \frac{\alpha}{7}(T-14)}{\frac{\alpha}{7}} = \frac{\alpha + \frac{\alpha}{7}(T-14)}{\frac{\alpha}{\tau}}$

$14 + (T-14) = \tau + \frac{\tau}{7}(T-14)$

$T = \frac{\tau T}{7} - 24 \qquad \tau < 7$

$T > 16$

$21 = 3T - 2T \qquad \underline{T = 21}$

$T = 21$

$T = 2T - 28$

$\underline{T = 28}$