60-97-54-46
(176.1)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Выход: 16:20–16:22

Вариант 4-2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьевы Горы!"

по математике

Ступина Максима Александровича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«20» марта 2016 года

Подпись участника

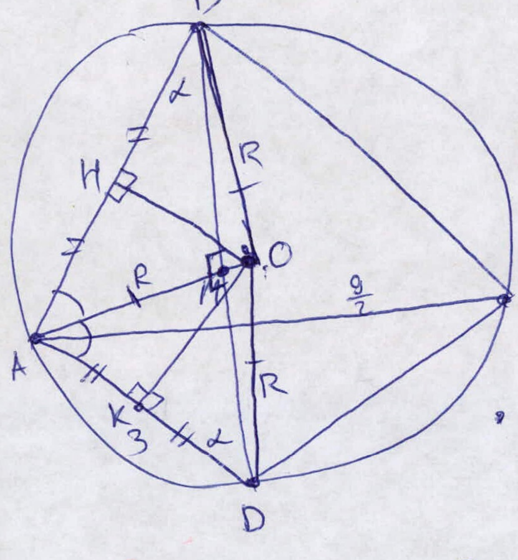
100 (сто) [подпись] (Раутиан)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

60-97-54-46
(176.1)

Чистовик [подпись] (Горин) №3

Олимпиада ПВГ 2016



Решение:

Заметим, что $OA = OD = OB = R$

Пусть OH — высота в $\triangle ABO$

OK — высота в $\triangle ADO$

$\triangle ADO$, $\triangle ABO$ — равнобедренные.

$\Downarrow$

$\frac{AB}{2} = AH = BH$; $AK = KD = \frac{AD}{2} = \frac{3}{2}$

$OK = OH$ — по условию; (AB, AD равноудалены от O.)

Рассмотрим $\triangle AHO$ и $\triangle AKO$:

AO — общая

$OH = OK$ — по условию

$\angle AHO = \angle AKO = 90^\circ \Rightarrow \triangle AHO = \triangle AKO$,

$(AH = \sqrt{OA^2 - OH^2};\ AK = \sqrt{OA^2 - OK^2})$

$\Downarrow$ $AH = AK$

$\triangle AHO = \triangle AKO$

$\Downarrow$

$\angle OAK = \angle OAH$

$\Downarrow$

AO — биссектриса $\angle BAD$

$\Downarrow$ $AK = AH$; $AB = AD = 3$

$\Downarrow$ $\triangle ABD$ — равнобедренный

$AB = AD$

$\triangle ABD$ — равнобедренный

$\Downarrow$

$\angle ABD = \angle ADB = \alpha$

AO — биссектриса $\angle BAD$

AO ~~также~~ содержит высоту $\triangle BAD$,

AO также содержит медиану $\triangle BAD$.

Пусть $AO \cap BD = M$, тогда $AM \perp BD$, AM — высота, $BM = DM$, AM — биссектриса, медиана и высота в равноб. $\triangle ABD$.

Рассмотрим $\triangle AMD$: $DM = AD \cdot \cos\alpha = 3 \cdot \cos\alpha = BM$.

$BD = BM + DM = 6\cos\alpha$; $\angle AMD = 90^\circ$; $\angle ADM = \alpha \Rightarrow \angle MAK = 90^\circ - \alpha$

$AK = KD = \frac{AD}{2} = \frac{3}{2}$; Рассмотрим $\triangle AOK$. $\angle OAK = \angle MAK = 90^\circ - \alpha$

$\angle OKA = 90^\circ$

$\Downarrow$

$\angle AOK = \alpha$

тогда $\sin\alpha = \frac{AK}{OA} = \frac{3}{2R}$.

Заметим, что $ABCD$ — вписанный, тогда $AC \le 2R$ (иначе ABCD не вписан в эту окружность)

$AC = \frac{9}{2}$; $2R > AB$; $2R > AD$

тогда

$2R \geq \frac{9}{2} \Rightarrow R \geq \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{1}{R} \le \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{3}{2R} \le \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 9} = \frac{2}{3}$

$\sin\alpha = \frac{3}{2R} \le \frac{2}{3}$

$\Downarrow$

$\sin^2\alpha \le \frac{4}{9} \Rightarrow 1 - \cos^2\alpha \le \frac{4}{9}$

$\cos^2\alpha \geq \frac{5}{9}$ $\quad \alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$

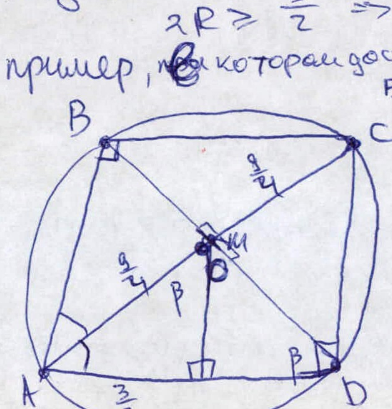
$\cos\alpha \geq \frac{\sqrt{5}}{3}$

тогда $BD = 6\cos\alpha \geq 2\sqrt{5}$

минимальное значение BD: $2\sqrt{5}$

Задача решена

пример, при котором достигается $BD = 2\sqrt{5}$:



AC — диаметр

$\sin\beta = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{4}} = \frac{2}{3}$

$\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$OD = \frac{BD}{2} = \sqrt{5}$

$BD = 2\sqrt{5}$

Ответ: $2\sqrt{5}$

Чистовик. №5

$$\begin{cases} x^2+2y^2+2y(x+a)+a^2=0; \ (1) \\ 3^{-3-x}\cdot\log_3 y<1; \ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+2xy+y^2)+(a^2+2ay+y^2)=0 \\ 3^{-3-x}\cdot\log_3 y<1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^2+(a+y)^2=0; \\ 3^{-3-x}\cdot\log_3 y<1; \end{cases}$$ заметим, $(x+y)^2\geq 0$
$(x+y)^2=0$ при $x=-y$;
$(a+y)^2\geq 0$
$(a+y)^2=0$ при $a=-y$;

(1) $(x+y)^2+(a+y)^2\geq 0$ (1) $(x+y)^2+(a+y)^2=0$ при $\begin{cases} x+y=0; \\ a+y=0; \end{cases}$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x=-y; \\ a=-y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x; \\ y=-a; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=x; \\ -a=y; \end{cases}$$

(2) $3^{-3+y}\cdot\log_3 y<1; \ |\cdot 27$ $\dfrac{\text{ОДЗ}:}{\log_3 y}$ $y>0 \Rightarrow -a>0$
$a<0$

$3^y\cdot\log_3 y<27.$

заметим, при $y\geq 3$:

$3^y\geq 3^3=27$ $\quad 3>1$

$\log_3 y\geq\log_3 3=1$, т.е: $\begin{cases} y\geq 3; \\ 3^y\geq 27; \\ \log_3 y\geq 1; \end{cases} \Rightarrow 3^y\cdot\log_3 y\geq 27.$

$\Downarrow$ при $y\geq 3$ решений нет.

при любом $y\in(0;3)$:

$3^0<3^y<3^3$ $\cdot$ $\log_3 y<\log_3 3$; $\log_3 y$ определен.

$1<3^y<27$ $\quad\Downarrow$ $\begin{cases} 3^y<27; \\ \log_3 y<1; \end{cases} \Rightarrow 3^y\cdot\log_3 y<27$, т.е. любой $y\in(0;3)$ подойдет.

$y\in(0;3) \overset{y=-a}{\Rightarrow} a\in(-3;0)$. Решения есть при любом $a\in(-3;0)$.

$0<y<3$
$0>-y>-3$
$0>a>-3$

Ответ: Решения есть при $a\in(-3;0)$, эти решения: $\begin{cases} y=-a; \\ x=a; \end{cases}$

Задача решена

Чистовик

№4

Пусть $\frac{\pi x}{2} = \alpha$.

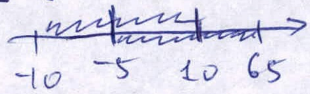
$$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1} \geq \frac{x}{10} - \sin\left(\arcsin\frac{x}{10}\right)$$

ОДЗ: $\sin\alpha - \cos\alpha + 1 \neq 0$

$\arcsin\left(\frac{x}{10}\right) \longrightarrow \frac{x}{10} \in [-1; 1] \Rightarrow x \in [-10; 10]$

$x \in [-5; 65]$ ← по условию $\Rightarrow x \in [-5; 10]$

$x \in \mathbb{Z}$.



$\sin\left(\arcsin\frac{x}{10}\right) = \frac{x}{10} \quad \forall x \in [-10; 10]$

$$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1} \geq \frac{x}{10} - \frac{x}{10} = 0$$

$$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1} \geq 0;$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} (\sin\alpha + \cos\alpha - 1)(\sin\alpha - \cos\alpha + 1) \geq 0; \\ \sin\alpha - \cos\alpha + 1 \neq 0; \end{cases}$$

Задача решена

$\sin\alpha - \cos\alpha + 1 \neq 0$

$\cos\alpha - \sin\alpha \neq 1$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha + \frac{\pi}{4} \neq \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \alpha \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \\ \alpha \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x \neq 4k, k \in \mathbb{Z}; \\ x \neq 4k - 1, k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)(\sin\alpha - \cos\alpha + 1) \geq 0;$

$\sin^2\alpha + \cancel{\cos\alpha\sin\alpha} - \cancel{\sin\alpha} - \cancel{\cos\alpha\sin\alpha} - \cos^2\alpha + \cos\alpha + \cancel{\sin\alpha} + \cos\alpha - 1 \geq 0;$

$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 \geq 0;$

$1 - 2\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 \geq 0;$

$-2\cos^2\alpha + 2\cos\alpha \geq 0; \; |:2$

$\cos\alpha(1 - \cos\alpha) \geq 0;$

$\cos\alpha \in [-1; 1]$

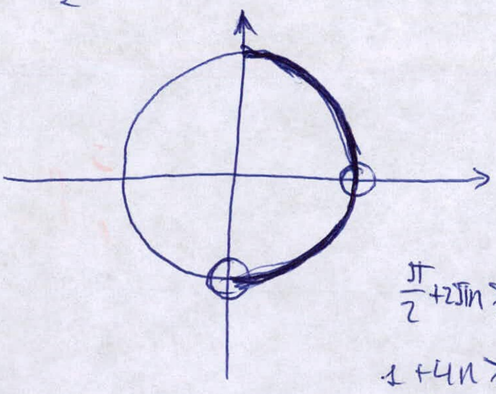
но $\alpha \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \cos\alpha \in [-1; 1)$

$\Downarrow$

$1 - \cos\alpha > 0 \;\; \forall \alpha \in$ ОДЗ

$\cos\alpha(1 - \cos\alpha) \geq 0 \; | : (1 - \cos\alpha)$

$\cos\alpha \geq 0$



$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \geq 0;$

$\alpha \in \left[2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \cup \left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right)$

$n \in \mathbb{Z}$.

$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \geq \frac{\pi x}{2} > 2\pi n$ или $2\pi + 2\pi n > \frac{\pi x}{2} > \frac{3}{2}\pi + 2\pi n$

$1 + 4n \geq x > 4n$ или $4 + 4n > x > 3 + 4n$

$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 4n + 1, n \in \mathbb{Z}$

$x \in \mathbb{Z}, \; 4 + 4n \in \mathbb{Z}$

$3 + 4n \in \mathbb{Z}$

между 2 соседними целыми нет других целых, таких x нет.

$\varnothing$

$$\begin{cases} x = 4n + 1; \\ x \in [-5; 65]; \\ x \in [-10; 10]; \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3; \\ x = 1; \\ x = 5; \\ x = 9; \end{array}\right.$$

$-3 + 1 + 5 + 9 = 12$

Ответ: 12.

Черновик

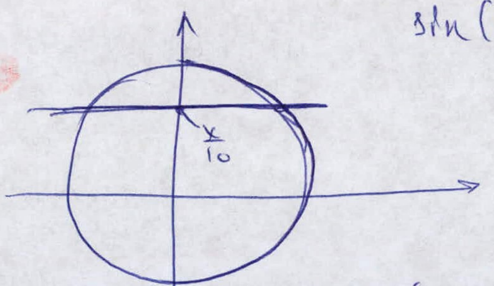
№4

$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1} \geq \frac{x}{10} - \sin(\arcsin\frac{x}{10})$

ОДЗ: $\sin\alpha - \cos\alpha + 1 \neq 0$

$\frac{x}{10} \in [-1; 1] \Rightarrow x \in [-10; 10]$

$\sin(\arcsin\frac{x}{10}) = \frac{x}{10}$



$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha-1}{\sin\alpha-\cos\alpha+1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(\sin\alpha+\cos\alpha-1)(\sin\alpha-\cos\alpha+1)\geq 0\\ \sin\alpha-\cos\alpha+1\neq 0;\end{cases}$

$\frac{\frac{1}{\sqrt2}\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt2}\cos\alpha-\frac{1}{\sqrt2}}{\frac{1}{\sqrt2}\sin\alpha-\frac{1}{\sqrt2}\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt2}} \geq 0$

$\frac{\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{\sqrt2}}{-\cos(\alpha+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt2}} \geq 0;$

$\sin^2\alpha + \cancel{\cos\alpha\sin\alpha} - \cancel{\sin\alpha}$
$-\cancel{\sin\alpha\cos\alpha} - \cos^2\alpha + \cos\alpha$
$+\cancel{\sin\alpha} + \cos\alpha - 1 \geq 0$

$1 - 2\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 \geq 0;$

$\cos\alpha(-\cos\alpha+1) \geq 0;$

$\cos\alpha \in [-1; 1] \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha = 1\\ -\cos\alpha+1>0\end{array}\right.$

$\cos\alpha = 1$ или $\cos\alpha \geq 0$

$\Downarrow$

$\sin\alpha = 0$

$\sin\alpha - \cos\alpha = -1$

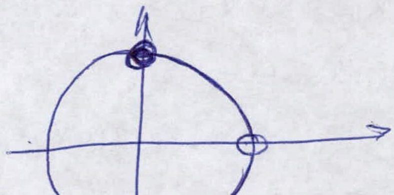
$\frac{1}{\sqrt2}\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt2}\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt2}$

$\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt2}$

$\alpha + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\alpha \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

и $\alpha \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$



$\cos\frac{\pi x}{2} \geq 0$

$\frac{\pi x}{2} \in [2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k] \cup (\frac{3}{2}\pi + 2\pi k; 2\pi(k+1))$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \geq \frac{\pi x}{2} > 2\pi k$ или $2\pi k + 2\pi > \frac{\pi x}{2} > \frac{3}{2}\pi + 2\pi k$

$\frac{1}{2} + 2k \geq \frac{x}{2} > 2k$

$2k + 2 > \frac{x}{2} > \frac{3}{2} + 2k$

$1 + 4k \geq x > 4k$

$4k + 4 > x > 3 + 4k$

$\varnothing$

$k = -2$: -7

$k = -1$: 0 1 2

$x = 4k + 1$

$x = -3, x = 1; x = 5; x = 9$

$\Sigma = -3 + 1 + 5 + 9 = 12$

Чистовик

№1

Заметим, что количество участников должно быть натуральным. Пусть оно равно x, $x \in \mathbb{N}$.

Заметим, золотые медали получило натуральное количество участников, серебряные и бронзовые тогда $\frac{x}{11} \in \mathbb{N}$, $\frac{x}{4} \in \mathbb{N}$

$\Updownarrow$

$x = 11k, k \in \mathbb{N}, x = 4m, m \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$x \vdots 11, x \vdots 4 \Rightarrow x \vdots 44$

11 и 4 взаимно простые

~~Зна~~ $x \le 79$ по условию,

$x \vdots 44 \Rightarrow x = 44$ (других натуральных $\in [1; 79]$, делящихся на 44 нет)

Тогда золотые медали получило 4 участника

серебряные — 11

бронзовые — 11

всего медалей: 26. Заметим, каждый участник мог получить лишь одну медаль, т.к. участвовал в 1 из видов соревнований по условию.

Тогда тортов придется купить: $44 - 26 = 18$

Задача решена

Ответ: 18 тортов.

№2

Пусть x_1, x_2 — какие-то корни уравнения $x^3 - 2016x + 2017 = 0$; причем $x_1 \neq x_2$.

Тогда $-\begin{cases} x_1^3 - 2016x_1 + 2017 = 0 \\ x_2^3 - 2016x_2 + 2017 = 0 \end{cases}$ — т.к. x_1, x_2 — корни

Задача решена

$(x_1^3 - x_2^3) - 2016(x_1 - x_2) + 2017 - 2017 = 0$;

$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - 2016(x_1 - x_2) = 0$;

$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2016) = 0$;

$x_1 - x_2 = 0$ или $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2016 = 0$;

Но $x_1 \neq x_2$. Противоречие

$\varnothing$

$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 2016$

Проведем все рассуждения „снизу вверх“ — в обратном порядке и получим, что

~~Тогда~~ $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ может принимать только одно значение: 2016. При других его значениях одно из чисел x_1, x_2 — не корень.

Ответ: 2016.

60-97-54-46
(176.1)

Олимпиада ПВГ 2016

Черновик

N5

$(x+y)^2+(a+y)^2=0;$

$\Downarrow$

$\begin{cases} x+y=0; \\ a+y=0; \end{cases} \Rightarrow a=x \quad x=-y$

$a=-y$

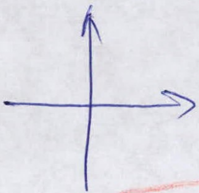
$a:\ b:\ 3^b=-x$

$3^{-3-x}\cdot\log_3 y<1$ $\quad y>0 \quad x<0 \quad a<0$

$3^{-3-x}\cdot\log_3(-x)<1$

$\log_3(-x)<3^{x+3}$

$-x<3^{3^{x+3}}$



$3^{y-3}\cdot\log_3 y<1$

$3^y\cdot\log_3 y<27$

$y=3:\ 3^y\cdot\log_3 y=27$

$y>3:\ 3^y>27$

$\log_3 y>1$

$0<y<3:$

$3^y<27 \quad \log_3 y<1$

$3^y<3^3=27$

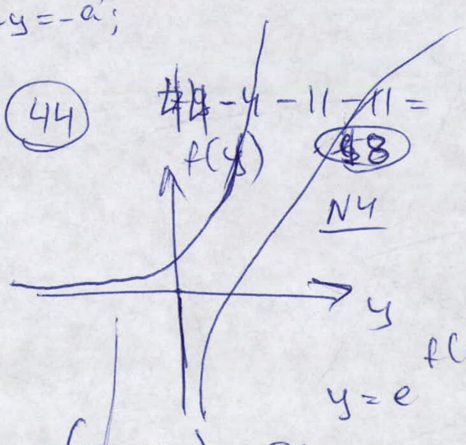
$\Downarrow$

$a\in(-3;0)$

$\begin{cases} x=a; \\ y=-a; \end{cases}$

N1

$x\le 79$. $\quad x\,\vdots\,11,\ x\,\vdots\,4$ $\quad 44$ $\quad 44-4-11-11=18$



N4

$y=e^{f(y)}$

N2

$x_1^3-2016x_1+2017=0$

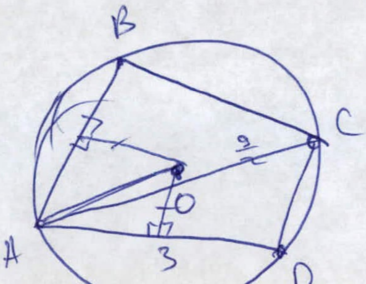
$x_2^3-2016x_2+2017=0;$

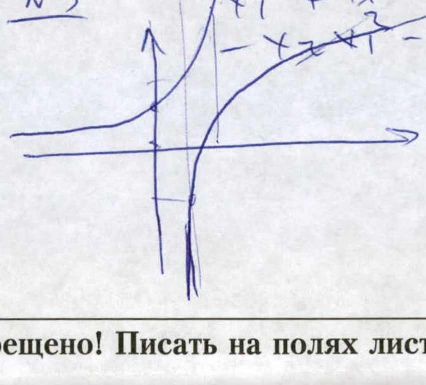
$(x_1^3-x_2^3)-2016(x_1-x_2)=0;$

$(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)-2016(x_1-x_2)=0;$

$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=2016.$

N3

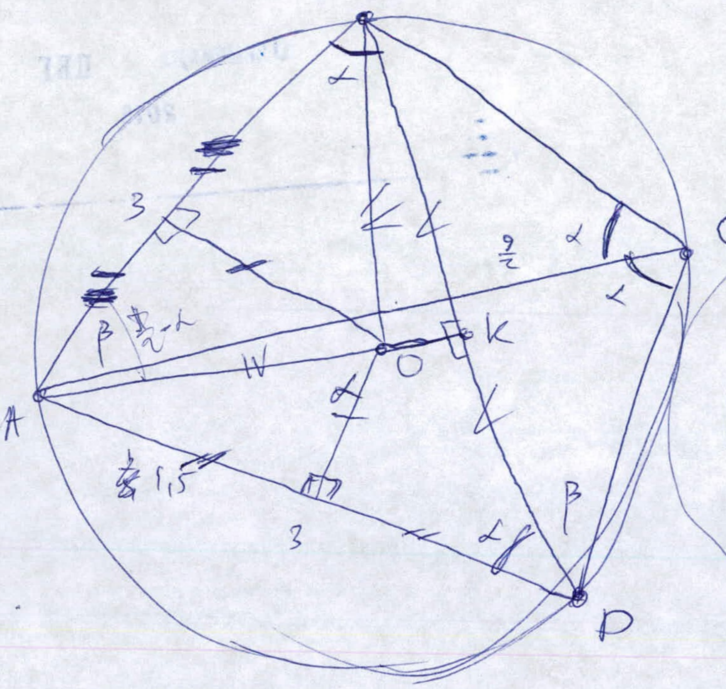


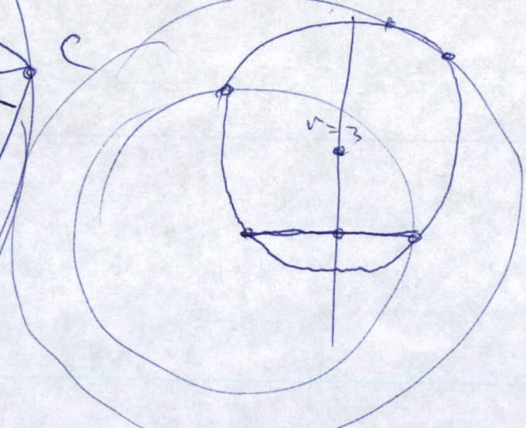


$x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2-x_2x_1^2-x_1x_2^2-x_2^3$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик





$BD = x = 3 \cdot 2\cos\alpha = 6\cos\alpha$

$\sin\alpha = \frac{3}{2R}$ $\sin\alpha \le \frac{2}{3}$

$2R \ge \frac{9}{2}$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{9}{4R^2}$

$R \ge \frac{9}{4}$ $\frac{1}{R} \le \frac{4}{9}$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\frac{3}{2R} \le \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

$\sin^2\alpha \le \frac{4}{9}$

$-\sin^2\alpha \ge -\frac{4}{9}$

$1 - \sin^2\alpha \ge \frac{5}{9}$

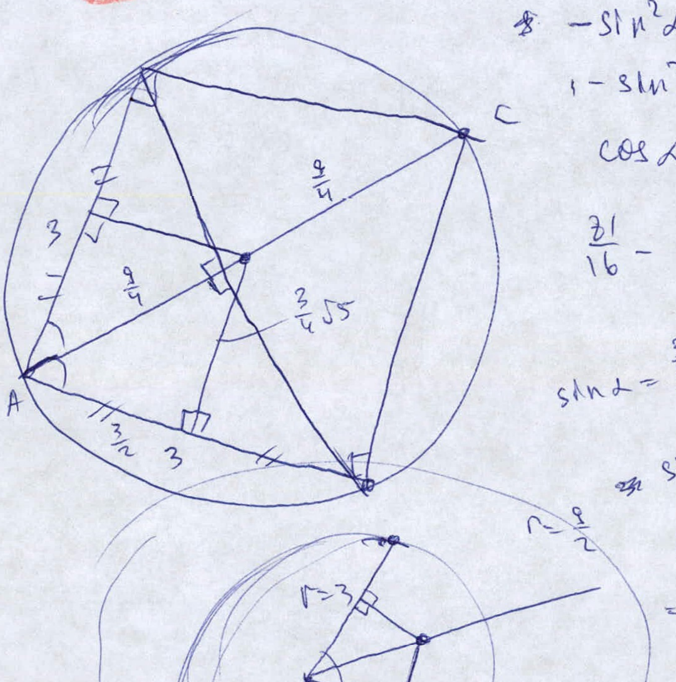
$\cos\alpha \ge \frac{\sqrt{5}}{3}$ $x \ge 2\sqrt{5}$

$\frac{81}{16} - \frac{9}{4} = \frac{81-36}{16} = \frac{45}{16}$

$\frac{3}{4}\sqrt{5}$

$\sin\alpha = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{5}}{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin\alpha = \frac{\frac{x}{2}}{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = \sqrt{5}$, $x = 2\sqrt{5}$



$(x-1)(x-2)(x-3) =$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!