17-67-26-45
(183.2)

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 174

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы"

по математике

Суворова Александра Антоновича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Выход: 12^{10} – 12^{12}

Дата
« 22 » марта 2016 года

Подпись участника

70 (семьдесят)

Чистовик

№1

$\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2} \; ? \; \frac{40}{29}$

$\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \; ? \; \frac{40}{29}$

$0<\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}<\pi$, тогда равносильно:

$2\cdot\sin^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \; ? \left(\frac{40}{29}\right)^2$

$0<\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$, т.к. $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{10\pi}{24}=\frac{5\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$, тогда

(т.к. $\pi>3$)

$2\cdot\sin^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<2\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$

Сравним $2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{40}{29}\right)^2$:

$2\sin^2\frac{5\pi}{12} \; ? \left(\frac{40}{29}\right)^2$

$1-\cos\frac{5\pi}{6} \; ? \; \frac{1600}{841}$

$\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда:

$1+\frac{\sqrt{3}}{2} \; ? \; \frac{1600}{841}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \; ? \; \frac{759}{841}$

$\sqrt{3} \; ? \; \frac{1518}{841}$

$3 \; ? \; \frac{2304324}{707281}$

$759 \times 2 = 1518$

1518×1518: $12144 + 1518 + 7590 + 1518 = 2304324$

841×841: $841 + 3364 + 6728 = 707281$

$707281 \times 3 = 2121843$

$2121843<2304324$, тогда

$2\sin^2\frac{5\pi}{12}<\left(\frac{40}{29}\right)^2$,

но $2\sin^2\frac{5\pi}{12}>2\sin^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$, тогда

$2\sin^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<\left(\frac{40}{29}\right)^2$

$\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{40}{29}$

$\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}<\frac{40}{29}$

Ответ: первое число меньше

Ответ верный.
Решение верное.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$$\begin{cases} 17 = h^2 + x^2 + 20 - 4\sqrt{5}\cdot x \\ 1 = h^2 + x^2 \end{cases}$$

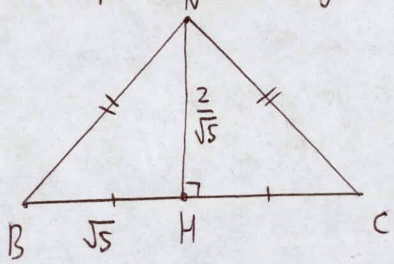
$17 = 1 + 20 - 4\sqrt{5}\cdot x,$

$4\sqrt{5}\cdot x = 4,$

$x = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow h^2 + \frac{1}{5} = 1, \quad h^2 = \frac{4}{5}$

$h = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Теперь рассмотрим $\triangle BNC$, где NH – ср. перпендикуляр к BC;



$NB = NC = \sqrt{5 + \frac{4}{5}} = \sqrt{5{,}8}$

$2NB = 2NC = 2\sqrt{5{,}8}$ – это и будет минимальная сумма растояний между точками, т.е.

$$\left(\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2}\right)_{min} = 2\sqrt{5{,}8}$$

Ответ: $2\sqrt{5{,}8}$

Ответ верный. Решение правильное, но без полного обоснования

N4

$$[\log_3(\log_2 x)]^2 - 12\cdot\log_3([\log_2 x]) + 20\cdot\log_3(\log_2([x])) = 0,$$

Если бы везде были обычные скобки, то:

$a^2 - 12a + 20a = 0,$

$$\left[\begin{array}{l} a = 0, \text{ т.е. } \log_3(\log_2 x) = 0, \quad x_1 = 2, \quad \log_2 x_1 = 1 \\ a = 8, \text{ т.е. } \log_3(\log_2 x) = 8, \quad x_1 = 2^{3^8}, \quad \log_2 x_1 = 3^8 \end{array}\right.$$

ЭТО Неверно. Должно быть $a = -8$

Но т.к. стоят скобки, то имеет место:

~~$x = 2^{3^8}$!~~

~~$x = 2$! $\begin{cases} 2 \le \log_2 x < 3 \\ 2 \le x < 3 \end{cases}$~~

$\underline{x_1 = 2^{3^8}}$! $\begin{cases} 2^{3^8} \le x < 2^{3^8} + 1 \\ 3^8 \le \log_2 x < 3^8 + 1 \\ 8 \le \log_3(\log_2 x) < 9 \end{cases}$

$\begin{cases} 2^{3^8} \le x < 2^{3^8} + 1 \\ 2^{3^8} \le x < 2\cdot 2^{3^8} \\ 3^8 \le \log_2 x < 3^9 \end{cases}$

$\underline{x_1 = 2}$! $\begin{cases} 2 \le x < 3 \\ 1 \le \log_2 x < 2 \\ 0 \le \log_3(\log_2 x) < 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2 \le x < 3 \\ 2 \le x < 21 \\ 1 \le \log_2 x < 3, \text{ т.е.} \end{cases}$

$2 \le x < 8,$

т.е. $x \in [2; 3)$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

координатной в четверти и проверим, имеет ли (1) хотя бы одну общую точку с BC:

$|x|+2|y|=2,$

III четверть: $-x-2y=2,$

$2y=-x-2$

$y=-\frac{x}{2}-1, \quad k_1=-\frac{1}{2}$

Полученный график AD не пересекает BC, поэтому минимальное значение выражения больше BC, однако можно заметить, что AD и BC параллельны, действительно, составим уравнение BC и проверим это утверждение:

$B(-4;0);\ C(0;-2):$

$y=kx+b, \begin{cases} 0=-4k+b \\ -2=b \end{cases} \quad 0=-4k-2,$

$2=-4k,$

$k=-\frac{1}{2}, \quad k=k_1,$ т.е.

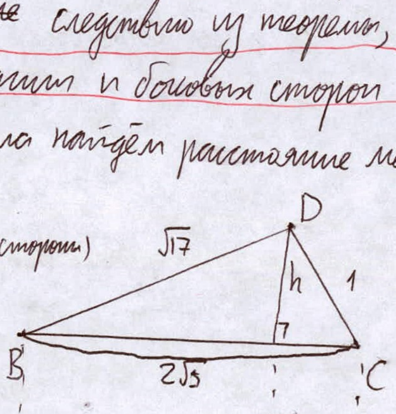
они параллельны ▨.

Теперь обратим внимание, что раз нам нужно найти наименьшую сумму расстояний от ~~произвольной~~ точки AD до BC (а именно это нужно сделать, т.к. точки, принадлежащие (1) в других четвертях будут намного дальше от B и C чем любая из точек AD), то достаточно провести из BC серединный перпендикуляр, т.к. согласно ~~теореме~~ следствию из теоремы, ~~р~~ сумма всех сторон, а значит и боковых сторон будет минимальна. Сначала найдём расстояние между AD и BC:

Нет полного обоснования рассмотрения серединного перпендикуляра

возьмём $\triangle BDC$:

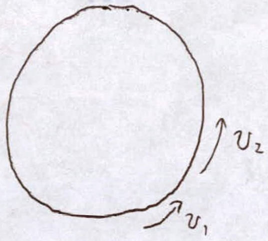
(из графика получаем стороны)



По теор. Пифагора:

$$\begin{cases} 17=h^2+(2\sqrt{5}-x)^2 \\ 1=h^2+x^2 \end{cases}$$

№2



Пусть v_1 – скорость медленного, [1/мин]

v_2 – скорость быстрого, [1/мин], тогда из условия:

$\frac{1}{v_2} = 3$ (мин), $v_2 = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{v_1} = n$ (мин), $v_1 = \frac{1}{n}$, $n \in Z$, n – время медленного на круг

$\frac{1}{v_2 - v_1} = k$ (мин), $k > 8$, $k \in Z$, k – время между обгонами

$\cancel{\frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{n}} = k}$ $\quad$ $\frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{n}} = k$

$\cancel{\frac{n-3}{3n} = k > 8}$ $\quad$ $\frac{3n}{n-3} = k > 8$

$\cancel{\frac{1}{\frac{n-3}{3n}} > 8}$, $\quad$ $3n > 8n - 24$,

$\cancel{n-3 >}$ $\quad$ $5n < 24$,

$n < 4{,}8$, $n \in Z$, т.е.

$n \leq 4$, но т.к.

$v_2 > v_1$, то

$\frac{1}{3} > \frac{1}{n}$

$n > 3$, получаем систему:

$\begin{cases} n > 3 \\ n \leq 4 \end{cases}$, т.е. $n = 4$ (мин)

Ответ верный.
Решение правильное.

Ответ: медленный водитель проезжал круг за 4 минуты.

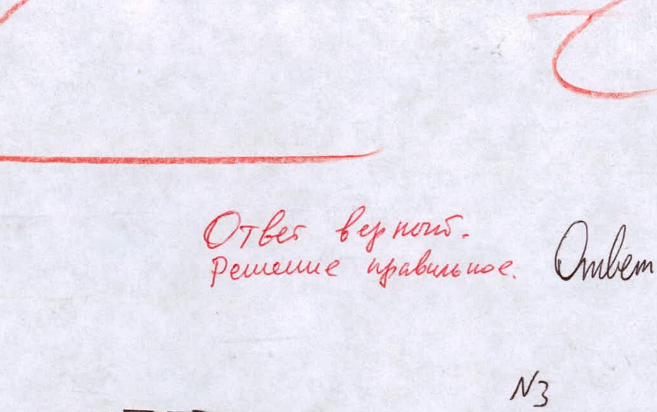
№3

$\left(\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2}\right)_{min}$ – ?

$|x| + 2|y| = 2$ (1)

Рассмотрим геометрический смысл конструкции:

$\sqrt{(x+4)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+2)^2}$ – ~~это рас~~ сумма расстояний от $A(x;y)$ до $B(-4;0)$ и $C(0;-2)$



Понятно, что при отсутствии других условий, выражение будет иметь минимальное значение, равное BC.

Построим (1) в III

17-67-26-45
(183.2)

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

Чистовик

№4 (продолжение)

$x=2^{3^8}$:

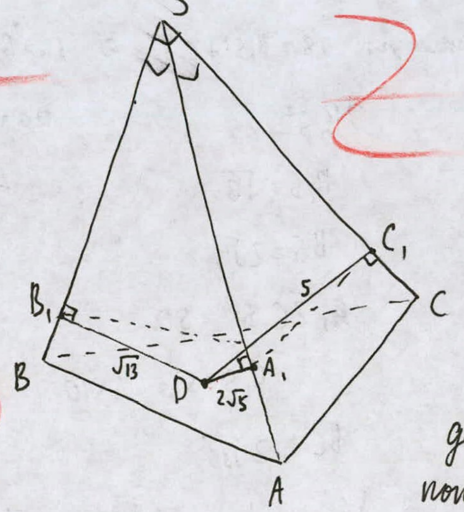
$$\begin{cases} 2^{3^8} \le x < 2^{3^8}+1 \\ 2^{3^8} \le x < 2\cdot 2^{3^8} \\ 2^{3^8} \le x < 2^{3^9} \end{cases}, \text{ т.е. } 2^{3^8} \le x < 2^{3^8}+1$$

$x \in [2^{3^8}; 2^{3^8}+1)$

Ответ: $x \in [2;3) \cup \boxed{[2^{3^8}; 3^{3^8}+1)}$

Эта часть решения неверная. Ответ частично правильный.

№5



Решение

~~Наименьший объём пирамиды будет тогда, если $D \in BC$~~

Это утверждение никак не обосновано

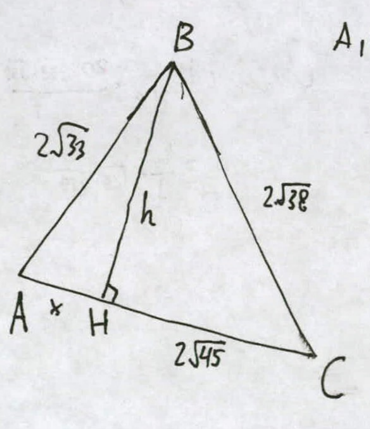
Наименьший объём пирамиды будет, если A_1, B_1, C_1 делят рёбра AS, BS и CS соответств. пополам.

Это неверно, т.к. точки S, B_1, D, A_1 не обязаны лежать в одной плоскости

Заметим, что $A_1D \perp DB_1 \perp DC_1$, т.к. $AS \perp BS \perp CS$ и $DB_1 \perp BS$; $DA_1 \perp AS$; $C_1D \perp SC$, тогда найдём A_1B_1, A_1C_1 и C_1B_1: $A_1B_1 = \sqrt{13+20} = \sqrt{33}$

$A_1C_1 = \sqrt{25+20} = \sqrt{45}$

$B_1C_1 = \sqrt{13+25} = \sqrt{38}$



Кроме того, заметим, что $A_1B_1 \perp AB$, $A_1C_1 \parallel AC$, $B_1C_1 \parallel BC$, т.е. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, тогда, т.к. было сказано раньше, что $k = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = 2$, то найдём S_{ABC}: $4\cdot 33 = x^2+h^2$

$132 = x^2+h^2$

$(2\sqrt{45}-x)^2+h^2 = 4\cdot 38 = 152$

$180 - 4\sqrt{45}x + x^2+h^2 = 152$

$$180 - 4\sqrt{45} \cdot x + 132 = 152$$

$$160 = 4 \cdot \sqrt{45} x,$$

$$40 = \sqrt{45} x,$$

$$x = \frac{40}{\sqrt{45}} = \frac{8\sqrt{5}}{3}$$

$$h^2 + x^2 = 132$$

См.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$180-4\cdot\sqrt{45}x+132=152$

$160=4\sqrt{45}\cdot x,$

$x=\frac{8\sqrt{5}}{3} \Rightarrow x^2=\frac{64}{9}\cdot 5=\frac{320}{9}$

$\times\begin{array}{r}64\\5\\\hline 320\end{array}$

$h^2+x^2=132$

$h^2+\frac{320}{9}=132,$

$\times\begin{array}{r}132\\9\\\hline 1188\end{array}$ $-\begin{array}{r}1188\\320\\\hline 868\end{array}$

$868|4$
217

$h^2=\frac{868}{9}$

$h=\frac{2\sqrt{217}}{3}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot h\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{45}\cdot\frac{2\sqrt{217}}{3}=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{45}\cdot\sqrt{217}$

ΔA_1B_1S – прямоуг: $33=B_1S^2+A_1S^2$

ΔA_1C_1S – прямоуг: $45=A_1S^2+C_1S^2$ $\Rightarrow 78=B_1S^2+C_1S^2+2A_1S^2$

ΔB_1C_1S – прямоуг: $38=B_1S^2+C_1S^2 \Rightarrow 38=B_1S^2+C_1S^2$

$-\begin{array}{r}71\\45\\\hline 26\end{array}$

$2B_1S^2=26$

$B_1S=\sqrt{13}$

$BS=2\sqrt{13}$

$\cancel{A_1}\ 2C_1S^2=50$

$C_1S=5,\ CS=10$

$BC=2\sqrt{38}$

$20=2\cdot A_1S^2$

$A_1S=\sqrt{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow AS=2\sqrt{10}$

$V_{min}=\frac{1}{3}\cdot AS\cdot S_{\Delta BSC}=\frac{2\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{10\cdot 2\sqrt{13}}\cdot 2\sqrt{38}=$

$=\frac{2\cdot 10\cdot\sqrt{52}\cdot\sqrt{38}}{3}$

Ответ: $V_{min}=\frac{20\cdot\sqrt{52}\cdot\sqrt{38}}{3}=$

$=\frac{40}{3}\cdot\sqrt{26}\cdot\sqrt{19}$

Ответ неверный.
Ход решения неправильный.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

17-67-26-45 (183.2)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

Черновик

№1

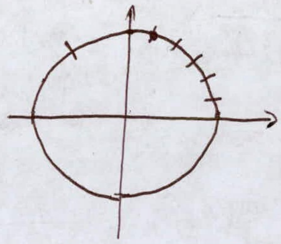
① $(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2})$ $\quad \frac{40}{29}$

①: $\sqrt{2}\cdot\sin(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4})$ $\quad \frac{40}{29}$

$2\cdot\sin^2(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4})$ $\quad \frac{1600}{841}$

$29 \times 29 = 841$

$\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}$



$\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4};\quad \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}>\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

$\frac{6\pi+4\pi}{24}>\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

$\frac{10\pi}{24}>\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

$\frac{5\pi}{12}>\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

$2\cdot\sin^2(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4})<2\cdot\sin^2\frac{5\pi}{12}$

$2\sin^2\frac{5\pi}{12}=\frac{1-\cos\frac{10\pi}{12}}{1}=$

$=1-\cos\frac{5\pi}{6}=1,5$

$\cos(\pi-\frac{\pi}{6})=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

$2\cdot\sin^2(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4})<1,5$

$\frac{1600}{841}>1,5>2\cdot\sin^2(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4})$

$\frac{40}{29}>\sqrt{2}\cdot\sin(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4})$

$\frac{40}{29}>\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}$

~~№2~~

$\cos^2x-\sin^2x=\cos2x,$

$1-2\sin^2x=\cos2x,$

$2\sin^2x=1-\cos2x$

$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{5\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$

$2\cdot\sin^2\frac{5\pi}{12}=\frac{1-\cos\frac{10\pi}{12}}{1}=$

$=1-\cos\frac{5\pi}{6}=$

$=1-\cos(\pi-\frac{\pi}{6})=$

$=1+\cos\frac{\pi}{6}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2\sin^2(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4})<1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$759 \times 2 = 1518$

$\frac{1600}{841}\ ?\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{759}{841}\ ?\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1518}{841}$

$\frac{2304324}{707281}>3>2\sin^2(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4})$

1518×1518: 12144, 1518, 7590, 1518, 2304324

841×841: 841, 3364, 6728, 707281

№2

Пусть ~~Если~~ $v_1<v_2$, тогда

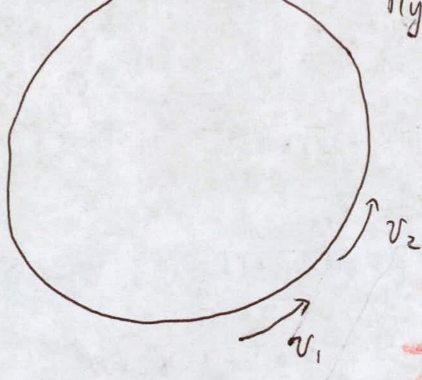
$\frac{1}{v_2}=3$ мин $\quad v_2=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{v_1}=n$ мин $\quad v_1=\frac{1}{n},\ n>3$

$\frac{1}{v_2-v_1}=k$ мин, $k\geq8$

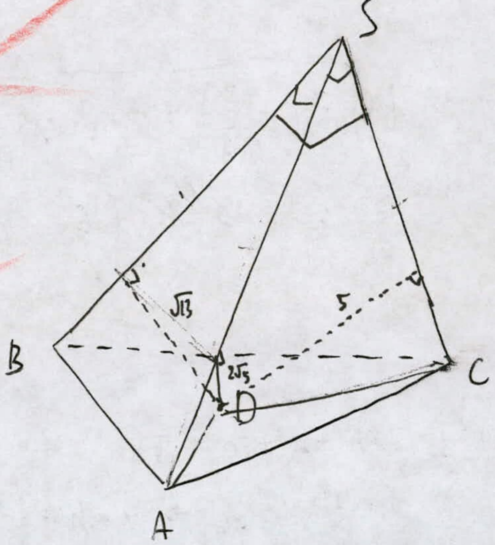
$\frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{n}}=k,$ ~~№2~~

$\frac{n-3}{3n}=k$

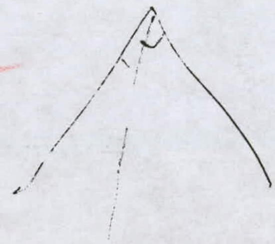


См.

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!



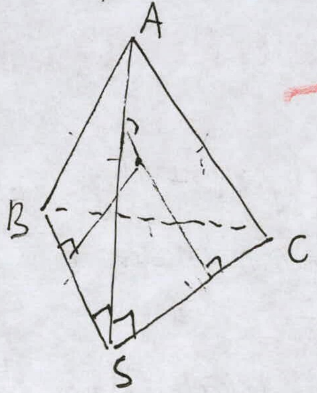
$$[\log_3(\log_2 x)]^2 = 12\log_3([\log_2 x]) +$$
$$- 20\cdot\log_3(\log_2[x]))$$



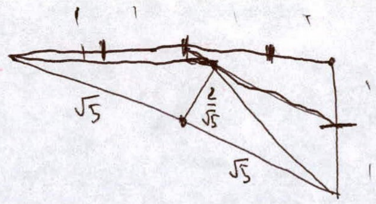
$$[\log_3(\log_2 x)]^2 = 12\log_3([\log_2 x] - \log_2[x])$$

$$\log_2[\log_3 x] \geq 0$$
$$\log_3 x \geq 1,$$

$$[\sin x] - \sin[x]$$

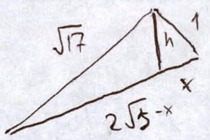


см.



$l = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{5 + \frac{4}{5}} = \sqrt{5\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{29}{5}}$

$\cancel{2l = 10\frac{8}{5} = 11{,}6}$ $2l = 2\sqrt{\frac{29}{5}} = 2\sqrt{5{,}8}$



$17 = h^2 + (2\sqrt{5} - x)^2$; $17 = h^2 + x^2 + 20 - 4\sqrt{5}x$

$1^2 = h^2 + x^2$ $1 = h^2 + x^2$ → $1 = h^2 + \frac{1}{5}$,

$16 = 20 - 4\sqrt{5}x$, $h^2 = \frac{4}{5}$

$4\sqrt{5}x = 4$, $h = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{5}x = 1$,

$x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

досчитать!

N4

$[\log_3(\log_2 x)]^2 - 12\cdot\log_3([\log_2 x]) + 20\cdot\log_3(\log_2([x])) = 0$,

Если всё в целых числах, то:

$7 \geq 1$

$a^2 - 12a + 20a = 0$,

$\left[\begin{array}{l} a = 0 \to \log_3(\log_2 x) = 0 \quad \log_2 x = 1, \; x = 2 \\ a = 8 \to \log_3(\log_2 x) = 8, \; \log_2 x = 3^8 \end{array}\right.$

$x = 2^{3^8}$

$3^8 = 9^4 = 81^2 =$

$\log_3 x > 0$, x

$0 \leq \log_3(\log_2 x) < 1$ $2^{3^8} \leq x < 2^{3^8+1}$

$1 \leq \log_2 x \leq 3$ $2 \leq x < 3$

$2 \leq x \leq 8$

см.

$\frac{3n}{n-3}=12>8,$

$\frac{3n}{n-3}>8,$

$3n>8n-24,$

$24>5n$

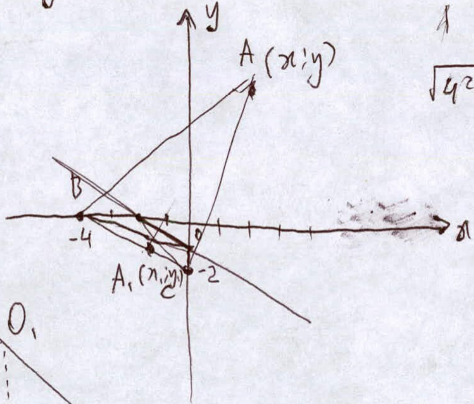
$n<\frac{24}{5}$, $n\le 4$, но т.к. $n\in N$, и $\begin{cases} n\le 4 \\ n>3 \end{cases}$, то $n=4$

Ответ: $\{4\}$

N3

$\left(\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+2)^2}\right)_{min}$ – сумма расстояний от $A(x;y)$ до $B(-4;0)$ и $C(0;-2)$

$|x|+2|y|=2,$



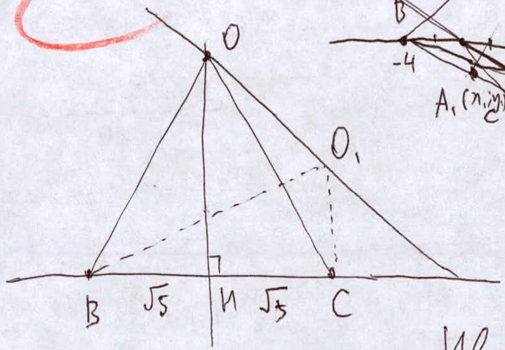
$\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt5$

$|x|+2|y|=2,$

$2|y|=2-|x|,$

$|y|=1-\frac{|x|}{2}$

Т.к. в III коорд. четверти, если график пересекает BC, то $2\sqrt5$ – искомый ответ)



$-y=1+\frac{x}{2},$

$y=-1-\frac{x}{2}$

Не пересекает

$|y|=1-\frac{|x|}{2}$ $|x|=2-2|y|$

$\sqrt{(x-4)^2+\left(1-\frac{|x|}{2}\right)^2}=\sqrt{x^2-8x+16+1-|x|+x^2}=$

$=\sqrt{2x^2-8x+17-|x|}$

~~BC^2~~ $\frac{BO}{\sin\angle C}=\frac{2\sqrt5}{\sin\angle O}$

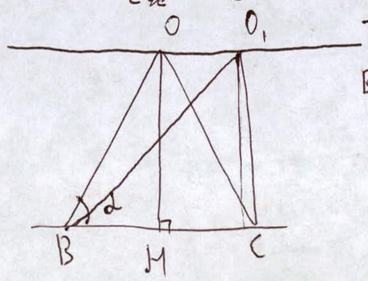
$2x^2-8x+17-|x|=0,$

$a^2+b^2=c^2$

$\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}+1$ $(\sqrt{17}+1)^2=17+1+2\sqrt{17}=18+2\sqrt{17}$

$c+a=\sqrt{a^2+b^2}+a$

$2\sqrt2+2$ $(2\sqrt2+2)^2=8+4+8\sqrt2$



$BC^2=BO_1^2+O_1C^2-2\cdot BO_1\cdot O_1C\cdot\cos O_1=2BO^2-2\cdot BO^2\cdot\cos O=2BO^2(1-\cos O)$

$6+2\sqrt{17}=8\sqrt2,$

$3+\sqrt{17}=4\sqrt2,$

$9+6\sqrt{17}+17=16\cdot2=32$

$6\sqrt{17}=6$

См.