15-51-92-88
(182.1)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 173

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы

по математике

Сукасяна Жоры Оганесовича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«22» марта 2016 года

Подпись участника

15-51-92-88 (182.1)

65 (Шестьдесят пять)

ОЛИМПИАДА ШВТ 2016

Чистовик

№2.

Пусть медленный пробегает за a мин.
Тогда время между встречами равно: $t = \frac{\overbrace{1}^{\text{один круг}}}{\underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{a}}_{\text{разность скоростей}}} = \frac{7a}{a-7} \in N \Rightarrow$

$\Rightarrow 7a \vdots (a-7)$

$(7a - 7(a-7)) \vdots (a-7)$

$49 \vdots (a-7)$

$\left[\begin{array}{l} 1)\ a-7=1 \\ 2)\ a-7=7 \\ 3)\ a-7=49 \end{array}\right.$

1) $a=8$ $\quad t = \frac{7\cdot 8}{1} = 56$

2) $a=14$ $\quad t = \frac{7\cdot 14}{7} = 14\ \varnothing$

3) $a=56$ $\quad t = \frac{7\cdot 56}{49} = 8\ \varnothing$

Ответ: 56 минут

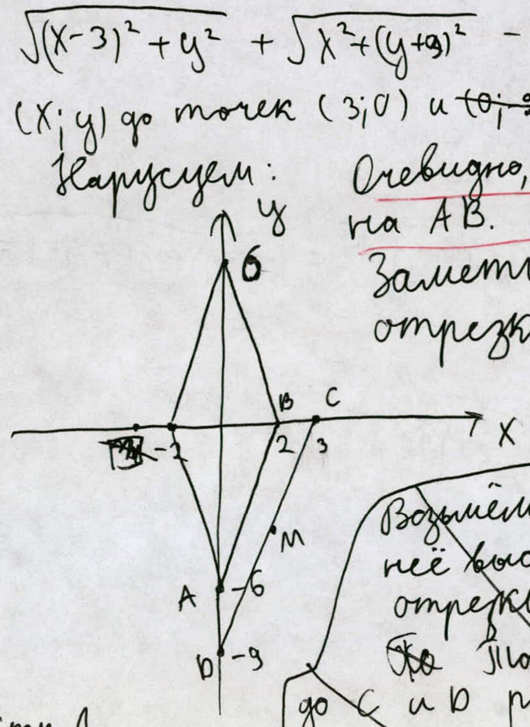
верно

№3.

$3|x|+|y|=6$ – ромб с центром в $(0;0)$ и верш. в $(2;0)$ и $(0;6)$

$\sqrt{(x-3)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+9)^2}$ – сумма расстояний от точки $(x;y)$ до точек $(3;0)$ и ~~$(0;2)$~~ $(0;-9)$

Нарисуем:



Очевидно, что искомая точка находится на AB.

верно

Заметим, что $AB \parallel CD$ (отсек. пропорц. отрезки)

Пусть расст. м/д AB и CD $= h$

$CD = \sqrt{3^2+9^2} = 3\sqrt{1+9} = 3\sqrt{10}$

Возьмём точку на AB и опустим из неё высоту на CD. она разобьёт CD на отрезки длины x и $3\sqrt{10}-x$

~~То~~ Тогда сумма расстояний от взятой точки до C и D равно $\sqrt{h^2+x^2} + \sqrt{h^2+(3\sqrt{10}-x)^2}$

стр. 1.

Черновик

№1.

$\cos 1+\sin 1=\sqrt{2}\left(\sin \frac{\pi}{4}\cdot\cos 1+\sin 1\cdot\cos\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right)=$

$=\sqrt{\frac{1-\cos\left(2+\frac{\pi}{2}\right)}{2}}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{1-\cos\left(2+\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{1-\sin(-2)}=$

(т.к. $\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right)>0$)

$=\cancel{1+\sqrt{}}$ $\sqrt{1+\sin 2}=<\sqrt{1+\sin\frac{2}{3}\pi}<\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}<$

$<\sqrt{1+\frac{1{,}8}{2}}=\sqrt{1{,}9}$

Т.О. $\sin 1+\cos 1<\sqrt{1{,}9}$.

$\sqrt{1{,}9}<\frac{42}{31}$:

$1{,}9<\frac{1764}{961}$

Докажем, что $\cancel{\sin 2<0{,}85}$

$\sin 2<0{,}82$

$\sin 2<0{,}82$

$\sin^2 2<0{,}7225$

$\cos^2 2<0{,}2775$

$\cos 2<0{,}5$

$\cos 2<\cos\frac{2}{3}\pi$

$=\sqrt{1+\sqrt{\frac{1-\cos 4}{2}}}=\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+}}\ \sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos 4}}=$

$\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)}}$

$\frac{5}{4}\pi<4\ \left(\pi<\frac{16}{5}\right)$

$=\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\cos(4-\pi)}}<$

$<\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}}=$ $\left(\frac{\pi}{4}<4-\pi\right)$

$=\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}}}$

Докажем, что $0{,}82>\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}}$ $\quad 0{,}6724>0{,}5+\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{4}<0{,}1724$

См. продолжение: стр. 10

Чистовик №4.

Докажем, что $[\log_a [x]] = [\log_a x]$, где $a \in N$, $a \neq 1$:

$[\log_a x] = t \Leftrightarrow t+1 > \log_a x \geq t \Leftrightarrow a^{t+1} > x \geq a^t \Leftrightarrow a^{t+1} > [x] \geq a^t$ т.к. $a^t \in N$

$t+1 > \log_a [x] \geq t \Leftrightarrow [\log_a [x]] = t$

Пусть $a = [\log_2 \cancel{*}(\log_3 x)] = [\log_2 [\log_3 [x]]]$

$b = \log_2 [\log_3 x] = \log_2 [\log_3 [x]]$

$c = \log_2 (\log_3 [x])$ $\quad [c] = [\log_2 (\log_3 [x])] = [\log_2 [\log_3 [x]]]$

$[\log_3 [x]] \leq \log_3 [x] \Rightarrow b \leq c$

Очевидно, что $[b] = a$ и $[c] = a$

$\left.\begin{array}{l} a^2 - 8b + 15c = 0 \text{ - исх. уравнение} \\ a^2 - 8b + 15c \geq a^2 - 8b + 15b \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 + 7b \leq 0 \Rightarrow 7b \leq 0 \Rightarrow b \leq 0$

$b = \log_2 [\log_3 x] \leq 0 \Rightarrow [\log_3 x] \leq 1 \Rightarrow [\log_3 x] = 1$ (т.к. $[\log_3 x] > 0$

$b = \log_2 [\log_3 x] = \log_2 1 = 0$

$a = [b] = 0$

$a^2 - 8b + 15c = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \log_3 [x] = 1 \Rightarrow [x] = 3$

Докажем, что $[x] = 3$ является достат. условием:

$a = [\log_2 [\log_3 [x]]] = [\log_2 [\log_3 3]] = 0$

$b = \log_2 [\log_3 [x]] = \log_3 [\log_3 3] = 0$

$c = \log_2 (\log_3 [x]) = \log_2 \log_3 3 = 0$

$a^2 + 8b + 15c = 0$ верно.

Значит, $[x] = 3 \Leftrightarrow x \in [3; 4)$

Ответ: $[3; 4)$.

верно

Стр. 3.

Неверно чистовик нет обоснования

Проведём эллипс с фокусами в точках C и D так, чтобы он пересекал AB. Затем будем уменьшать расстояние пока ~~элип~~ эллипс не коснётся AB.

(сумму расст. до фок.)

~~Картинка из AB и CD симметрична отно.~~

~~сер. пер. CD~~

Если эллипс кас. AB в какой-то точке, то он коснётся и в точке, симм. отн. сер. пер. CD.

Но точка касания всего одна.

Значит, она принадлежит сер. пер. CD. неверно

Найдём её:

Сер. CD – M (1,5; −4,5)

норм. вектор к сер. пер. {3; 9} = ~~CD~~ $\overline{DC}$

уравнение сер. пер.: $(x-1,5)\cdot 3 + (y+4,5)\cdot 9 = 0$

$3(2x-3) + 9(2y+9) = 0 \quad 6x - 9 + 18y + 81 = 0 \quad 6x + 18y + 72 = 0$

уравнение AB:

$\frac{x}{2} + \frac{y}{-6} = 1$

$6x - 2y - 12 = 0$

$-\begin{cases} 6x - 2y - 12 = 0 \\ 6x + 18y + 72 = 0 \end{cases}$

$20y + 84 = 0$

$y = \frac{-84}{20} \quad y = \frac{-21}{5}$

$x = \frac{2y+12}{6} = \frac{y+6}{3} = \frac{-21}{15} + 2 = \frac{9}{15}$

Значение выражения:

$\sqrt{\left(\frac{9}{15} - 3\right)^2 + \left(\frac{21}{15}\right)^2} \cdot 2 = \frac{2}{15}\sqrt{(9-45)^2 + 21^2} = \frac{2}{15}\sqrt{1296 + 441} =$

(т.к. расст. до C и D равны)

$= \frac{2}{15}\sqrt{1737} = \frac{6}{15}\sqrt{193} = \frac{2}{5}\sqrt{193}$

Ответ: $\frac{2}{5}\sqrt{193}$

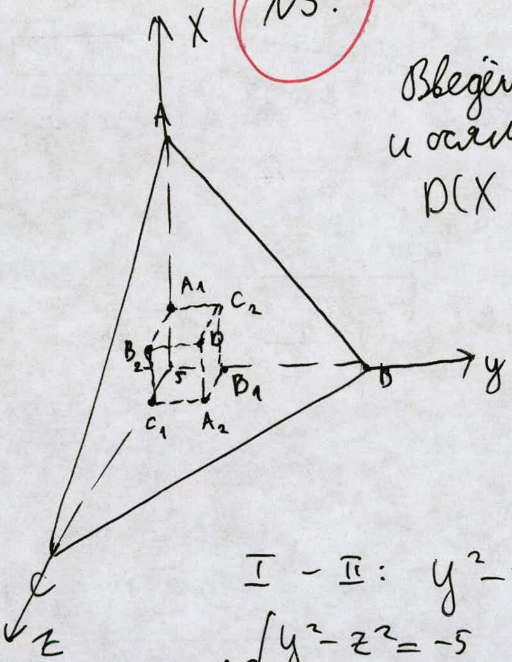
неверно

Стр. 2.

15-51-92-88 (182.1)

Чистовик

N5.



Введём ПДСК с центром S и осями, как на рисунке.

$D(x, y, z)$, $x, y, z > 0$

Известно, что

$$\begin{cases} \text{I } x^2+y^2=5 & (DC_1=C_2S) \\ \text{II } x^2+z^2=10 & (DB_1=B_2S) \\ \text{III } y^2+z^2=13 & (DA_1=A_2S) \end{cases}$$

$\text{I}-\text{II}: \ y^2-z^2=-5$

$$+\begin{cases} y^2-z^2=-5 \\ y^2+z^2=13 \end{cases}$$

$2y^2=8$

$y^2=4 \quad y=2 \quad z=3 \quad x=1$

Пусть $AS=a$, $BS=b$, $CS=c$

Плоскость ABC:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

~~D в этой плоскости:~~

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$$

верно

$$\boxed{\cancel{abc=bc+2ac+3ab} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{abc>3ab} \\ abc>2ac \\ abc>bc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c>3 \\ b>2 \\ a>1 \end{cases}}$$

Пусть $m=\frac{1}{2}b$, $n=\frac{1}{3}c$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1$$

Объём равен $\frac{1}{3}abc=2amn$

При фиксированной сумме обратных произведение минимально, когда числа равны ($\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$ - фикс. ~~⇒ ab min когда a+b – min~~, при сближении чисел с фикс. произв. сумма ↑ ⇒ сумма обратных ↑ ⇒ мы можем каждое число уменьшить в k раз (отношение новой суммы обр. к старой) и сумма обр. не изменится, а произв. уменьшится)

Значит, $a=m=n=\frac{1}{3} \Rightarrow V=2amn=\frac{2}{9}$ Ответ: $\frac{2}{9}$

Верно

стр.4

№1 начало: Чистовик

$$\cos 1 + \sin 1 = \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos 1 + \sin 1\cdot\cos\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\ \sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1-\cos\left(2+\frac{\pi}{2}\right)}{2}} =$$

(т.к. $\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right) > 0$)

$$= \sqrt{1-\cos\left(2+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{1-\sin(-2)} = \sqrt{1+\sin 2} =$$

$$= \sqrt{1+\sqrt{\frac{1-\cos 4}{2}}} = \sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\cos(4-\pi)}}$$

См. продолжение.

Шифр

№ 1. продолжение: Чистовик

$$\cos 1+\sin 1=\sqrt{1+\frac{\sqrt2}{2}\sqrt{1+\cos(4-\pi)}}>\sqrt{1+\frac{\sqrt2}{2}\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{3}}}=$$

$\left(\frac{\pi}{3}>4-\pi\right)$

$$=\sqrt{1+\frac{\sqrt2}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}}=\sqrt{1+\frac{\sqrt3}{2}}>\sqrt{1+\frac{1{,}7}{2}}=\sqrt{1{,}85}$$

Т.о. $\cos 1+\sin 1>\sqrt{1{,}85}$

Докажем, что $\sqrt{1{,}85}>\frac{42}{31}$

$1{,}85>\frac{1764}{961}$

$\Uparrow$

$1777{,}85>1764$

Т.о. $\cos 1+\sin 1>\sqrt{1{,}85}>\frac{42}{31}$

Ответ: $\cos 1+\sin 1$ больше

верно

Черновик

N 4

Докажем, что $[\log_a[x]] = [\log_a x]$, где $a \in N, a \neq 1$:

~~$[\log_a[x]] = t$~~

$[\log_a x] = t$

$t+1 > \log_a x \geq t$

$a \cdot a^t > x \geq a^t$

$\Downarrow$

$a \cdot a^t > [x] \geq a^t$

$t+1 > \log_a[x] \geq t$

$\because$

$[\log_2[\log_3[x]]]^2 - 8\log_2[\log_3[x]] + 15\log_2(\log_3[x]) = 0$

$\overset{\shortparallel}{[c]}$ $\quad \overset{\shortparallel}{b}$ $\quad \overset{\shortparallel}{c}$

~~$a \leq b \leq c$~~

~~$[b]^2 - 8b + 15c = 0$~~

$x \geq 4$

$[b] = [c]$

$[c]+1 > b \geq [c]$

$[c]^2 - 8[c] + 15c - 8 \leq [c]^2 - 8b + 15c \leq [c]^2 - 8[c] + 15c =$

$[c]^2 - 8[c] + 15c - 8 \leq 0$ $\qquad c = a + y$, $a \in N$, $y < 1$

$([c]-4)^2 - 16[c] + 15c - 8 \leq 0$

$16[c] \geq 15c - 8$

$(a-4)^2 - 16a + 15a + 15y - 8 \leq 0$

$(a-4)^2 - a + 15y - 8 \leq 0$

$15y - a - 8 \leq 0$

$y \leq \frac{a+8}{15}$

~~$a < 7$~~

$\cos(1-\frac{\pi}{4}) = 2\cos^2(0{,}5-\frac{\pi}{8})-1$

Черновик

$\sin(\frac{3}{4}\pi-1) = \cancel{\cos(1-\frac{\pi}{4})}$

$= 2\sin(\frac{3}{8}\pi-\frac{1}{2})\cos(\frac{3}{8}\pi-\frac{1}{2})$

$\sin(1+\frac{1}{4}\pi) =$

$\frac{3}{8}\pi-\frac{1}{2} = \frac{3\pi-4}{8} \gtrless \frac{\pi}{6}$

$= \sin\frac{4+\pi}{4} = 2\sin\frac{\pi+4}{8}\cos\frac{\pi+4}{8}$

$\frac{\pi}{4}$ 7

$9\pi-12$ и 4π

5π и 12

$\sin < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{4}<\frac{\pi+4}{8}<\frac{\pi}{3}$

$\cos < \frac{\sqrt{3}}{2}$

1737 | 9
9 | 193
83
27

$3\pi+12$ и 8π

$\frac{\sqrt{6}}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$

441

$\frac{42}{31}$ и $\sqrt{2}\sin(1+\frac{\pi}{4})$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha-1 =$
$= 1-2\sin^2\alpha$
$\sin^2\alpha = 1-\cos$

$\sqrt{2}\sin(1+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sqrt{\frac{-\cos(2+\frac{\pi}{2})+1}{2}} =$

$= \sqrt{1-\cos(2+\frac{\pi}{2})} = \sqrt{1+\sin 2} < \sqrt{1+\sin\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$

× 961
1,9
8649
961
~~9610~~
18259

961
1,85
4805
7688
961
177785

× 961
1,82
1922
7688
961
174902

× 85
85
425
680
7225

3,14 6,28
1,57 4,71

$\sin 2 > 0{,}85$

$\cos 2 < 0{,}3$

2775

55^2
55
275
275
30

$4-\pi > \frac{\pi}{4}$

$4-\pi < \frac{\pi}{3}$

$\frac{4\pi}{3} >$

× 82
82
164
656
6724

$0{,}83 < \sin 2 < 0{,}82$

$\sin 2 < \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$\sqrt{3}$ и 1,64

$\cos 4 < \cos(\pi+\frac{\pi}{4}) < -\frac{1}{2}$

961
1,83
2883
7688
961
175863

Стр. 9

$\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha+\beta)$ Черновик

$\sin 1 + \cos 1 = \sqrt{2}\left(\sin 1 \cos\frac{\pi}{4} + \cos 1 \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}-1\right) = \cos\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{42}{31} \ \sqrt{2}$

$42 \ 31\sqrt{2}$

$1764 < 1922$

$42 \cdot 42 = 84, 168, 1764$

$31 \cdot 31 = 31, 93, 961, 1922$

$1+0{,}8$

$1{,}8$

$\left[\log_2(\log_3 x)\right]^2 + \log_2 \frac{(\log_3 cx3)^{15}}{[\log_3 x]^8}$

a b c

$103 > 45^\circ + \frac{180}{\pi_4} > 102^\circ$

58

$\sqrt{2}\sin 103^\circ >$

$\sqrt{2}\sin 120^\circ$

$a^2 - 8b + 15c = 0$

$a^2 - 8a - b + 15a = 0$

$a^2 + 7a - 8 = 0$

$a^2 + 7b = 0$

$\frac{\pi}{2} < 1 + \frac{\pi}{4} < \frac{2}{3}\pi$

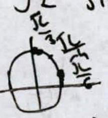
a b

$c = b$

~~$\sqrt{2}\sin 103^\circ =$~~

$\sqrt{2}\sin 1 + \frac{\pi}{4} =$

$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{3}{4}\pi - 1\right)$



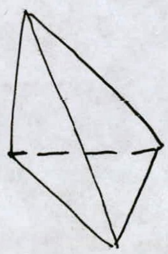
$\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \frac{ab}{a-b} = \frac{7b}{7-b}$

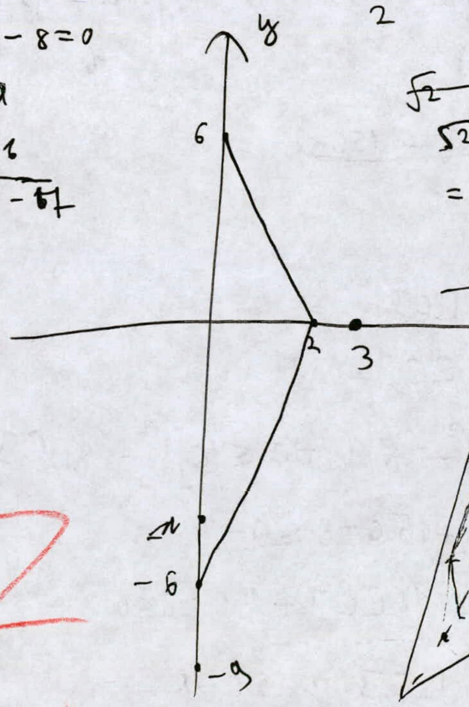
$7b : b-7$

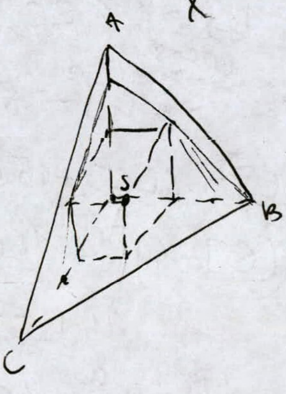
$-49 : b-7$

$b-7=7$

$b-7=49$







$x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c} = \bar{d}$

$36^2 = 216 \cdot 6 = 1296$

~~$x-1$~~

$x^2 + y^2 = 5$

$x^2 + z^2 = 10$

$y^2 + z^2 = 13$

$xyz - \min$

$x+y+z=1$

стр. 8.