24-93-43-84
(182.1)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 173

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори воробьевы горы

по математике

ЧУПРАКОВА Федора Михайловича

фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Выход 12:32 – 12:35

Дата

«22» марта 2016 года

Подпись участника

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

24-93-43-84
(182.1)

80 (восемьдесят)

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

24-93-43-84 (182.1)

Чистовик

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

№1

$\frac{42}{31} = 1\frac{11}{31} > 1\frac{11}{33} = 1\frac{1}{3}$

$\sin 1 + \cos 1 = \cos(\frac{\pi}{2} - 1) + \cos 1 = 2\cos\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4} - 1) =$

$= \sqrt{2}\cdot\cos(1 - \frac{\pi}{4})$

$1 - \frac{\pi}{4} \in$ 1 четв., $1 - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos(1 - \frac{\pi}{4}) > \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) =$

~~$= \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}+1}}{2} > \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (т.к. $\frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{6}$)~~

~~$\Rightarrow \sin 1 + \cos 1 > \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$~~

~~$\frac{42}{31} \vee \frac{\sqrt{6}}{2}$; $\frac{84}{31} \vee \sqrt{6}$. $\frac{84}{31} = 2\frac{23}{31} > 2\frac{2}{3}$.~~

$= \cos\frac{\pi}{12}$. $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$, $\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}}$

$\sin 1 + \cos 1 > \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}$; $\frac{\sqrt{3}}{2} > 0{,}86 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 > 1{,}86$

$\sqrt{1{,}86} \vee \frac{4}{3}$ (т.к. $1{,}72^2 = 2{,}9584$

$1{,}86 \cdot 9 = 16{,}74$

$16{,}74 > 16 \Rightarrow \sin 1 + \cos 1 > \frac{4}{3} > \frac{42}{31}$

Ответ: $\sin 1 + \cos 1 > \frac{42}{31}$

верно

№2

v_1; v_2 – скорости 1 и 2 бегунов.

$\frac{1}{v_1} = 7$ (минут) $\frac{1}{v_2} > 7$ (минут), $\frac{1}{v_2} \in \mathbb{Z}$.

Время между встречами:

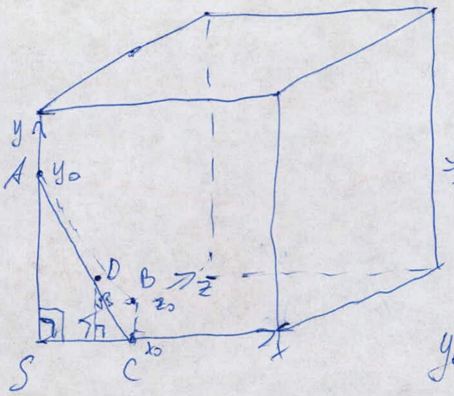
За это время быстрый успел пробежать круг + а, медленный – $a = v_2 t$, t – время между встречами, тогда $v_1 t = v_2 t + 1$ (кругов)

$t = \frac{1}{v_1 - v_2} \geq 16$, $\frac{1}{v_1 - v_2} \in \mathbb{Z}$.

$1 \geq 16v_1 - 16v_2$

$1 \geq \frac{16}{7} - 16v_2$. $16v_2 \geq \frac{9}{7}$, $v_2 \geq \frac{9}{102}$, $\frac{1}{v_2} \leq \frac{102}{9}$

$\Rightarrow \frac{1}{v_2} \in [7; \frac{102}{9}]$; $\frac{1}{v_2} \in \mathbb{Z}$. $7 = \frac{63}{9} \Rightarrow$ есть в-ты $\frac{1}{v_2} = 8, 9, 10, 11$



т. $D \in (ABC)$. т. $D(x', y', z')$

$\rho(D, SC) = DM_1$.

$\Rightarrow DM_1 \perp SC \Rightarrow$

$\rho(D; SC) = \sqrt{y'^2 + z'^2}$, т.к. $\vec{SX} \uparrow\uparrow \vec{SC}$

$y'^2 + z'^2 = 5$

Аналогично получим: $\begin{cases} x'^2 + y'^2 = 10 \\ z'^2 + x'^2 = 13 \end{cases}$

Итого:

$$\begin{cases} y'^2 + z'^2 = 5 \\ x'^2 + y'^2 = 10 \\ z'^2 + x'^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow (3, 1, 2)$$ – т.к. мы выбрали положительные к-ты.

Ур-ние ABC: $Ax + By + Cz + D = 0$; под. $(x_0, 0, 0)$ и т.д.

$A = -\dfrac{D}{x_0}$ и т.д. Получим: $\dfrac{x}{x_0} + \dfrac{y}{y_0} + \dfrac{z}{z_0} = 1$.

$SA \perp (SBC)$, т.к. $SA \perp SB, SC$.

$V_{SABC} = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} SA \cdot S_{BCS} = \frac{1}{6} SA \cdot SC \cdot SB = \frac{1}{6} x_0 y_0 z_0$

Подставим т. D в ур-ние (ABC):

$\dfrac{3}{x_0} + \dfrac{1}{y_0} + \dfrac{2}{z_0} = 1$; $\dfrac{\frac{3}{x_0} + \frac{1}{y_0} + \frac{2}{z_0}}{3} = \dfrac{1}{3} \geq \sqrt[3]{\dfrac{3}{x_0} \cdot \dfrac{1}{y_0} \cdot \dfrac{2}{z_0}}$

по нер-ву о средних. Значит,

$\sqrt[3]{x_0 y_0 z_0} \geq 3\sqrt[3]{6}$

$x_0 y_0 z_0 \geq 3^3 \cdot 6 \Rightarrow V \geq 3^3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} = 27$, $V \geq 27$

$V_{min} = 27$ Ответ: 27

Верно

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

~~$\cos\alpha = \frac{-1+\sqrt{101}}{10}$ ($\sqrt{101} > 10 \dots = 11$~~

$5\sin\alpha = \cos\alpha$; $tg\,\alpha = \frac{1}{5}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$

$a = \frac{3}{\sqrt{10}\sin\alpha} = \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$

Σ р-шиб $= 2a = \frac{6\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$. Ответ: $\frac{6\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$

верно

№4

$[\log_2(\log_3 x)]^2 - 8\log_2([\log_3 x]) + 15\log_2(\log_3[x]) = 0$

и $\log_3[x] > 0$

ОДЗ: $\log_3 x > 0 \Rightarrow x > 1$; $[\log_3 x] > 0 \Rightarrow \log_3 x \geq 1 \Rightarrow x \geq 3$

Пусть $x = N + q$, $N \in \mathbb{N}$, $q \in [0,1)$, $q = \{x\}$

$x = 3^k + p$, $k \in \mathbb{N}$ $(x \geq 3)$

Рассмотрим ; $p \geq q$, т.к. $k \in \mathbb{N}$.

$8\log_2([\log_3 x]) \vee 15\log_2(\log_3[x])$

~~$8\log_2 N \vee 15$~~ $\quad 8\log_2 k \vee 15\log_2\log_3 N$

~~$\log_3^8 k \vee \log_3^{15} N$~~ $\quad k^8 \vee \log_3^{15} N$

$k = \log_3(x-p)$, $N = x - q$

$\log_3^8(x-p) \vee \log_3^{15}(x-q)$

Тут знак „$\leq$", т.к. $8 < 15$; $3 > 1$, $x - p \leq x - q$ (т.к. $p \geq q$)

но $[\log_2\log_3 x]^2 \geq 0$, $\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} [\log_2(\log_3 x)]^2 - 8\log_2([\log_3 x]) + 15\log_2(\log_3[x]) > 0 \\ [\log_2(\log_3 x)]^2 - 8\log_2[\log_3 x] + 15\log_2\log_3[x] = 0 \text{ при} \end{array}\right.$$

нет решения.

$$\begin{cases} [\log_2(\log_3 x)]^2 = 0 \\ 8\log_2[\log_3 x] = 15\log_2\log_3[x] = 0. \end{cases}$$

верно.

$x = 3$: подходит.

$x > 3$: $\log_3 x > 1 \Rightarrow [\log_2\log_3 x] > 0$, „$>0$" + „$\geq 0$" $= 0$ – нет р. – не и.

Ответ: $x = 3$

неверно.

№5

Поместим нашу пирамиду в координатное пр-во.

$S(0,0,0)$; $A(0,y_0,0)$, $B(0,0,z_0)$, $C(x_0,0,0)$. Так можно сделать, т.к. все боковые рёбра попарно $\perp$.

шифр

12 не п., т.к. $9 \cdot 12 > 102$, длина ещё больше,

$\frac{1}{v_1 - v_2} \in \mathbb{Z}$: $v_2 = 11$: $\frac{1}{\frac{1}{7} - \frac{1}{11}} = \frac{11 \cdot 7}{4} \notin \mathbb{Z}$

$v_2 = 10$: $\frac{1}{\frac{1}{7} - \frac{1}{10}} = \frac{70}{3} \notin \mathbb{Z}$

$v_2 = 9$: $\frac{1}{\frac{1}{7} - \frac{1}{9}} = \frac{63}{2} \notin \mathbb{Z}$

$v_2 = 8$: $\frac{1}{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}} = 56 \in \mathbb{Z}$ – подходит.

Ответ: 56 минут

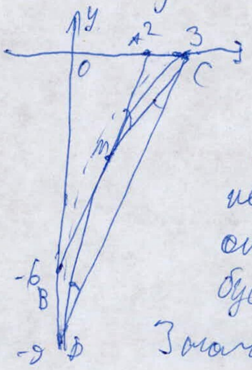
верно

2

№3

$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+9)^2}$ – мин., т.е. мин. Σ р-ний до точек $(3, 0)$ и $(0, -9)$. т.е. Σ р-ний от точки ромба до C и $D \to \min$.

$3|x| + |y| = 6$ – ромб с ц. $(0;0)$, вершины ~~проходит через~~ в $(\pm 2; \pm 6)$



Мин. точка $M \in AB$, ясно, что надо брать AB – остальные точки больше. $\rho(M, C) + \rho(M, D) \to \min$.

Оно будет минимально, когда ломаная DMC наиболее близка к прямой, т.е. $\angle DMC$ как можно тупее. Пусть есть ω, прох. через C, D, M. Если она пересекает AB, то дуга CD со стороны AB будет ~~меньше~~ больше, чем она была бы при касании.

Значит, $\angle DMC \to \max$ при касании. А нам нужна дуга DC со ст. AB мин., тогда $\angle DMC \to$ наиб.

$\angle AMC = \angle MDC$ ($\angle$ кас. хордой, $\angle MDC$ на дугу MC)

но $\angle AMC = \angle MCD$ – $AB \parallel CD$ (т.к. к-ты при x одинаковые: $\frac{6}{2} = \frac{9}{3}$) Значит, ΔMCD – р/б. $MC = MD = a$, $\angle AMC = \angle MCD = \alpha$

$\sin \angle MAC = \sin \angle OAM = \frac{3}{\sqrt{10}}$ по ΔOAB $\left(\frac{6}{\sqrt{6^2 + 2^2}}\right)$

т. sin для ΔAMC: $\frac{a}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = \frac{1}{\sin\alpha}$. $CD = 3\sqrt{10}$.

~~т. cos для ΔMDC: $3\sqrt{10} = a\sqrt{2 - 2\cos(180 - 2\alpha)} = \sqrt{2}$~~

т. sin для ΔMCD: $\frac{3\sqrt{10}}{\sin(180 - 2\alpha)} = \frac{a}{\sin\alpha}$

$\frac{3\sqrt{10}}{2\cos\alpha} = \frac{3}{\sqrt{10}\sin^2\alpha}$

~~$10\sin^2\alpha = 2\cos\alpha$.~~

~~$5 - 5\cos^2\alpha = \cos\alpha$.~~ ~~$5\cos^2\alpha + \cos\alpha - 5 = 0$.~~

~~$\cos\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{101}}{10}$, "–" не п. – $\cos\alpha \geq -1$~~

2

24-93-43-84 (182.1)

Олимпиада ПВГ 2016

Черновик

$\sin 1 + \cos 1$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\frac{42}{31} = 1\frac{11}{31}$

$\sin 1 + \sin(\frac{\pi}{2} - 1) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4} - 1)$

$1 \sim \frac{\pi}{3}$

$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \sim 0,7$

$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos$

$\sin 1 < \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1,732}{2} = 0,87$

$\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - 1)$

$\cos\frac{\pi}{3} - x$

$\frac{11}{31} \vee 0,37$

$31 \cdot 37 \vee 1100$

$\sin 1 + \cos 1 = \cos(\frac{\pi}{2} - 1) + \cos 1 = 2\cos\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{2} - 2) = \sqrt{2}\cdot\cos(2 - \frac{\pi}{2})$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = 2c^2 - 1$

$c = \frac{2\sqrt{3} - 1}{4}$

$v_1 = \frac{1}{7}, \quad v_2 < v_1$

~~вып. $v_1 - v_2$~~

$\sqrt{0,94} > 0,94 > \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{12}$

$v_2 t + 1 = v_1 t$

$t = \frac{1}{\Delta v} = \frac{1}{\frac{1}{7} - v_2} \geq 16.$

$= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\frac{7}{1 - 7v_2} \geq 16.$

$7 \geq 16 - 102 v_2$

$102 v_2 \geq 9.$

$v_2 \geq \frac{9}{102}$

$v_2 < \frac{1}{7} = \frac{9}{63}$

$\frac{1}{v_2} \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{v_2} \in (\frac{63}{9}, \frac{102}{9}]$

$8, 9, 10, 11$

$t = \frac{1}{\Delta v} = \frac{1}{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}} \in \mathbb{Z}$

$t = \frac{1}{\frac{1}{7} - \frac{1}{9}} \notin \mathbb{Z}$

$t = \frac{1}{\frac{1}{7} - \frac{1}{10}} \notin \mathbb{Z}$

$\frac{1}{\frac{1}{7} - \frac{1}{11}} \notin \mathbb{Z}$

$\sqrt{1,732 - 0,7}$

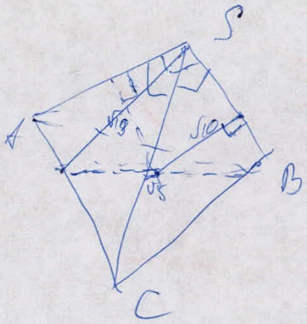
$\sqrt{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}}$

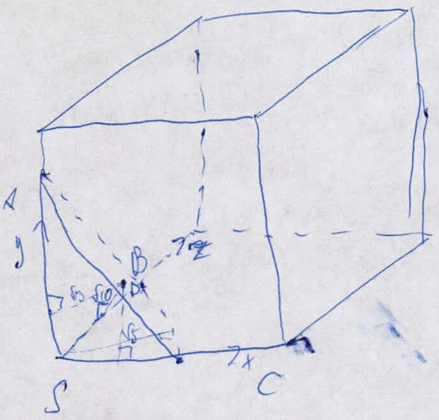
$1,732 \cdot 2 = 3,46$

$\frac{1,55}{2} = 0,781\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$

Сн

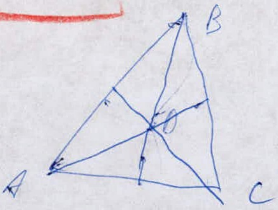




$z^2+y^2=5$

$x^2+y^2=10$

$z^2+x^2=13$



~~SA · BC · h~~

$z=2,\ y=1,\ x=3$

$(3,1,2)$ – есть точка.

$Ax+By+Cz+D=0.$

$A=-\frac{D}{x_0}$

$B=-\frac{D}{y_0}$

$V=\frac{1}{6}SA\cdot SB\cdot SC=$

$=\frac{1}{6}x_0y_0z_0$

$1{,}72^2$ 172^2 344 1204 172 29584

$\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}-1=0.$

$\frac{3}{x_0}+\frac{1}{y_0}+\frac{2}{z_0}=1,\quad \frac{1}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{6}{x_0y_0z_0}}$

$\frac{\frac{3}{x_0}+\frac{1}{y_0}+\frac{2}{z_0}}{3}=\frac{1}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{6}{x_0y_0z_0}}\qquad \sqrt[3]{x_0y_0z_0}\geq 3\sqrt[3]{6}.$

$x_0y_0z_0\geq 6\cdot 27.$

$\boxed{x_0y_0z_0\geq 6\cdot 27}\qquad V\geq 27$

$\cos = -\frac{49}{50}.$

$3\sqrt{10} = a\sqrt{2+\frac{49}{25}} = a\frac{\sqrt{99}}{5}.$

$a = \frac{15\sqrt{10}}{\sqrt{99}}$

зн. $\leq 2a$.

$\log_2([\log_3 x]) = k.$

$2^k \log_8 x + 15$

$[\log_2(\log_3 x)$

$\log_3 x > 0.$

$x > 1.$

$x > 2$

$\log_2[\log_3 x\ 2]$

$[\log_3 x\ 2] = 0$, если

$x < 3$

$x \geq 3$

3 ; $0 - 0 + 0 = 0.$

> 3 ; $> 0 \quad -> 0 + > 0$

$x = n + q = 3^k + p$

$15\log_2(\log_3[x])) \vee 8\log_2[\log_3 x]$ $\quad k = \log_3 x - p$

$15\log_2\log_3 n \quad \vee 8\log_2[\log_3 k.$

$\log_3^{15} n \quad \vee k^8.$

$(x-q)^{15} \vee \quad \log_3^{15}(x-q) \vee \log_3^8(x-p)$

$\min = (x-1)^{15}$

$\geq 2^{15}$

$p \geq q$

$\max = x$

$\log_3^{15}(x-q) > \log_3^8(x-q-\Delta)$

только 3

$15 > 8$

$x - q > x - q - \Delta$

$x - q \geq 3$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

~~От~~ Σ р-ний до (3, 0) и (0, -9) - мин.

$3|x| + |y| = 6.$

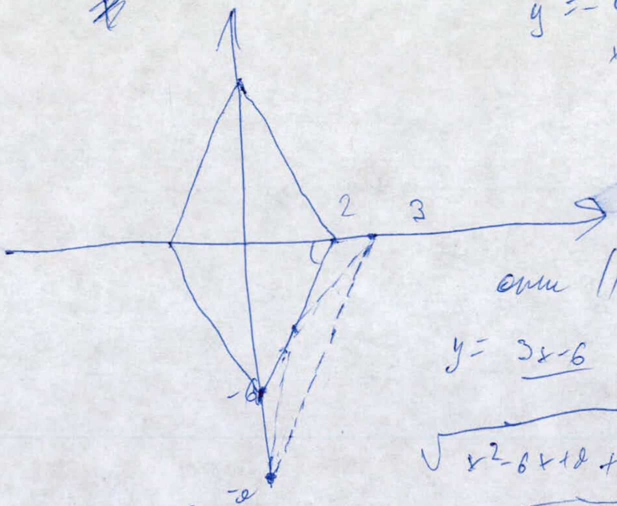
$x \ge 0,\ y \le 0.$

$3x - y = 6.$

$y = -6 + 3x$

$x \ge 0,\ y \ge 0.$

$y = 6 - 3x.$



отв 11.

$\sin = \frac{6}{\sqrt{36+4}} = \frac{6}{2\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$y = 3x - 6$

$\sqrt{x^2 - 6x + 9 + 9x^2 + 36 - 36x} +$

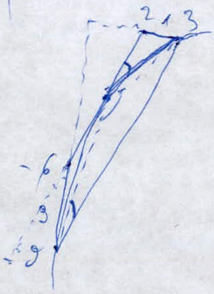
$+ \sqrt{x^2 + 9x^2 + 9 + 18x}$

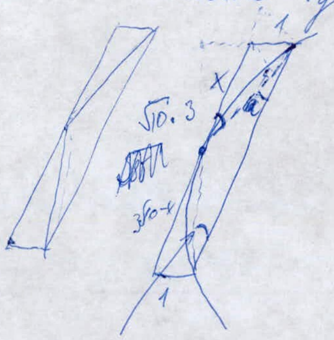
$= \sqrt{10x^2 - 42x + 45} + \sqrt{10x^2 + 18x + 9}$

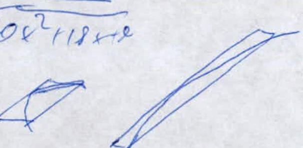
441-450

$\frac{20x - 42}{2\sqrt{10x^2 - 42x + 45}} + \frac{20x + 18}{2\sqrt{10x^2 + 18x + 9}}$

< так можно туда.



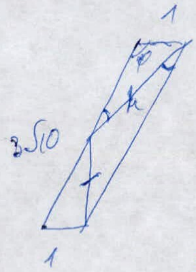




$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(\frac{3}{\sqrt{10}})}$

$tg = 3$

$\boxed{№15}$



$\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \sin^2\alpha$

$a \cdot 3a = x \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}$

$a^2 = \frac{x}{\sqrt{10}}$

$\frac{a}{(\frac{3}{\sqrt{10}})} = \frac{1}{\sin\alpha}$

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}a}.$

$\sin 2\alpha = 2\sin$ $a = \frac{3}{\sqrt{10}\sin}$

$\frac{3\sqrt{10}}{5} = a$

$\cos = \frac{3\sqrt{10}}{2a} = \frac{3\sqrt{10}}{2\frac{3}{\sqrt{10}\sin}} = 5\sin$

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}a}$

$a = \frac{3}{\sqrt{10}\sin}$

$3\sqrt{10} = \frac{3}{\sqrt{10}\sin\alpha}\sqrt{2 - 2\cos\alpha}$

$100\sin^2 = 2 - 2\cos\alpha.$

$50 - 50\cos^2 = 1 - \cos$

$50\cos^2 - \cos - 49 = 0$

$\cos = 1, \boxed{-\frac{49}{50}}$