73-03-73-57
(114.1)

Олимпиада ШВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3-1   город Уфа

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы Горы!

по математике

Шамазова Артура Ирековича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

16^{20} – 16^{24}

+1

Дата

«13» марта 2016 года

Подпись участника

73-03-73-57 (114.1)

Чистовик

Олимпиада ПВГ 2016

1	2	3	4	5
+	+	∓	+	+

85

Восемьдесят пять

Ивашиб (Вашутин)

№1. $x, y \in N$

$x^3 + 2y^2 = 2016$; $x^3 = 2(1008 - y^2) \Rightarrow x^3 \vdots 2 \Rightarrow x \vdots 2$

x	x^3	$\frac{x^3}{2}$	$y^2 = 1008 - \frac{x^3}{2}$
2	8	4	1004
4	64	32	976
6	216	108	900
8	512	256	752
10	1000	500	508
12	1728	864	144

т.к $14^3 = 2744$

то $14 = x$ не уд, т.к $x^3 < 2016$

т.к $12^3 = 1728$, то

$x = 12$ - последнее из четных натуральных чисел, которые могут подойти.

Произведем перебор 6 значений x, записав данные в таблицу слева.

Получили шесть значений y^2

Т.к $1004 = 502 \cdot 2 = 251 \cdot 4$

$976 = 61 \cdot 16$

$752 = 47 \cdot 16$

$508 = 127 \cdot 4$

то они не подходят, т.к. не явл. квадратами

числа $900 = (30)^2$

$144 = (12)^2$ подходят

Итого, получаем пары $(6;30)$ и $(12;12)$.

Ответ: $(6;30)$; $(12;12)$ + ЗАДАЧА РЕШЕНА ВЕРНО

№2 Пусть b_1 - первый член, q - то, на что домножаем каждый раз (~~~~ знаменатель)

Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + b_1q^4 = 93 \\ b_1q^5 + b_1q^6 + b_1q^7 + b_1q^8 + b_1q^9 = 2976 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1(1+q+q^2+q^3+q^4) = 93 \quad (1) \\ b_1q^5(1+q+q^2+q^3+q^4) = 2976 \quad (2) \end{cases}$$

$\frac{(2)}{(1)}$: $q^5 = \frac{2976}{93} = 32$; $q = 2$. $b_1 = \frac{93}{1+2+4+8+16} = \frac{93}{31} = 3$.

Исходное

№4. $\sqrt{2\sin x\cdot\cos x} > \cos^3 x - \sin^3 x + \sin x\cdot\cos x(\sin x - \cos x)$

$$\sqrt{2\sin x\cdot\cos x} > (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \sin^2 x + \cos x\cdot\sin x) - \sin x\cos x(\cos x - \sin x)$$

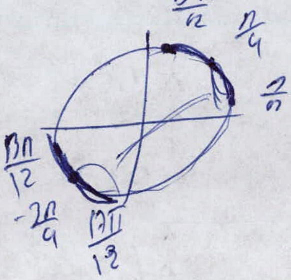
$$\sqrt{2\sin x\cdot\cos x} > (\cos x - \sin x)(1-0)$$

$\sqrt{2\sin x\cdot\cos x} > \cos x - \sin x$ особ. случай $\sin x = \cos x$ верно $x\in$

$\Updownarrow$ $\cos(\frac{\pi}{4}+x)=0$

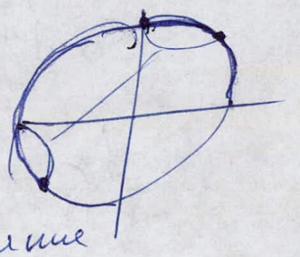
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\sin x\cdot\cos x > (\cos x - \sin x)^2\\ \cos x - \sin \geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x - \sin x < 0\\ 2\sin x\cdot\cos x \geq 0\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 2x > \frac{1}{2}\\ \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}+x) > 0\end{cases} \quad (1)\\ \begin{cases}\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}+x) < 0\\ \sin 2x \geq 0.\end{cases} \quad (2)\end{array}\right.$$

1) $\begin{cases}\frac{\pi}{12}+\pi k < x < \frac{5\pi}{12}+\pi k\\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi n < x < \frac{\pi}{4}+2\pi n\end{cases}$ $k\in Z$, $n\in Z$

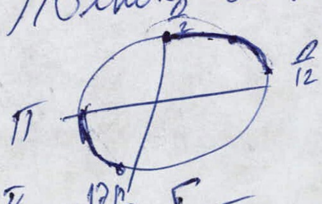


~~пересечение: $x\in \bigcup_{k\in Z}(\frac{\pi}{12}+2\pi k, \frac{\pi}{4}+2\pi k)$~~

2) $\begin{cases}\frac{\pi}{4}+2\pi p < x < \frac{5\pi}{4}+2\pi p\\ \pi r \leq x \leq \frac{\pi}{2}+\pi r\end{cases}$ $p\in Z$, $r\in Z$



Полное объединение



$$x \in \bigcup_{f\in Z}\left(\frac{\pi}{12}+2\pi f; \frac{\pi}{2}+2\pi f\right] \cup \left[\pi+2\pi f; \frac{17\pi}{12}+2\pi f\right)$$

Ответ: x принадлежит каждому из промежутков $\left(\frac{\pi}{12}+2\pi f; \frac{\pi}{2}+2\pi f\right] \cup \left[\pi+2\pi f; \frac{17\pi}{12}+2\pi f\right)$ где $f\in Z$

ЗАДАЧА РЕШЕНА ВЕРНО

+

Th. О 4-х точках трапеции. Черновик

Можно получить $\triangle EBC \sim \triangle EMN$:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{h_1+h_3}{h_3}; \quad MN \cdot h_3 = BC(h_1+h_3)$$

$$h_3(MN - BC) = BC\,h_1$$

$$h_3 = \frac{BC \cdot h_1}{MN - BC} = \frac{2x \cdot h_1}{MN - 2x} = \frac{h_1}{x + \frac{9h_1}{h_1+h_2} - x} = \frac{h_1+h_2}{9}$$

Из подобия $\triangle EBC \sim \triangle EAD$

$$\frac{AD}{BC} = \frac{h_1+h_2+h_3}{h_3}; \quad 20x \cdot h_3 = 2x \cdot h_3 + 2x(h_1+h_2)$$

$$h_3 \cdot 18x = 2x(h_1+h_2); \quad h_3 = \frac{h_1+h_2}{9}$$

~~Из подобия трапеций~~

$$\frac{S_{\triangle BCN}}{S_{\triangle BEK}} = \frac{\frac{xh_1}{2}}{\frac{xh_3}{2}} = \frac{h_1}{h_3}$$

$$\frac{S_{\triangle BEK}}{S_{\triangle AEL}} = \frac{\frac{h_3 x}{2}}{\frac{(h_1+h_2+h_3)10x}{2}} = \frac{1}{100} = \left(\frac{1}{10}\right)^2$$

Черн.

$$\frac{h_1}{h_3} = 9 - \frac{h_2}{h_3}$$

$$\frac{x}{2}\left(9h_3 - h_2 + 2h_2 + \frac{2(9h_3 - h_2)h_2}{9h_3}\right) =$$

$$= \frac{x}{2}\left(9h_3 + h_2 + 2h_2 - \frac{2h_2^2}{h_3^2}\right) =$$

$$\frac{x}{2}\left(h_3 + \frac{9h_1h_2 + 2h_2^2}{9h_3}\right)$$

РЕШЕНИЕ НЕЗАКОНЧЕНО

чистовик

Значит, сумма первых 7 членов $= 93 + b_1q^5 + b_1q^6 =$

$= 93 + b_1q^5(1+q) = 93 + 3\cdot 32\cdot 3 = 93 + 288 = 381$

Ответ: 381 +

задача решена. верно.

$EH_4 = h_3$

№3. ∓

трапеция ABCD $AD = 10BC$

BC, AD - осн.

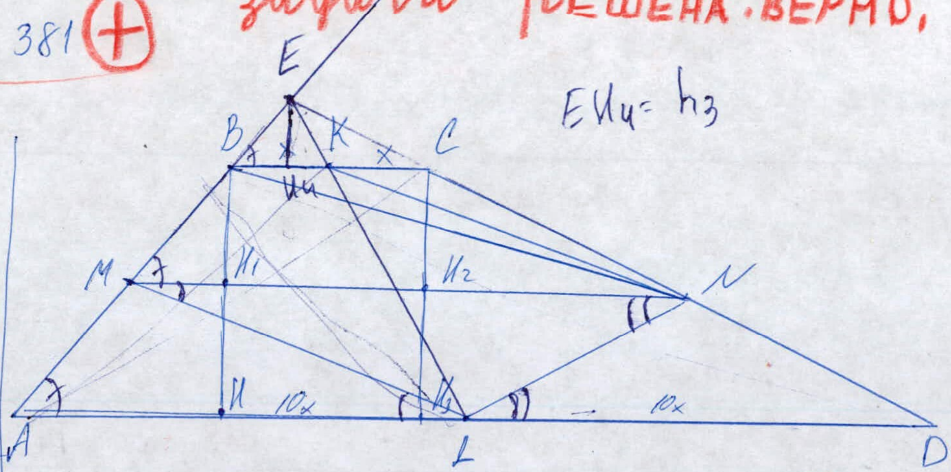
K середина, L середина

$M \in AB$

$N \in CD$

$\frac{AM}{MB}$ - ?

$S_\triangle BKN + S_\triangle MNL = 1 \ldots$



Пусть $BK = x$, $BC = 2x$

$AD = 10\cdot 2x = 20x$; $AL = 10x$

$HH_1 = H_2H_3 = h_2$

$BH_1 = CH_2 = h_1$

$S_\triangle BKN = \frac{BK\cdot BH_1}{2} = \frac{x\cdot h_1}{2}$; $S_\triangle MNL = \frac{MN\cdot h_2}{2}$

$\triangle MBH_1 \sim \triangle ABH$ по I пр; $\frac{AB}{MB} = \frac{BH}{BH_1}$;

$\frac{AM}{MB} + 1 = \frac{HH_1}{BH_1} + 1$; $\frac{AM}{MB} = \frac{HH_1}{BH_1} = \frac{h_2}{h_1}$. Значит, нам данно найти $\frac{h_2}{h_1}$.

Пусть $AH = y$, тогда $H_3D = 18x - y$.

Из того же подобия ($\triangle MBH_1$ и $\triangle ABH$) и ($\triangle CH_2N$ и $\triangle CH_3D$)

$\frac{MH_1}{AH} = \frac{h_1}{h_1+h_2}$, $MH_1 = \frac{yh_1}{h_1+h_2}$; $\frac{H_2N}{H_3D} = \frac{h_1}{h_1+h_2}$; $H_2N = \frac{h_1(18x-y)}{h_1+h_2}$

$MN = MH_1 + H_1H_2 + H_2N = \frac{yh_1}{h_1+h_2} + 2x + \frac{h_1(18x-y)}{h_1+h_2} = 2x + \frac{18xh_1}{h_1+h_2}$

$S = S_\triangle BKN + S_\triangle MNL = \frac{xh_1}{2} + \frac{\left(2x + \frac{18xh_1}{h_1+h_2}\right)\cdot h_2}{2} =$

$= \frac{x}{2}\left(h_1 + 2h_2 + \frac{18h_1h_2}{h_1+h_2}\right).$

формула площадей двух △ найдена верно *

Известно, что если продолжить боковые стороны, то точка их пересечения будет лежать на KL (продолжении)

* отсюда легко вывести формулу площади через соотн $h_1/h_2 = AM/MC$

73-03-73-57 (114.1)

Черновик

Олимпиада ПВГ 2016

№5

$$f(x) = \frac{2x-1}{4x^2-4x+5} \qquad \frac{D}{4} = 4-20<0, \text{ знам} >0$$

$$f'(x) = \cancel{2\cdot(8x-4)} \ldots \frac{2(4x^2-4x+5)-(2x-1)(8x-4)}{(4x^2-4x+5)^2} =$$

$$= \frac{8x^2 - \cancel{8x} + 10 - 16x^2 \cancel{+8x} + 8x - 4}{(4x^2-4x+5)^2} =$$

$$= \frac{-8x^2+8x+6}{(4x^2-4x+5)^2} = \frac{2(-4x^2+4x+3)}{(4x^2-4x+5)^2} =$$

$$\frac{D}{4} = 4+12 = 4^2 \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{-2+4}{-4} \\ x = \frac{-2-4}{-4} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{array}\right.$$

$$= \frac{-8\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{(4x^2-4x+5)^2}.$$

$f'(x)$: $-$; $-\frac{1}{2}$; $+$; $\frac{3}{2}$; $-$; x

$f(x)$: $\searrow$; $-\frac{1}{2}$; $\nearrow$; $\frac{3}{2}$; $\searrow$

$x = -\frac{1}{2}$ – точка min $\quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-2}{1+2+5} = -\frac{1}{4}.$

$x = \frac{3}{2}$ – точка max $\quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{9-6+5} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}}$ принимает min значени при $x = -\frac{1}{2}$

$$16^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{2}$$

и max знач. при $x = \frac{3}{2}$

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2. \qquad \frac{1}{2} \le 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \le 2$$

знач $a \in [2;+\infty)$ $b \in (-\infty;\frac{1}{2})$

Ответ: $a \in [2;+\infty)$, $b \in (-\infty;\frac{1}{2})$.

Задача решена верно (+)

73-03-73-57 (14.1)

Черновик

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

1. $x^3 = 2016 - 2y^2 = 2(1008 - y^2)$

x	x^3	$\frac{x^3}{2}$	$1008 - \frac{x^3}{2} = y^2$
2	8	4	1004
4	64	32	976
6	216	108	900
8	512	256	752
10	1000	500	508
12	1728	864	$144 = 12^2$

$1008 - 32 = 976$

$1008 - 256 = 752$

$136 + 8 = 144$

$36 \cdot 6 = 216$

$64 \cdot 8 = 512$

$12 \cdot 12 = 144$, $144 \cdot 12 = 1728$

$14 \cdot 14 = 196$, $196 \cdot 14 = 2744$ нечет

$864 \cdot 2 = 1728$

$1728 : 144$

752

$\frac{x^3}{2} = 1008 - y^2$

$\frac{508}{2} = 254 \cdot 2 = 127 \cdot 4$, 127 не явл кв.

$y^2 = 1008 - \frac{x^3}{2}$

$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

$$\begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + b_1q^4 = 93 \\ b_1q^5 + b_1q^6 + b_1q^7 + b_1q^8 + b_1q^9 = 2976 \end{cases}$$

$$\frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} = 93$$

$$\frac{b_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = 3069$$

$2976 + 93 = 3069$

$$\begin{cases} b_1(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) = 93 \\ b_1q^5(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) = 2976 \end{cases}$$

$q^5 = \frac{2976}{93}$

$2976 : 93 = 32$

$752 = \cancel{376} \cdot 2 =$

$188 \cdot 4$

$376 : 2 = 188$

$94 \cdot 8 = 47 \cdot 16$

$q^5 = 32 = 2^5$

$q = 2$

$b_1(1 + 2 + 4 + 8 + 16) = 93$

$b_1 = \frac{93}{31} = 3$

$S_7 = S_5 + b_1q^5 + b_1q^6 =$

$= 93 + b_1q^5(1 + q) =$

$= 93 + 3 \cdot 32(1 + 2) = 93 + 9 \cdot 32 =$

$= 93 + 288 = 381$

$32 \cdot 9 = 288$

$288 + 93 = 381$

$1004 = 502 \cdot 2 = 251 \cdot 4$

$976 = \cancel{480} \cdot 488 \cdot 2 = 244 \cdot 4 = 122 \cdot 8 = 61 \cdot 16$

$\cancel{194 \cdot 8}$

$976 : 2 = 488$

$251 : 13$

$251 : 17$

$61 \cdot 16 = 976$

$24 \cdot 24 = 576$

$47 \cdot 16 = 752$

24

$\sqrt{2\sin x\cdot\cos x} > \cos^3 x - \sin^3 x + \sin x\cdot\cos x(\sin x - \cos x)$ перевёл

$\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x\cdot\sin x + \sin^2 x)$

$(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cancel{\cos x\cdot\sin x} + \sin^2 x - \cancel{\sin x\cos x}) =$

$= (\cos x - \sin x)\cdot 1 = \cos x - \sin x$

$\cos\frac{\pi}{12}$ 2

$\sqrt{2\sin x\cdot\cos x} > \cos x - \sin x$

$\Leftrightarrow$

$\cos 30° = 1 - 2\sin^2 15$

$\sin 15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}$

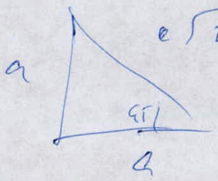
$\frac{1-\frac{\sqrt3}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt3}{4}$

$\sqrt{\sin 2x}$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\sin x\cdot\cos x > (\cos x - \sin x)^2 \\ \cos x - \sin x \geq 0\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}\cos x - \sin x < 0 \\ 2\sin x\cdot\cos x \geq 0\end{cases} & (2)\end{array}\right.$

$\sin\frac{\pi}{6}$

$\sqrt{\frac{1}{7}}$



$\sqrt{2}\cos$

$\cos x - \sin x = \frac{\sqrt2}{\sqrt2}\left(\frac{1}{\sqrt2}\cos x - \frac{1}{\sqrt2}\sin x\right) =$

$\cos - \sin$

$= \frac{1}{\sqrt{\frac{2-\sqrt3}{4}}} - \sqrt{\frac{2-\sqrt3}{4}} =$

$\sqrt2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x\right)$

$\sqrt2$

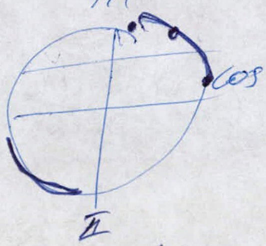
$\cos\frac{x}{2} =$

$\cos 15° = \frac{2\sin 30°}{2\sin 15} = \frac{\frac{1}{2}}{2\cdot\sqrt{\frac{2-\sqrt3}{4}}}$

1) $2\sin x\cos x > \cos^2 x + \sin^2 x - 2\cos x\cdot\sin x$

$4\sin x\cdot\cos x > 1$

$\begin{cases}\sin 2x > \frac{1}{2} \\ \sqrt2\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) > 0\end{cases}$ $\begin{cases}\sin 2x > \frac{1}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) > 0\end{cases}$



$(2x+1)(-2x+3)$

$-4x^2$

$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

$\frac{\pi}{12} + \pi k < x < \frac{5\pi}{12} + \pi k$

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < \frac{\pi}{4} + x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$

$\pi + 2\pi n \leq 2x \leq 2\pi n$

$\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} + \pi n \leq$

$4x^2 + 4x + 3 \geq 0$

$\frac{\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{4}$

Черновик

$$S = \frac{xh_1}{2} + \frac{\left(\frac{18xh_1}{h_1+h_2} + 2x\right)\cdot h_2}{2} =$$

$$= \frac{xh_1 + \frac{18xh_1h_2}{h_1+h_2} + 2xh_2}{2} =$$

$$= \frac{xh_1(h_1+h_2) + 2xh_2(h_1+h_2) + 18xh_1h_2}{(h_1+h_2)2} =$$

$$= \frac{xh_1^2 + xh_1h_2 + 2xh_2^2 + 2xh_1h_2 + 18xh_1h_2}{(h_1+h_2)2} =$$

$$= \frac{xh_1^2 + 2xh_2^2 + 21xh_1h_2}{2(h_1+h_2)} = \frac{x}{2(h_1+h_2)}$$

x

$$S_{\triangle MNL} = S_{AMND} - S_{\triangle AML} - S_{\triangle LND} =$$

$$= \frac{(MN+AD)}{2}\cdot H_1H - \frac{AL\cdot H_1H}{2} - \frac{LD\cdot H_1H}{2} =$$

$$= \frac{H_1H}{2}($$

$$2\, S_{\triangle BKN} = \frac{(2x+MN)}{2}\cdot h_1 - \frac{h_1\cdot MN}{2}$$

$$\frac{h_2\cdot MN}{2\cdot 2}\cdot 2 = \frac{MN\cdot h_2}{2}$$

$$h_1^2 + h_1h_1 + 2h_1^2 + 2h_1h_2$$

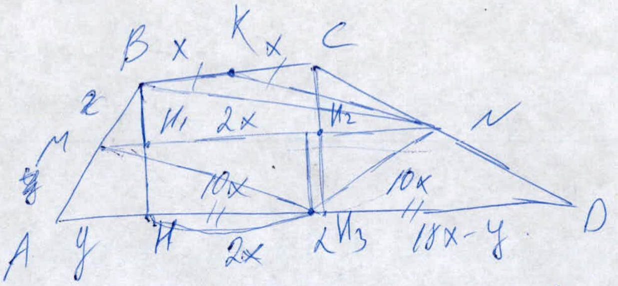
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

шифр

черновик

$AD = 10BC$

$\frac{y}{z}$ - ?



$2x < MN < 20x$

$S_{\triangle BKN} + S_{\triangle MNL} = \max$

~~$S_{\triangle BKN}$~~ =

$\triangle MBH_1 \sim \triangle ABH$, значит $\frac{AM}{MB} =$

$\frac{AB}{MB} = \frac{BH}{BH_1} = \frac{AM + BM}{MB} = \frac{AM}{BM} + 1$

$\frac{BH}{BH_1} = \frac{BH_1 + HH_1}{BH_1} = 1 + \frac{HH_1}{BH_1} = \frac{AM}{BM} + 1$

$\frac{HH_1}{BH_1} = \frac{AM}{BM}$ - ?

$HH_1 = h_2$

$BH_1 = h_1$

$S_{\triangle BKN} = \frac{BK \cdot BH_1}{2} = \frac{x \cdot h_1}{2}$

$\frac{h_2}{h_1}$ - ?

$S_{\triangle MNL} = \frac{MN \cdot h_2}{2}$

$\frac{MH_1}{AH} = \frac{h_1}{h_1 + h_2}$; $MH_1 = \frac{yh_1}{h_1 + h_2}$

$S = \frac{xh_1}{2}$

$\frac{H_2N}{H_3D} = \frac{h_1}{h_1 + h_2}$; $H_2N = \frac{h_1(18x - y)}{h_1 + h_2} =$

$MN = MH_1 + H_1H_2 + H_2N = \frac{yh_1}{h_1 + h_2} + 2x + \frac{h_1(18x - y)}{h_1 + h_2} =$

$= \cancel{\frac{yh_1 + 18xh_1 - h_1y}{h_1 + h_2}} + 2x =$

$= \frac{18xh_1}{h_1 + h_2} + 2x$

Черновик

$h_1 + h_2 = 9h_3$

$\frac{h_1}{h_3} = 9 - \frac{h_2}{h_3}$

$\sqrt{a} > b$

$\frac{h_3}{2x} = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{}$

$\frac{h_3 + 1}{2x} = \frac{h_3 + h_2}{2x + \frac{18 x h_1}{h_1 + h_2}}$

$\frac{h_1}{x} =$

$\frac{x h_1}{2} = x h_2$

$\frac{\frac{x h_1}{2} =}{\frac{x h_3}{2}} = \frac{h_1}{h_3}$