08-26-89-18
(114.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

г. Уфа

Вариант 3-1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы Горы

по Математике

Юдина Даниила Рустамовича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата

«13» марта 2016 года

Подпись участника
ЯД

08-26-89-18 (114.2)

Чистовик

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

1	2	3	4	5
+	+	−	+	∓

65

n1. $x^3 + 2y^2 = 2016$, $x, y \in N$

$x^3 = 2(1008 - y^2)$

$\Rightarrow (1008 - y^2) \vdots 4 \Rightarrow y^2 \vdots 4 \quad y \vdots 2$

$x^3 = 8(252 - \frac{y^2}{4})$

$x^3 = 2^3 \cdot (252 - \frac{y^2}{4}) \qquad x^3 = 2^3 \cdot a^3 \qquad \underline{x = 2a}$

$252 - \frac{y^2}{4} = a^3$, $a \in N$

$252 - \frac{y^2}{4} > 0$ т.к. $x, y \in N \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$

$\{1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3\} \in 252 \quad 7^3 > 252$

$a = 1$: $252 - \frac{y^2}{4} = 1 \quad \frac{y^2}{4} = 251 \quad y^2 = 2^2 \cdot 251 \quad 251 = b^2$ - не уд. $y \notin N$

$a = 2$: $252 - \frac{y^2}{4} = 8 \quad \frac{y^2}{4} = 244 \quad y^2 = 2^2 \cdot 244 \quad 244 = b^2$ - не уд. $y \notin N$

$a = 3$: $252 - \frac{y^2}{4} = 27 \quad \frac{y^2}{4} = 225 \quad y^2 = 2^2 \cdot 15^2 \quad y = 30$ - уд.

$a = 4$: $252 - \frac{y^2}{4} = 64 \quad \frac{y^2}{4} = 188 \quad y^2 = 2^2 \cdot 188 \quad b^2 = 188$ - не уд. $y \notin N$

$a = 5$: $252 - \frac{y^2}{4} = 125 \quad \frac{y^2}{4} = 127 \quad y^2 = 2^2 \cdot 127 \quad b^2 = 127$ - не уд. $y \notin N$

$a = 6$: $252 - \frac{y^2}{4} = 216 \quad \frac{y^2}{4} = 36 \quad y^2 = 2^2 \cdot 6^2 \quad y = 12$ - уд.

$y = 30 \quad a = 3 \Rightarrow x = 6 \qquad 6^3 + 2 \cdot 30^2 = 216 + 1800 = 2016$ - уд.

$y = 12 \quad a = 6 \Rightarrow x = 12 \qquad 12^3 + 2 \cdot 12^2 = 144(12 + 2) = 1440 + 576 = 2016$ - уд.

Ответ: $(12; 12); (6; 30)$ ⊕ Задача решена верно

Чистовик

№2.

$S_{1-5} = 93$ $\qquad S = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$

$S_{5-10} = 2976$

$S_{1-7} - ?$

$$\frac{b_1 \cdot (q^5-1)}{q-1} = 93$$

$$\frac{b_1 \cdot (q^{10}-1)}{q-1} - 93 = 2976$$

$$\frac{b_1 \cdot (q^{10}-1)}{q-1} = 3069$$

$$\frac{b_1}{q-1} = \frac{93}{q^5-1} \qquad \frac{b_1}{q-1} = \frac{3069}{(q^{10}-1)}$$

$$\frac{93}{q^5-1} = \frac{3069}{q^{10}-1} \qquad 93(q^{10}-1) = 3069(q^5-1)$$

$$93 \cdot q^{10} - 3069 \cdot q^5 + 2976 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} 3069 & 93 \\ -279 & 33 \\ 279 & \\ -279 & \\ 0 & \end{array}$$

$q^5 = x \qquad 93x^2 - 3069x + 2976 = 0$

$$x^2 - 33x + 32 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 33 \\ x_1 \cdot x_2 = 32 \end{cases} \qquad x_1 = 1 \quad x_2 = 32$$

$q^5 = 1$ $\quad q = 1$ - не уд. т.к. тогда все члены одинаковы, а $93 \not\vdots 5$

$q^5 = 32 \quad q = 2$

$$\frac{b_1}{q-1} = \frac{93}{2^5-1} = 3 \qquad S_{1-7} = \frac{b_1(q^7-1)}{q-1}$$

$$S_{1-7} = 3 \cdot (2^7-1) = 3 \cdot 127 = 381$$

Ответ: 381 + Задача решена верно.

Итоговин

№ 5.

$$b < 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \le a \quad x \in R$$

$16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} > 0$ – всегда, т.е при любых X.

$$16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} = 2^{\frac{4(2x-1)}{4(x^2-x+\frac{5}{4})}} = 2^{\frac{2x-1}{x^2-x+\frac{5}{4}}}$$

$x^2-x+\frac{5}{4} = 2x-1$ $\qquad$ $x^2-x+\frac{5}{4} \gtrless 2x-1$

$x^2-3x+2\frac{1}{4} = 0$ $\qquad$ $x^2-3x+2\frac{1}{4} \gtrless 0$

$D = 9-4\cdot\frac{9}{4} = 0$ $\qquad$ $(x-\frac{3}{2})^2 \gtrless 0$

$(x-\frac{3}{2})^2 = 0$

$(x-\frac{3}{2})^2 \ge 0$, при любых X

т.е $x^2-x+\frac{5}{4} \ge 2x-1 \Rightarrow \frac{2x-1}{x^2-x+\frac{5}{4}} \le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{\frac{2x-1}{x^2-x+\frac{5}{4}}} \le 2.$

НЕ НАЙДЕНО ЧИСЛО K, ТАКОЕ ЧТО $\frac{2x-1}{x^2-x+\frac{5}{4}} \ge K$

тогда $b = 0$ $\quad a = 2$

$$0 < 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \le 2$$

Ответ: $a = 2,\ b = 0$

В ОТВЕТЕ должны быть даны ИНТЕРВАЛЫ, в КОТОРЫХ ЛЕЖАТ a и b.

$\frac{-}{+}$

Чистовик.

№4 продолжение

пересечем (1) и (2)

$x \in \left(\frac{\pi}{12}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n; -\frac{7\pi}{12}+2\pi n\right)$;

объединим I и II и I'

$x \in \left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi n; -\frac{7\pi}{12}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{12}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right] \cup$

$\cup \left(\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right] \cup \left[\pi+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right]$

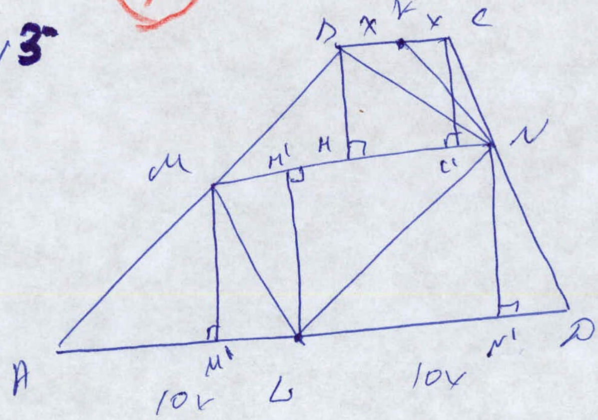
$x \in \left(\frac{\pi}{12}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right] \cup \left[\pi+2\pi n; \frac{17\pi}{12}+2\pi n\right)$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{12}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right] \cup \left[\pi+2\pi n; \frac{17\pi}{12}+2\pi n\right)$

Задача решена верно.

+

№5



$S_{BKN}=\frac{1}{2}BK\cdot BH$

$S_{MNL}=\frac{1}{2}MN\cdot LH'=\frac{1}{2}MN\cdot MM'$

$\frac{AM}{MB}=\frac{AM'}{MH}=\frac{MM'}{BH}=\frac{NN'}{CC'}=\frac{DN'}{NC'}=\frac{DN}{NC}$

$MN=20x-AM'-DN'=2x+MH+NC'$

$MM'+BH=CC'+NN'=h$

РЕШЕНИЕ НЕ ЗАКОНЧЕНО

−

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Чистовик

№4.

$\sqrt{2\sin x\cos x} > \cos^3 x - \sin^3 x + \sin x\cos x(\sin x - \cos x)$

ОДЗ. $\sin x\cdot\cos x \geq 0$ $\quad x\in[2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n]\cup[\pi+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n]$

$\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x\cdot\sin x + \sin^2 x) =$

$= (\cos x - \sin x)(1 + \cos x\cdot\sin x)$

$\cos^3 x - \sin^3 x + \sin x\cos x(\sin x - \cos x) = (\cos x - \sin x)(1 + \cos x\cdot\sin x -$

$- \sin x\cdot\cos x) = (\cos x - \sin x)\cdot 1$

$\sqrt{2\sin x\cos x} > \cos x - \sin x$

I. $\cos x - \sin x < 0$ $\quad \sin x > \cos x$

$\cos x - \sin x = 0$

$\cos x = \sin x$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ (I')

$x\in(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n)$

учтём ОДЗ. $x\in(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n]\cup[\pi+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n)$

II $\cos x - \sin x > 0$ $\quad \cos x > \sin x$

$x\in(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n)$

учтём ОДЗ $x\in(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n]\cup(2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n)$ (1)

$\sqrt{2\sin x\cos x} > |\cos x - \sin x|$

$\sin 2x > \cos^2 x - \sin 2x + \sin^2 x$

$2\sin 2x > 1$ $\qquad 2x\in(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n)$

$\sin 2x > \frac{1}{2}$ $\qquad x\in(\frac{\pi}{12}+\pi n;\ \frac{5\pi}{12}+\pi n)$ (2)

продолжение →

08-26-89-18
(114.2)

Черновик

№1. $x^3+2y^2=2016$

$x,y \in N$

$x^3=2(1008-y^2)$ $\quad 1008-y^2>0$

$y \leq 100$

$(1008-y^2):4$

$y:2$

$x^3=8\left(252-\frac{y^2}{4}\right)$

$252-\frac{y^2}{4}=a^3 \quad , a \in N$

$x^3=2^3 \cdot a^3 \quad x=2a$

$\{1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3\} \in 252$ $\quad y^2>252$

$a \in (1;2;3;4;5)$

$a=1: \quad 252-\frac{y^2}{4}=1 \quad \frac{y^2}{4}=251 \quad y^2=1004 \quad y \notin N$

$a=2: \quad 252-\frac{y^2}{4}=8 \quad \frac{y^2}{4}=244 \quad y^2=976 \quad y \notin N$

$a=3 \quad 252-\frac{y^2}{4}=27 \quad \frac{y^2}{4}=225 \quad y^2=900 \quad y=30; x=6$

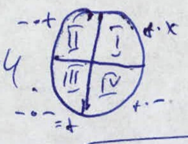
$a=4 \quad 252-\frac{y^2}{4}=64 \quad \frac{y^2}{4}=188 \quad y^2=752 \quad y \notin N$

$a=5 \quad 252-\frac{y^2}{4}=125 \quad \frac{y^2}{4}=127 \quad y^2=2^2 \cdot 127 \quad y \notin N$

$a=6 \quad 252-\frac{y^2}{4}=216 \quad \frac{y^2}{4}=36 \quad y^2=4 \cdot 36=2^2 \cdot 6^2=12^2 \quad y=12. \quad x=12$

$12^3+2 \cdot 12^2=144(12+2)=144 \cdot 14=1440+576=2016.$

$216+1800=2016$ $\quad$ Ответ: $(12;12); (6;30)$

№4  (*) $\sin x \cdot \cos x > 0 \in$ I и III четвертям.

$$\sqrt{2\sin x\cos x} > \cos^3 x - \sin^3 x + \sin x \cdot \cos x(\sin x - \cos x)$$

$$\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x)$$

$$= (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x - \sin x \cdot \cos x) =$$

$$= (\cos x - \sin x)(\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{=1})$$

Ирковен

I. $\cos x - \sin x < 0$ $\quad \sin x > \cos x$

~~$\cos x < \sin x$~~ $\quad \cos x - \sin x = 0$

$\cos x = \sin x$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$

$x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right)$

учтем (*) $x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \cup \left[\pi + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right)$

II. $\cos x - \sin x > 0$ $\quad \cos x > \sin x$

$x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$

учтем (*) $x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$

~~$2\sin x\cos x > (\cos^2 x - 2\sin x\cos x + \sin^2 x)($~~

$$\sqrt{2\sin x\cos x} > (\cos x - \sin x)$$

$2\sin x\cos x > \cos^2 x - 2\sin x\cos x + \sin^2 x$

$2 \cdot 2\sin x\cos x > 1$ $\quad 2x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$

$\sin 2x > \frac{1}{2}$ $\quad x \in \left(\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{5\pi}{12} + \pi n\right)$

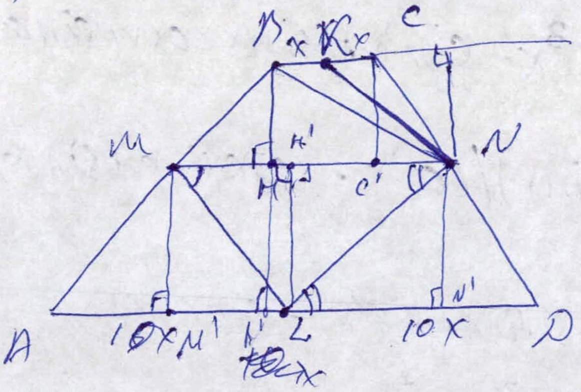
$$x \in \left(\frac{\pi}{12} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{7\pi}{12} + 2\pi n\right)$$

Черновик

№3.

$S_{BKN}+S_{MNL}=max.$

$\frac{AM}{MB}$ – ?



$BB'=h$

$\frac{AM}{AB}=\frac{MM'}{BB'}=\frac{y}{h}$

$BH=h-y$

$S_{BKN}=\frac{1}{2}BK\cdot BH$ $\quad S_{MNL}=\frac{1}{2}MN\cdot LH'=\frac{1}{2}MN\cdot MM'$

$\frac{AM}{MB}=\frac{AM'}{MH}=\frac{MM'}{BH}=\frac{NN'}{CC'}=\frac{DN'}{NC'}=\frac{DN}{NC}$

$MN=20x-AM'-DN'=2x+MH+NC'$

№5.

$b<16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}}\le a$

$16^{\frac{2x-1}{4(x^2-x+1,25)}}=2^{\frac{2x-1}{x^2-x+\frac{5}{4}}}=2^{\frac{2x-1}{(x-\frac{1}{2})^2+1}}$

$\boxed{b=0. \quad a=2.}$

$x^2-x+\frac{5}{4}\ge 2x-1$

$x^2-3x+2\frac{1}{4}\ge 0$

$D=9-4\cdot\frac{9}{4}=0$

$(x-\frac{3}{2})^2\ge 0 \quad x\in R$

$\Rightarrow \frac{2x-1}{x^2-x+\frac{5}{4}}\le 1 \Rightarrow 2^{\frac{2x-1}{x^2-x+\frac{5}{4}}}\le 2.$

$16^y>0$ – всегда

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$1+2+4+8=15$

Черновик

№2.

$S_5=93$

$S_{5+10}=2976$

$S_7-?$

$S=\frac{b_1\cdot(q^n-1)}{q-1}=$

$\frac{b_1\cdot(q^5-1)}{q-1}=93$

$\frac{b_1}{q-1}=\frac{93}{q^5-1}$

$\frac{b_1\cdot(q^{10}-1)}{q-1}-93=2976$

$\frac{b_1}{q-1}=\frac{3069}{q^{10}-1}$

$\frac{b_1\cdot(q^{10}-1)}{q-1}=3069$

$\frac{93}{q^5-1}=\frac{3069}{q^{10}-1}$

$93(q^{10}-1)=3069(q^5-1)$

$93\cdot q^{10}-3069\cdot q^5+2976=0$

$3069 : 93 = 33$, 279, 279

$q^5=x$

$93x^2-3069x+2976=0$

$x^2-33x+32=0$

$\begin{cases}x_1+x_2=33\\x_1\cdot x_2=32\end{cases}$ $x_1=1$, $x_2=32$.

$q^5=1$ $q=1$ – не уд.

$q^5=32$ $q=2$

$\frac{b_1}{q-1}=\frac{93}{2^5-1}=3$

$S_7=\frac{b_1(q^7-1)}{q-1}=$

$=3\cdot(2^7-1)=3\cdot(128-1)=3\cdot127=$

$=381$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!