47-21-97-81
(183.2)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 174

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы Горы!

по математике

Якушева Алексея Юрьевича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«22» марта 2016 года

Подпись участника
Якуш

47-21-97-81
(183.2)

Черновик

75 (семьдесят пять)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

$\left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)$ $\frac{40}{29}$

$\frac{\pi}{6} \geq \frac{1}{2}$

$k(t-3)=3t$

$kt-3k=3t$

$t=\frac{3k}{k-3}$

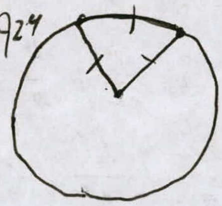
$\sin 1$

$\frac{3k}{k-3} > 8$

$3k > 8k-24$

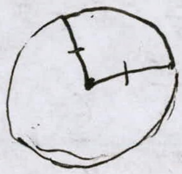
$\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}$ $\frac{40}{29}$

$\frac{80}{58}-\frac{29}{58}=\frac{51}{58}$



$\cos\frac{\pi}{12}=$

$\cos\frac{\pi}{4}=\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$



$2\cos^2\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{4}+1$

$\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+2}{4}$

$\frac{760}{840}$

$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}$ $\frac{1600}{841}$ $\frac{38}{42}$ $\frac{759}{841}$

$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}$ $\frac{51}{58}$ $>\frac{19}{21}$

$11\cdot 69=690+69=759$

$\sqrt{\sqrt{2}+2}$ $\frac{102}{58}$ $\frac{51}{29}>\frac{4}{3}$

$\frac{759}{841}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{15}{17}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{750}{850}$ $\frac{3}{4}<\frac{225}{289}$

$\sqrt{2}+2$ $\frac{16}{9}$

<900

$\sqrt{\sqrt{2}+2}$ 4 $\frac{51}{29}>\frac{5}{3}$

~~$\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)=$~~

~~$=2\sin\alpha\cdot\cos\beta$~~

$\sqrt{2}+2<\frac{25}{9}$

$(21+1)21=441+21=$
$=462$

1600 $\frac{4}{3}$

$(30-1)^2=900-60+1=$
$=841$

$1+2\sin\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{1}{2}$ $\frac{16}{9}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{11\cdot 69}{29^2}$

$1+\sin$ $\sin 1<\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{22\cdot 7\cdot 3\sqrt{3}}{29^2}$ 841

$\frac{22\cdot 21\cdot\sqrt{3}}{29^2}$ 462

$\frac{\sqrt{3}}{2}+7<\frac{16}{9}$ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\frac{49}{81}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{7}{9}$

$3\ 2\sqrt{3}\ 4$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

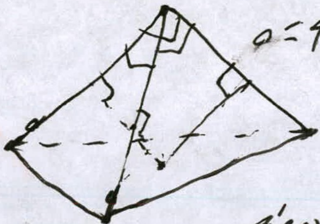
Черновик

N 5

$\frac{1}{V} = \frac{3}{8c}\left(1 - \frac{3}{b} - \frac{4}{b}\right)$

$\frac{3}{8c} - \frac{9}{b^2c} - \frac{12}{8c^2}$

$\frac{2\cdot 7\cdot 14}{7\cdot 14 - 3\cdot 7 - 4\cdot 14}$



$f'(b) = -\frac{3}{8^2c} + \frac{18}{b^3c} + \frac{12}{b^2c^2}$

$\frac{2}{a} + \frac{3}{14} + \frac{4}{7} = 1$

$-3 + \frac{18}{b} + \frac{12}{c} = 0$

$\frac{2}{a} + \frac{11}{14} = 1$

$f'(c) = -\frac{3}{8c^2} + \frac{9}{8^2c^2} + \frac{24}{8c^3}$

$\frac{2}{a} + \frac{22}{28} = 1$

$\begin{cases} -3 + \frac{9}{c} + \frac{24}{8} = 0 \\ -3 + \frac{18}{b} + \frac{12}{c} = 0 \end{cases}$

$a = \frac{28}{3}$

$\frac{6}{b} = x$

$\frac{28\cdot 7\cdot 14}{6\cdot 3} = \frac{7\cdot 14^2}{9}$

$\frac{3}{c} = y$

$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$

$3y + 4x = 3$

$+4y = 3$

$|x| + 2|y| = 2$

$|y| = 1 - \frac{|x|}{2}$

$\frac{abc}{6}$

$ex + gy + f\cdot z + d = 0$

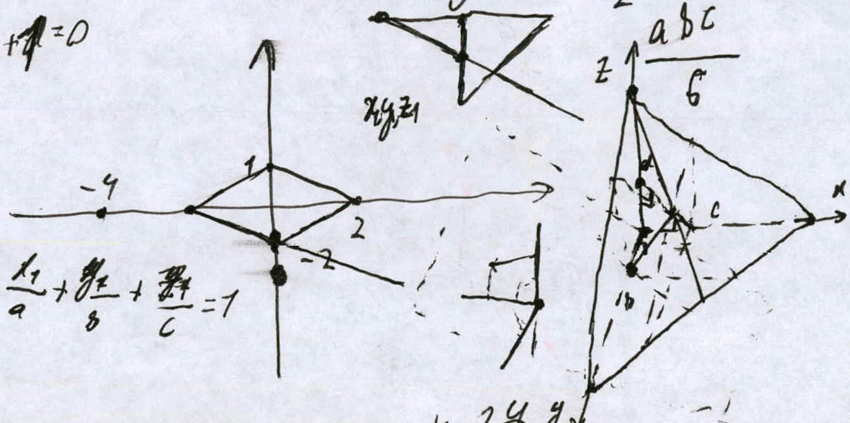
$ec + d = 0$

$e = -\frac{d}{c}$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$x_1 y_1 z_1$

$\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{8} + \frac{z_1}{c} = 1$



-4 2 -2 z x y

$+8$

$x\ 24\ y$

$20\log_3(\log_2[x] - 12\log_3[\log_2 x])$

$(25-1)^2 = 625 - 50 + 1 = 576$

$20 \log_3 \log_2 \le 12 \log_3[\log_2 x]$

$\log_3 \frac{(\log_2[x])^{20}}{[\log_2 x]^{12}} \le 0$

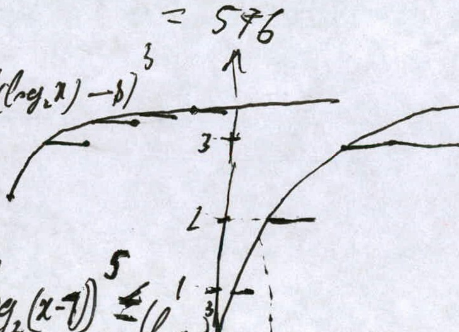
$(\log_2 x - a)^5 \le ((\log_2 x) - b)^3$

$(\log_2[x])^{20} \le [\log_2 x]^{12}$

$(\log_2[x])^5 \le |[\log_2 x]|^3$

$(\log_2(x-1))^5 \le (\log_2 x)^3$

$x \ge 2$ $x = 2$



3 2 1 1 2 3

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

47-21-97-81
(183.2)

Чистовик

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

№1.

обоснование равносильности перехода?

$\left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)$ и $\frac{40}{29}$

$\left(\sin^2\frac{1}{2}+2\sin\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{1}{2}+\cos^2\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{40}{29}\right)^2$

$(1+\sin 1)$ и $\left(\frac{40}{29}\right)^2$

$\sin 1$ и $\left(\frac{40}{29}\right)^2-1$

$\sin 1$ и $\frac{11}{29}\cdot\frac{69}{29}$

$\sin 1$ и $\frac{11\cdot 69}{29^2}$

$\sin 1$ и $\frac{759}{841}$

т.к. $\frac{\pi}{3}>1$, а $\sin x$ — возрастает на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

$\sin\frac{\pi}{3}>\sin 1$

$\frac{\sqrt{3}}{2}>\sin 1$

Докажем, что: $\frac{759}{841}>\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{759}{841}>\frac{750}{850}=\frac{15}{17}$

$\frac{15}{17}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{225}{289}$ и $\frac{3}{4}$

$75\cdot 4$ и 289

300 и 289

$300>289$

$\Rightarrow \frac{759}{841}>\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \frac{759}{841}>\sin\frac{\pi}{3}>\sin 1$

$\Rightarrow \frac{40}{29}>\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}$ Ответ: $\cos\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{2}$.

ответ верный, решение верное

Чистовик

ABCD - ромб

O_1 и O_2 - центры ~~кор~~ окружностей

Необходимо найти такую точку (точка X) на ромбе, что ~~расстояние от O_1 и O_2~~ сумма расстояний от O_1 и O_2 до этой точки минимально.

① Пусть эта точка лежит на $[AB]$:
если бы она лежала на прямой (AB), а не на отрезке $[AB]$, то это была бы точка пересечения прямых (AB) и (O_1O_2) (точка X_1) (т.к. O_1 и O_2 находятся в разных полуплоскостях относительно этой прямой). Поэтому она лежит на отрезке, но это ближайшая к X_1 - точка A.

② Пусть эта точка лежит на DC:
Аналогично с ①, эта точка будет точкой D.

③ Пусть эта точка лежит на BC:
Точки этого отрезка удалены от O_1 дальше чем на 4, а от O_2 дальше чем на 2. Заметим, что: ~~[illegible]~~ $|O_1A| = 2$

$|O_2A| = 2\sqrt{2}$

$|O_1A| + |O_2A| = 2 + 2\sqrt{2} < 6$

=> ~~эта точка~~ X не лежит на BC.

④ => X лежит на $[AD]$. (из ① это A, из ② - D, или любая другая точка на AD)

=> необходимо найти точку X на $[AD]$, такую что $|XO_1| + |XO_2|$ - минимальна

Чистовик

$\frac{tk}{3} - k = t \Rightarrow tk - 3t = 3k$

$t = \frac{3k}{k-3}$

$\frac{3k}{k-3} > 8$

$3k > 8k - 24$

$5k < 24$

$3 < k < 4\frac{4}{5}$

т.к. медленнее первого

$\Rightarrow k = 4$

$t = \frac{12}{1} = 12 \in N$

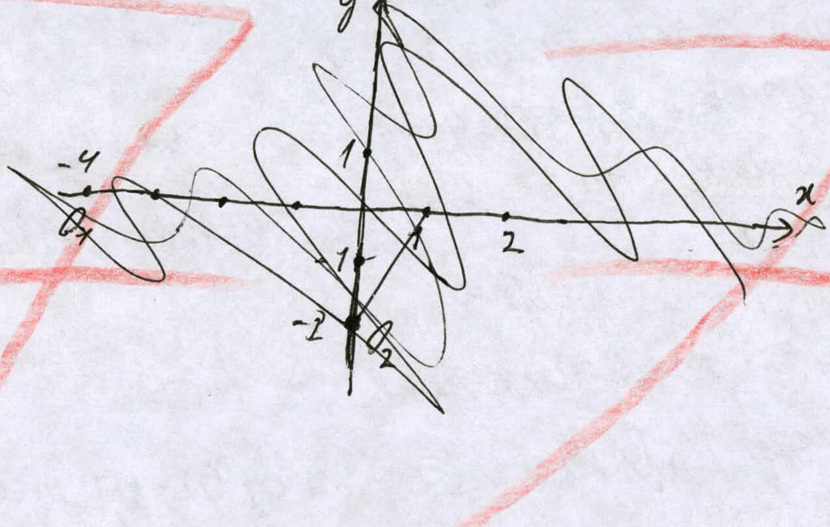
Ответ: 4 минуты. ответ верный, решение верное

N3.

$|x| + 2|y| = 2$

$|y| = 1 - \frac{|x|}{2}$ — график ромб

$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$ — сумма радиусов окружностей с центрами $(-4;0)$ и $(0;-2)$ и проходящих через одну точку, лежащую на стороне ромба. Необходимо найти такую точку на стороне ромба, чтобы эта сумма была минимальна.

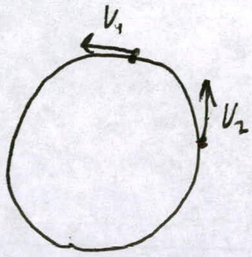


Чистовик

№2

S - длина круга k - ?

v_1 - скорость более быстрого



$v_1 = \frac{S}{3}$

$v_2 = \frac{S}{k}$, где $k \in \mathbb{N}$

Водитель обгоняет другого за время t, тогда, когда он проезжает ~~на~~ $l+S$, а другой l за время t, где l - некоторое число.

$\frac{l+S}{v_1} = t$

$\frac{l}{v_2} = t$, $t > 8$ $t \in \mathbb{Z}$

$\frac{l+S}{v_1} = \frac{l}{v_2}$

$v_2 \cdot l + S v_2 = l v_1$

$\frac{Sl}{k} + \frac{S^2}{k} = \frac{lS}{3}$

$\frac{l}{k} + \frac{S}{k} = \frac{l}{3}$

$\frac{l}{v_2} = \frac{l \cdot k}{S} = t$

$l + S = \frac{lk}{3}$

$\frac{l}{S} + 1 = \frac{lk}{3S}$

$\frac{l}{S} = \frac{t}{k}$

$\frac{t}{k} + 1 = \frac{tk}{3k}$

$\frac{t}{k} + 1 = \frac{t}{3}$

$t + k = \frac{tk}{3}$

47-21-97-81
(183.2)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

Чистовик

№3 (продолжение)

O_2' - точка, симметричная O_2 относительно $[AD]$.

$\Rightarrow |XO_2| = |XO_2'|$

$|O_1X| + |O_2'X|$ - минимально, если $X = (AD) \cap (O_1O_2')$

прямая: $y = 2x - 2$ - проходит через O_2', т.к. проходит через O_2 и перпендикулярна (AD).

прямая $y = -\frac{x}{2}$ проходит через O_2', т.к. является образом прямой (O_1O_2) при симметрии относительно (AD).

$O_2'(x_1; y_1)$

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - 2 \\ y_1 = -\frac{x_1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y_1 = -2 \\ -2y_1 = x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -\frac{2}{5} \\ x_1 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$O_2' = (\frac{4}{5}; -\frac{2}{5})$

Заметим, что $X = (O_1O_2') \cap (AD)$ принадлежит $[AD]$ (по градиенту)

$|O_1O_2'|$ - искомая величина

$$|O_1O_2'| = \sqrt{\left(\frac{4}{5} - (-4)\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{24^2}{5^2} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{580}{25}} = \frac{\sqrt{580}}{5}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{580}}{5}$

ответ верный

№5

чистовик

V- объём

$$V = \frac{a\cdot b\cdot c}{2\cdot 3} = \frac{abc}{6}$$

$$V = \frac{2b^2c^2}{6(bc-3c-4b)} = \frac{b^2c^2}{3(bc-3c-4b)}$$

~~a≥0, b≥0, c≥0 - т.к. лежит на основании~~

т.к. $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}=1$, $b>3$, $c>4$, $\frac{3}{b}+\frac{4}{c}<1$

$$\frac{1}{V} = \frac{3}{bc} - \frac{9}{b^2c} - \frac{12}{bc^2}$$ ← необходимо максимальное значение.

$$\frac{1}{V}'(b) = -\frac{3}{b^2c} + \frac{18}{b^3c} + \frac{12}{b^2c^2} = 0$$

$$\frac{1}{V}'(c) = -\frac{3}{bc^2} + \frac{9}{b^2c^2} + \frac{24}{bc^3} = 0$$

Правильно: $\frac{9}{b}+\frac{24}{c}=3$

неверный переход

$$\begin{cases} \frac{9}{c}+\frac{24}{b}=3 \\ \frac{18}{b}+\frac{12}{c}=3 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3}{c}+\frac{8}{b}=1 \\ \frac{6}{b}+\frac{4}{c}=1 \end{cases}$$

$m=\frac{1}{c}$

$n=\frac{2}{b}$

$$\begin{cases} 3m+4n=1 \\ 3n+4m=1 \end{cases} \iff \begin{cases} m=\frac{1-4n}{3} \\ 3n+\frac{4-16n}{3}=1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} m=\frac{1-4n}{3} \\ 7n=1 \end{cases} \iff \begin{cases} m=\frac{1-\frac{4}{7}}{3} \\ n=\frac{1}{7} \end{cases} \iff \begin{cases} m=\frac{1}{7} \\ n=\frac{1}{7} \end{cases}$$

$\Rightarrow c=7$, $b=14$

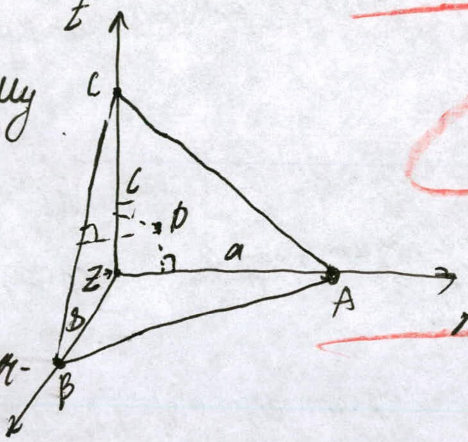
$$V = \frac{(7\cdot 14)^2}{3\cdot(7\cdot14-3\cdot7-4\cdot14)} = \frac{(7\cdot14)^2}{3\cdot7(14-3-8)} = \frac{7\cdot14^2}{9} = \frac{196\cdot7}{9} =$$

$$= \frac{1400-28}{9} = \frac{1372}{9}$$

ответ неверный

чистовик

№5.



~~Сис~~
Зададим систему координат ~~в с~~ с центром в точке Z и осями, направленными по ребрам пирамиды.

a, b, c — стороны

плоскость $ABC: gx+ey+fz+1=0$

$A: ga=-1$
$g=-\frac{1}{a}$

$B: e=-\frac{1}{b}$
$C: f=-\frac{1}{c}$

$ABC: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$

$D: (x_1, y_1, z_1)$

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2=13 \\ x_1^2+z_1^2=20 \\ y_1^2+z_1^2=25 \\ x_1bc+y_1ac+z_1ab=abc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1^2-y_1^2=7 \\ z_1^2+y_1^2=25 \\ x_1^2+y_1^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1=4 \\ y_1=3 \\ x_1=2 \\ x_1bc+y_1ac+z_1ab=abc \end{cases} \Rightarrow 2bc+3ac+4ab=abc$$

$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}=1$

$\frac{2}{a}=1-\frac{3}{b}-\frac{4}{c}$

$\frac{2}{a}=\frac{bc-3c-4b}{bc}$ $\quad a=\frac{2bc}{bc-3c-4b}$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!