37-37-02-40
(181.1)

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 172

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы

по математике

Ясинского Никиты Денисовича

фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата

«22» марта 2016 года

Подпись участника

Курганев Жеву 75 (семьдесять) Черновик Ильготи Ищенко

37-37-02-40 (181.1)

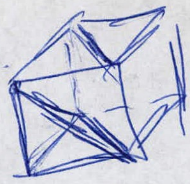
ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

$\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{2}\right) =$

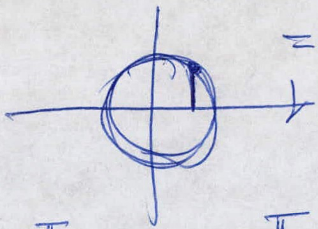
$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right) > \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right) > \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right) =$

$= \frac{5}{4}\sqrt{2}$

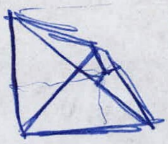
$26 - 19 = 70 - 57 = 130$ $19 \mid 1{,}3$



5



$0{,}5$ $\frac{\pi}{6} > 0{,}5$ $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} =$



1 1

1

$= \frac{2\pi + 3\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$ $b = \sqrt{2 - \frac{1}{4}} =$

$= \frac{\sqrt{7}}{2}$ $S = \frac{1}{2}ah = \frac{\sqrt{7}}{4}\cdot 1$

2   $\frac{l}{v_1} = 180$ $\frac{l}{v_2} = k$ $l = 180v_1 = v_2 k =$

$= v_1 t - v_2 t$

$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{21}}{12}$ $\frac{l}{v_1 - v_2} = t$

$t = \sqrt{180v}$

$180v_1 = v_1 t - v_2 t$

$t = \frac{180v_1}{v_1 - v_2}$; $v_2 k = v_1 t - v_2 t =$

$\Rightarrow v_2(k+t) = v_1 t$

$34 \cdot 34 = 136 + 102 = 1156$, $+49 = \boxed{1205}$

$kt = v$

$k + t = v$

$3v = v$

$v =$

$l = 3v_1 = kv_2 = t(v_1 - v_2)$ $5\cdot 241$

$(t-3)v_1 = tv_2$

$(t-3)\frac{kv_2}{3} = tv_2 \Rightarrow k(t-3) = 3t$

$k = \frac{3t}{t-3}$ $kt - 3k = 3t$

$t(k-3) = 3k$

t четн

$\Downarrow$

$k = t = 6$ $t-3 \,\vdots\, 3$ $t = \frac{3k}{k-3} \in \mathbb{Z}$

$t = 12$ $\boxed{k = 4}$

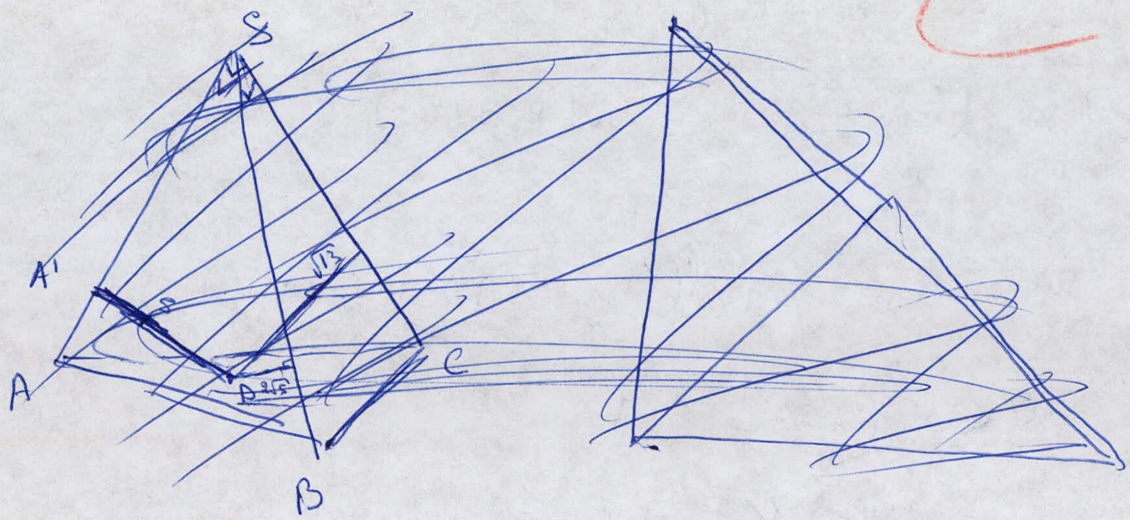
Чистовик 6

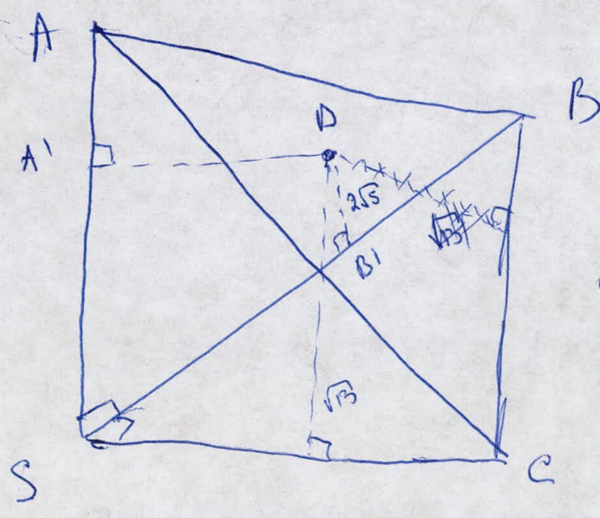
Значит, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} [x] = 2 \\ \cancel{\log_2 [x] \in [\log_2 x]} \\ \log_2 [x] \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow x \in [2; 3)$$

Ответ: $[2; 3)$

№ 5





Пирамида является частью параллелепипеда со сторонами SA, SB, SC.

Значит, объем будет наименьшим, когда произведение $SA \cdot SB \cdot SC$ будет наименьшим.

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Чистовик 5 №4

$[\log_3(\log_2 x)]^2 - 10\log_3([\log_2 x]) + 21\log_3(\log_2[x]) = 0$

$[\log_3(\log_2 x)]^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 21\log_3(\log_2[x]) - 10\log_3([\log_2 x]) =$

$= \log_3\left(\frac{(\log_2[x])^{21}}{([\log_2 x])^{10}}\right) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \log_2[x] \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\log_2[x] = [\log_2 x]$ (т.к по условию $\log_3([\log_2 x])$ сущ. $\Rightarrow$ $[\log_2 x] > 0 \Rightarrow x \geq 2$; $x - [x]$ всегда $< 1 \Rightarrow$ если $\log_2[x] = k$, то $\log_2 x < k+1$)

верно!

Значит, $\log_3((\log_2[x])^{11}) \in \mathbb{Z}$

$\underbrace{[\log_3(\log_2 x)]^2}_{\geq 0} + \log_3((\log_2[x])^{11}) = 0$ *

Значит, $\log_3((\log_2[x])^{11}) \leq 0 \Rightarrow$

$0 < \log_2[x] \leq 1$

$\Downarrow$

$1 < [x] \leq 2$

$\Downarrow$

1) $[x] = 2 \Rightarrow x \in [2;3) \Rightarrow \log_2 x \in [1;2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3(\log_2 x) \in [0;1) \Rightarrow [\log_3(\log_2 x)]^2 = 0$

$\Downarrow$

Значит, $\log_3(\log_2[x])^{11} = 0$ из *

$(\log_2[x])^{11} = 1 \Rightarrow \log_2[x] = 1 \Rightarrow [x] = 2$

~~2) $[x] = 1$~~

~~Выражение не имеет смысла, т.к. $\log_3(\log_2[x]) = \log_3(0)$, а $\log_3(x)$ существует только при $x > 0$.~~

2

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Черновик

$\frac{26}{19} \vee \left(\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$

$\sin 1 < \sin 60^\circ = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$1 + 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} \vee \left(\frac{26}{19}\right)^2$

$\sqrt{3} = 1{,}73$

$\cancel{\sin 0 + \sin 1 = 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}}$

$1 + \sin 1 \quad \frac{200}{-189}\ \ 1108$ $\quad \frac{180}{\pi} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{27 \cdot 7}{189}$

$1 + \sin 1 \vee \left(\frac{26}{19}\right)^2$

$\sin 1 < \sin 60$ $\quad \frac{343 \cdot 3}{1029}$

$\frac{\pi}{2} + 1 \vee \left(\frac{26}{19}\right)^2 \quad$ из 4

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

$\sin 1 + 1 < \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

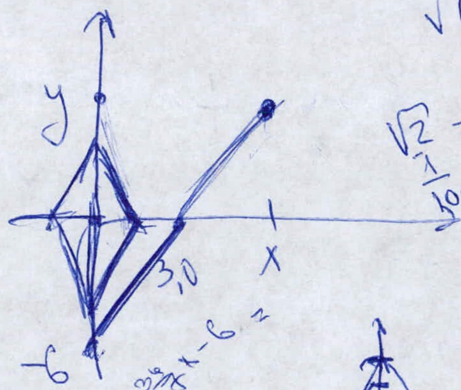
$\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 <$

3) $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+6)^2}$

$\frac{174 \cdot 174}{696}$ $\quad 1218$ $\quad 174$ $\quad 30276$

$\sqrt{(x-3)^2 + y^2}$

3 : 0



$\sqrt{2} = 1$

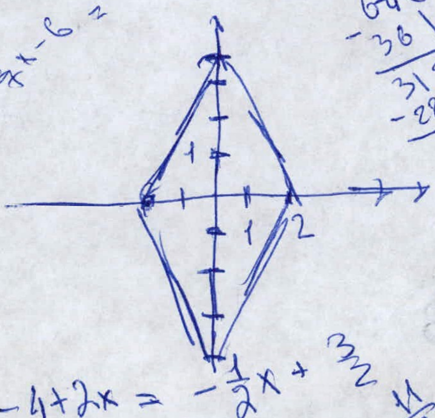
$\frac{1}{100}$

14

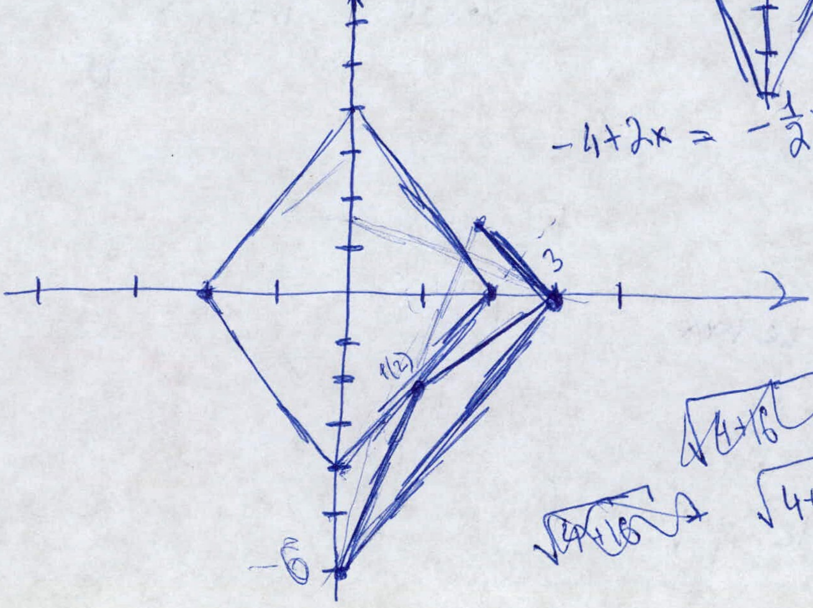
$676 \mid 361$ $\quad -361 \quad 1{,}87$ $\quad 3150$ $\quad -2888$ $\quad 2620$

$y = \frac{3}{?}x - 6$

$2|x| + |y| = 4$



$\left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}\right)$



$-4 + 2x = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$\frac{5}{2}x = \frac{11}{2}$

$x = \frac{11}{5}$

$-6 = 0 \cdot a + b$

$\frac{4}{5} = \frac{7}{5}a + b$

$\frac{4}{5} = \frac{7}{5}a - 6$

$4 = 7a - 30$

$a = \frac{34}{7}$

$\sqrt{4+16}$

$\sqrt{4+4} + \sqrt{1+16}$

$\sqrt{4+16}$

37-37-02-40 (181.1)

Черновик

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

$0 = [\log_3(\log_2 x)]^2 - \cancel{10}\log_3([\log_2 x]) + 21\log_3(\log_2([x]))$

$\log_2 x \geq 1 \Rightarrow \boxed{x \geq 2}$

$28 \cdot 28 = 784$, $784 + 49 = 833$

$29 \cdot 29 = 841$

$(29-28)(29+28) = 57$

2

$l = 3v_1$

$l = kv_2$

$l = t(v_1 - v_2)$

$3v_1 = tv_1 - tv_2$

$3kv_2 = t \cdot \frac{kv_2}{3} - tv_2$

$kt \vdots 3 \Rightarrow t \vdots 3$ или $k \vdots 3$

~~пусть $k \vdots 3$~~

$3k = kt - 3t$

$\cancel{3k + 3t = kt}$

$\cancel{9k_1 + 3t = 3k_1 t}$

$\cancel{3k_1 + t = k_1 t}$

$3k + 3t = kt$

$k = \frac{3t}{t-3} = 3\frac{t}{t-3} = \boxed{3 + \frac{9}{t-3}}$

1, 3, 6, 7,

1 ... 8, ... 12

9, 10, 11, 12

Если t нечет, то $\varnothing$

t четное $(=12)$

$3t \geq 2(t-3)$

$t \geq -6$

12

$t \vdots 3 \Rightarrow t \vdots 6$

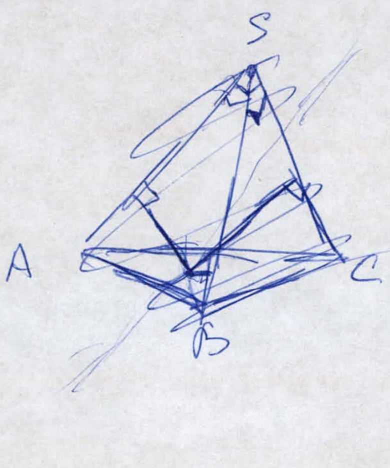
$k = \frac{18t_1}{6t_1 - 3} = \frac{6t_1}{2t_1 - 3} = 3 + \frac{9}{2t_1 - 3}$

$t \geq 2(t-3)$

$t \geq 2t - 6$

$\boxed{t \leq 6}$

4



~~$V = \frac{h}{3}S_{осн}$~~ h

Док-то, что

$[\log_3(\log_2 x)] = 3$

$[\log_3(\log_2 x)] = 7$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик 4

точек $(3;0)$ и $(0;-6)$ минимальна.

Очевидно, что это точка лежит на отрезке ромба лежащего в IV координатной четверти

Пусть мы нашли такую точку, тогда расстояние от нее до точки $(3;0)$ равно расстоянию до точки симметричной $(3;0)$ относительно прямой $y=2x-4$ (по т. Пифагора)

Найдем симметричную точку:

Прямая, проходящая через $(3;0)$ и $\perp$ $y=-4+2x$:

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ (т.к $2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ и $-\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{3}{2}=0$)

$-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=-4+2x$

$\frac{5}{2}x=\frac{11}{2} \Rightarrow x=\frac{11}{5}$, $y=-4+2\cdot\frac{11}{5}=\frac{2}{5}$

Значит координаты симметричной точки: $\left(\frac{7}{5};\frac{4}{5}\right)$, т.к $3-\frac{11}{5}=\frac{11}{5}-\frac{7}{5}$ и $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=\frac{2}{5}-0$.

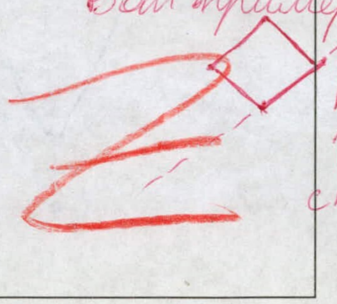
~~Расстояние между $(0;-6)$ и $(3;0)$ равно расстоянию между $(0;-6)$ и $\left(\frac{7}{5};\frac{4}{5}\right)$~~

Значит минимально возможное значение выражения - это расстояние между $(0;-6)$ и $\left(\frac{7}{5};\frac{4}{5}\right)$ и достигается оно в точке, где отрезок ромба пересекает отрезок соединяющий 2 данные точки (она есть т.к $(0;-6)$ лежит снизу продолжения отрезка ромба, а $\left(\frac{7}{5};\frac{4}{5}\right)$ сверху)

не обосновано!

сверху

Ваш контрпример!



нет пересечения

снизу

Минимальное значение выражения:

$\sqrt{\frac{49}{25}+\frac{34^2}{25}}=\sqrt{\frac{1205}{25}}=\sqrt{\frac{241}{5}}$

Ответ: $\sqrt{\frac{241}{5}}$

Чистовик 3

Значит, t - чётное.

Также образам $t \vdots 3$ и $t \vdots 2 \Rightarrow t \vdots 6$

$$k = \frac{3t}{t-3} = 3 + \frac{9}{t-3} \in \mathbb{Z}$$

Значит, $\frac{9}{t-3} \vdots \mathbb{Z} \Rightarrow t-3 \leq 9 \Rightarrow t \leq 12$

Т.к $t \in \mathbb{Z}$ и $t \vdots 6$, то 2 случая

1) $t = 6$: не подходит, т.к по условию $t > 7$

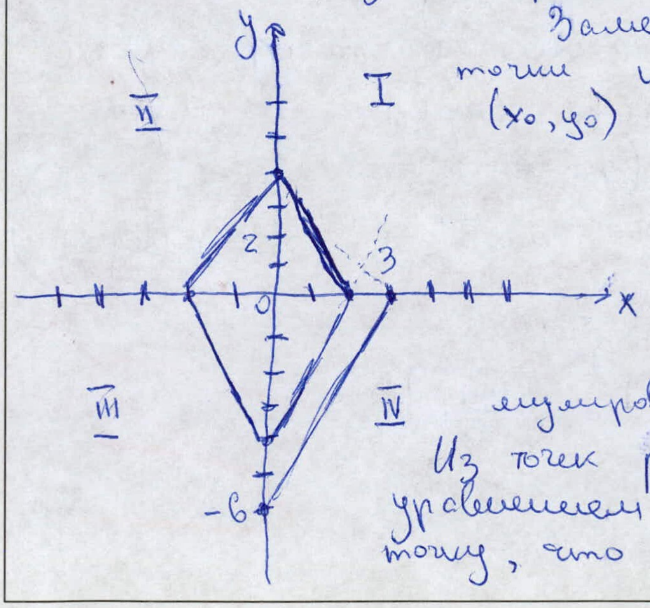
2) $t = 12$: $k = 3 + \frac{9}{12-3} = 4$ подходит

Ответ: 12 минут

№3

$2|x| + |y| = 4$

При $x, y > 0$ получаем $y = 4 - 2x$.
Этот отрезок можем отразить относительно оси абсцисс, т.к если y_0 удовлетворяет уравнению, то $-y_0$ тоже. И можем отразить относительно оси ординат, т.к если x_0 удовлетворяет уравнению, то $-x_0$ тоже.
То есть на координатной плоскости уравнение задаёт ромб. (см. рис)



Заметим, что расстояние от точки на плоскости с координатами (x_0, y_0) до точки $(3; 0)$ равно:
$\sqrt{(x_0-3)^2 + y_0^2}$, а до точки $(0, -6)$: $\sqrt{x_0^2 + (y_0+6)^2}$.

Значит, можем переформулировать условие задачи:
Из точек ромба, который задается уравнением $2|x| + |y| = 4$ выбрать такую точку, что сумма расстояний до

Шифр

Черновик

① $\left[\log_3(\log_2 x)\right]^2 - 10\log_3\left([\log_2 x]\right) + 21\log_3\left(\log_2[x]\right) = 0$

$x \geq 2$

$10\log_3\left([\log_2 x]\right) - 21\log_3\left(\log_2[x]\right) \in \mathbb{Z}$

$+10\log_3 \frac{[\log_2 x]}{\log_2[x]} - 11\log_3\left(\log_2[x]\right) \in \mathbb{Z}$

$2\log_3 [\log_2 x]^5 - 3\log_3\left(\log_2[x]^7\right) =$

$= 2\log_3 \frac{[\log_2 x]^5}{\log_2[x]^7} - \log_3$

$\log_3 \frac{[\log_2 x]^{10}}{\log_2[x]^{21}} \in \mathbb{Z}$

$\log_2[x] \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$[\log_2 x] = \log_2[x]$

Чистовик 2

верно!

№2

Пусть длина кольцевой трассы l км, скорости первого и второго водителей: $v_1 \frac{км}{мин}$ и $v_2 \frac{км}{мин}$ соответственно. Пусть второй (медленный) проезжает круг за k минут, а время между обгонами t минут ($k, t \in \mathbb{Z}$ по условию), тогда:

$$l = 3v_1 = kv_2 = t(v_1 - v_2)$$

($l = t(v_1 - v_2)$, т.к время между обгонами - это время, за которое машина, движущаяся со скоростью $v_1 - v_2$ пройдет один круг)

$$kv_2 = t(v_1 - v_2)$$

$$kv_2 = tv_1 - tv_2 = \frac{kv_2}{3} \cdot t - tv_2$$

$$3kv_2 = kv_2 t - 3tv_2$$

Разделим на v_2:

$3k + 3t = kt$. Видим, что $kt \vdots 3$

значит, либо $k \vdots 3$, либо $t \vdots 3$ (либо и k, и t)

Пусть $k \vdots 3$ (т.е $k = 3k_1$)

$k = \frac{3t}{t-3}$, т.е $k_1 = \frac{t}{t-3}$, причем т.к $\in \mathbb{N}$ и $k \vdots 3$, то $k_1 \vdots N$

$t \neq t - 3$ ~~[illegible]~~ (т.к $0 \neq -3$) $\Rightarrow$

$t \geq 2(t-3)$ (т.к $k_1 \geq 2$)

$t \leq 6$ (а по условию $t > 7$)

Значит, $k \not\vdots 3$ и $t \vdots 3$

$k = \frac{3t}{t-3}$.

Если t нечетное, то $3t$ нечетное, а $t - 3$ четное $\Rightarrow \frac{3t}{t-3} \notin \mathbb{Z}$.

Чистовик 1

№1

верно!

$\frac{26}{19} \vee \sin\left(\frac{1}{2}\right) + \cos\left(\frac{1}{2}\right)$

$0 < \frac{1}{2} < \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{1}{2} > 0$ и $\cos\frac{1}{2} > 0$

$\frac{26}{19}$ также > 0, поэтому можем возвести в квадрат

$\left(\frac{26}{19}\right)^2 \vee \sin^2\frac{1}{2} + \cos^2\frac{1}{2} + 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}$

$\left(\frac{26}{19}\right)^2 \vee 1 + \sin 1$

$\left(\frac{26}{19}\right)^2 \vee 1 + \cancel{\ } \sin 1$

$$\begin{array}{r} \times 26 \\ 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 19 \\ 19 \\ \hline 171 \\ 19 \\ \hline 361 \end{array}$$

$\left(\frac{26}{19}\right)^2 = \frac{676}{361} > 1{,}87$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{676} & \cancel{361} \\ \cancel{361} & \cancel{1,8} \\ \hline \cancel{3150} & \\ \cancel{2888} & \\ \hline \cancel{262} & \end{array}$$

Т.к $\sin x \uparrow\uparrow$ на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то

$\sin 1 = \sin\frac{3}{3} < \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Значит, $1 + \sin 1 < \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

$$\begin{array}{r|l} -676 & 361 \\ 361 & 1,87... \\ \hline 3150 & \\ -2888 & \\ \hline 2620 & \\ - \quad ... & \end{array}$$

$\sqrt{3} < 1{,}74$, т.к $1{,}74 \cdot 1{,}74 = 3{,}0276$

Значит, $\frac{\sqrt{3}}{2} < 0{,}87 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 < 1{,}87$

Таким образом

$\left(\frac{26}{19}\right)^2 > 1{,}87 > \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \sin\frac{\pi}{3} + 1 > \sin 1 + 1 = \left(\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}\right)^2$

Значит, т.к $\frac{26}{19} > 0$ и $\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2} > 0$ $\quad \frac{26}{19} > \sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}$

Ответ: больше

верно