57-37-62-77
(115.1)

Олимпиада ШВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3-2 г. Уфа

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы

по математике

Ананьева Александра Васильевича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«13» марта 2016 года

Подпись участника

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

57-37-62-77 (115.1)

Чистовик

1	2	3	4	5
+	+	+	∓	+

85

восемьдесят пять

пр (Вязовик)

(Горшин)

№1. $8x^2+y^3=2016$ $\quad x,y\in N$

+

$8x^2 \vdots 2$, $2016 \vdots 2 \Rightarrow y^3 \vdots 2$, $y \vdots 2$; $2016 = 8\cdot 252$

Рассмотрим все возможные значения y

y	y^3	x^2	x
2	8	251	– (x-нецелое)
4	64	244	—
6	216	225	15
8	512	188	—
10	1000	127	—
12	8·216	36	6
14	8·343 >2016	—	—

Таким образом мы получили 2 пары натуральных чисел $(x;y)$

(15;6)
(6;12)

значения $y>12$ не подходят, т.к. $y^3>2016$

Ответ: (15;6)
(6;12)

№2 $S_{1-5}=242$ $\quad b_1=b$, $b_2=bq$ ... $b_n=b\cdot q^{n-1}$

+

$S_{6-10}=58806$

$$\begin{cases} S_5=\dfrac{b(q^n-1)}{q-1}=242 \\ S_{6-10}=S'_5=\dfrac{bq^n(q^n-1)}{q-1}=58806 \end{cases}$$

– новая прогрессия $b'_1=bq^n$ ...

$q^n=243$, $n=5 \Rightarrow q=3$

$\dfrac{b\cdot(243-1)}{2}=242 \Rightarrow b=2$

Чистовик! ~~Таким образом $\frac{\pi}{2}+\pi n < x < \frac{11\pi}{12} + \pi n$~~

ос. случай для (1): $\cos x = 0$: $\sin x = 1$ $\Rightarrow \sin 2x = 0$

$\sin x + \cos x < -2\sin 2x$

$1 < 0$ - неверно.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \frac{3\pi}{4}+2\pi n < x < \pi + 2\pi n \\ \frac{7\pi}{12}+\pi k < x < \frac{11\pi}{12} + \pi k \end{array}\right.$

Ответ не верный

включены лишние знач.

№5. (+) $b \le 9^{\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}} < a$

исследуем ф-ию $f(x) = \frac{6x+3}{4x^2+4x+10}$ // $4x^2+4x+10>0$

$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{6(x^2+x+2,5)-(6x+3)(2x+1)}{(x^2+x+2,5)^2} =$

$= \frac{6x^2+6x+15-12x^2-12x-3}{4(x^2+x+2,5)^2} = \frac{-3(x^2+x-2)}{2(x^2+x+2,5)^2}$

$f'(x)=0$: $x^2+x-2=0$

$D = 1+8=9$

$x_1 = 1$

$x_2 = -2$

$\frac{-3(x-1)(x+2)}{2(x^2+x+2,5)^2} = 0$

$f'(x)$: $-$ (−2) $+$ (1) $-$ → x

$f(x)$: ↘ −2 ↗ 1 ↘

$x=1$ - т. max $f(1) = \frac{1}{2}$

$x=-2$ - т. min $f(-2) = -\frac{1}{2}$

4 из 5

Чистовик

$S'=0$: $-15x^2+2x+17=0$

$\frac{D}{4}=1+255=256$

$x_1=\frac{-1+16}{-15}=-1$ - не уд.

$x_2=\frac{-1-16}{-15}=\frac{17}{15}$

Ответ: $\frac{AM}{MB}=\frac{17}{15}$

4. $\cos^3x+(\sin x+\cos x)\sin x\cos x+\sin^3x<\sqrt{-\sin 2x}$

$\cos^3x+\sin^2x\cos x+\sin x\cos^2x+\sin^3x<\sqrt{-\sin 2x}$

ОДЗ: $\sin 2x\le 0$

$\pi+2\pi k\le 2x\le 2\pi+2\pi k$

$\frac{\pi}{2}+\pi k\le x\le \pi+\pi k$

$k\in Z$

$\cos^2x(\sin x+\cos x)+\sin^2x(\sin x+\cos x)<\sqrt{-\sin 2x}$

$\sin x+\cos x<\sqrt{-\sin 2x}$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} -\sin 2x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{ll} \sin x+\cos x<0 & (1) \\ (\sin x+\cos x)^2<-\sin 2x & (2) \end{array}\right. \end{cases}$$

Верная схема нерв

(1): $\sin x+\cos x<0$

Может быть $\cos x=0$

$\sin x<-\cos x$ $|:\cos x$ $\cos x\le 0$ на ОДЗ

$\operatorname{tg}x>-1$ => $\frac{3\pi}{4}+2\pi n<x<\pi+2\pi n$, $n\in Z$

(2): $\sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x<-\sin 2x$

$2\sin 2x<-1$

$\sin 2x<-\frac{1}{2}$

$\frac{7\pi}{6}+2\pi t<2x<\frac{11\pi}{6}+2\pi t$

Не учтено что $\sin x+\cos x\ge 0$

$\frac{7\pi}{12}+\pi t<x<\frac{11\pi}{12}+\pi t,\ t\in Z$

3 из 5

Чистовик

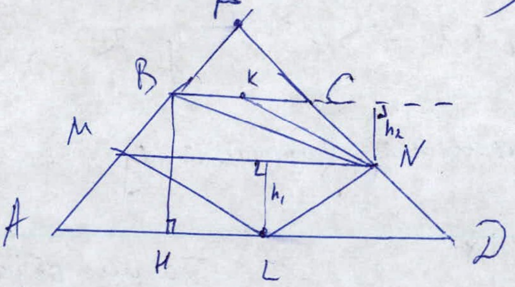
$$S_6 = \frac{2\cdot(q^6-1)}{2} = 728$$

Ответ: 728.

№3. +

$AD = 9BC$; $MN \parallel AD \parallel BC$

Пусть $BC = 2a$, тогда
$BK = a$
$AD = 18a$



1) Пусть F – точка пересечения боковых сторон;

$\frac{AM}{MB} = x$; $x > 0$

$HB = H$ – высота трапеции,

P – высота $\triangle BFC$ к BC

2) Тогда $\frac{P}{P+H} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{9} \Rightarrow H = 8P$ ($\triangle BFC \sim \triangle AFD$ по 2 углам)

h_1 – высота $\triangle MNL$, h_2 – высота $\triangle NKB$, тогда $h_1 + h_2 = H$; $\frac{h_1}{h_2} = x = \frac{AM}{BM}$

// т. Фалеса

3) Тогда $H = h_1 + h_2 = h_2(x+1)$

4) $\triangle BFC \sim \triangle MFN$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{P}{P+h_2} = \frac{2a}{MN} \Rightarrow \frac{MN}{a} = 2\cdot\frac{P + \frac{H}{x+1}}{P} =$

$= 2 + \frac{16}{x+1}$.

5) $\frac{S_{MNL}}{S_{NBK}} = \frac{MN\cdot h_1}{BK\cdot h_2} = \frac{MN}{a}\cdot x = x\left(2 + \frac{16}{x+1}\right)$

$S_{NBK} = a\cdot\frac{H}{x+1}$

$S = S_{MNL} + S_{NBK} = a\cdot\frac{H}{x+1}\left(2x + \frac{16x}{x+1} + 1\right) = aH\,\frac{2x^2+19x+1}{(x+1)^2} = aH\left(2 + \frac{15x-1}{(x+1)^2}\right)$

6) a и H – некоторые коэффициенты, определяемые условием

$S' = a\cdot H\,\frac{15(x+1)^2 - 2(x+1)(15x-1)}{(x+1)^4} = \frac{15x^2+30x+15-30x^2-30x+2x+2}{(x+1)^3}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

57-37-62-77
(115.1)

Чистовик

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

$f(-\frac{1}{2}) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -0$, значит $f(\cancel{+})$ – максимальное зн. $f(x)$

$f(-2)$ – минимальное зн. $f(x)$

Область определения $f(x)$: $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

Пусть $g(t) = 9^t$; $g(t)$ ↗ на R, непрерывна.

если $t = f(x)$, то $\min g(f(x))$ будет при $\min f(x)$

$\max g(f(x))$ будет при $\max(f(x))$

$\min g(f(x)) = g(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$

$\max g(f(x)) = g(\frac{1}{2}) = 3$

значит $\frac{1}{3} \leq 9^{\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}} \leq 3$

тогда $b \leq \frac{1}{3}$; $a > 3$

Ответ: $b \leq \frac{1}{3}$

$a > 3$

57-37-62-77 (15.1)

Черновик

1. $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 =$

$= 8 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 8 \cdot 252$

y	y^3	x^2	x
~~1~~	~~1~~	~~2015~~	-
2	8	~~2008~~ 251	
~~3~~	~~27~~	~~1989~~	
4	64	244	-
6	216	225	15
8	8·64	188	-
10	1000	127	-
12	8·216	36	6
14	8·343		

504, 251, 221, 1800, 225

$\times 64 \cdot 8$

1016 → 127, 96

(15 ; 6)
(6 ; 12)

2. $\frac{b(q^n-1)}{q-1} = 242$

$n=5$

$\frac{b \cdot q^n (q^n-1)}{q-1} = 58806$

$58806 : 242 = 243$; $243 : 9 = 27$

484, 1040, 968, 726, 726

$q^n = q^5 = 243$

$q = 3$

$2+6+18+54+162+486$

648

$243 \cdot 3 = 729$

$\frac{b \cdot 242}{2} = 242$

$b = 2$

$S_6 = \frac{2(729-1)}{2} = 728$

4. $\cos^2 x + \sin^2 x \cos x + \sin x \cos^2 x + \sin^3 x < \sqrt{-\sin 2x}$

$\sin 2x \leq 0$

$\cos^2 x(\cos x + \sin x) + \sin^2 x(\cos x + \sin x) < \sqrt{-\sin 2x}$

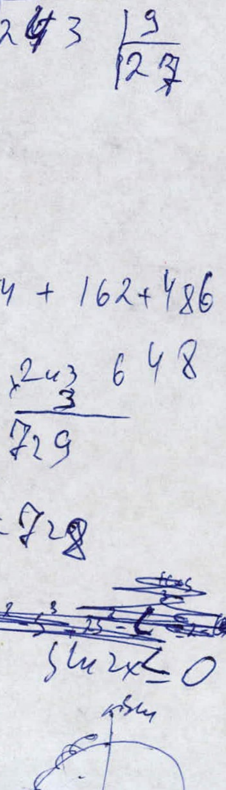
$\cos x + \sin x < \sqrt{-\sin 2x}$

$-\pi + 2\pi k \leq 2x \leq 2\pi k$

$-\frac{\pi}{2} + \pi k \leq x \leq \pi k$

1) $\cos x + \sin x \leq 0$; $x \in [\frac{\pi k}{2}; \pi k]$

$x \in [-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k]$



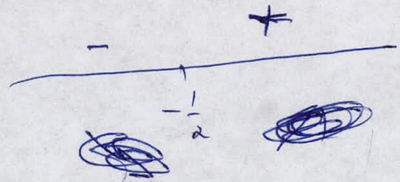
Черновик

5. $\frac{6x+3}{4x^2+4x+10} = \frac{6x+3}{4(x^2+x+2,5)} = 0$

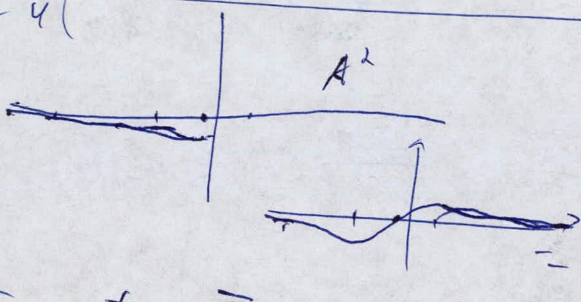
$x^2+x+2,5 > 0$

$x = -\frac{1}{2}$

$f' = \frac{1}{4}\left(\frac{6(x^2+x+2,5)-(6x+3)(2x+1)}{(x^2+x+2,5)^2}\right)$



$= \frac{1}{4}\left(\frac{6x^2+6x+15-12x^2-6x-6x-3}{A^2}\right) = \frac{-6x^2-6x+12}{4A^2} =$



$= 1,5\,\frac{-x^2-x+2}{A^2} = 1,5\,\frac{-(x-1)(x+2)}{A^2}$

$\frac{1+3}{-2}$ $\frac{1-3}{-2}$

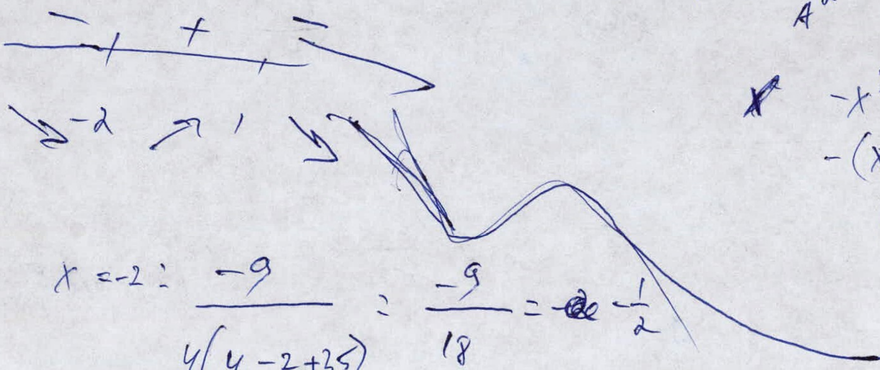
$-x^2-x+2=0$

$-(x^2+x-2)=0$

$D = 1+8 = 9$

$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$

$x_2 = -2$



$x=-2$: $\frac{-9}{4(4-2+2,5)} = \frac{-9}{18} = -\frac{1}{2}$

$x=-3$: $\frac{-15}{4(9-3+2,5)} = \frac{-15}{38}$

$x=1$: $\frac{9}{4(1+1+2,5)} = \frac{1}{2}$

~~$x \to -\infty$: $f(x) \to -0$~~

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$x=0$ $\frac{3}{10}$

$x=2$ $\frac{15}{4(4+2+2,5)} = \frac{15}{34}$

ф-ция непрерывна $\Rightarrow$

$\max f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$

$\min f(x) = f(-2) = -\frac{1}{2}$

$g(x) = 9^{f(x)}$ - непрерывна, $\max g(x) = g(\frac{1}{2}) = 3$

$b \le \frac{1}{3}$; $a \ge 3$

$\min g(x) = g(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$

(Черновик

$S' = aH\left(2 - \frac{1}{(x+1)^2}\right)$ $\left(\frac{1}{x+1}\right)' = -1\cdot(x+1)^{-2}\cdot 1$

$\frac{2(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} = 0$ $x \neq 1$

$(x+1)^2 = \frac{1}{2}$ $x \in (0; +\infty)$

$x+1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= 1 + \frac{8}{x+1}$

$\frac{MN}{2a} = \frac{P + \frac{8H}{x+1}}{P} = \frac{8 + \frac{8}{x+1}}{8} = \frac{8x+9}{8(x+1)}$

$\frac{MN}{a} = \frac{8x+9}{4(x+1)} = 2 + \frac{1}{4(x+1)}$

$\frac{S_1}{S_2} =$ $x\left(2 + \frac{16}{x+1}\right)$

$S_2 = a \cdot \frac{H}{x+1}$

$S_1 + S_2 = S_2\left(1 + 2x + \frac{16x}{x+1}\right) = S_2\left(2x + 17 - \frac{16}{x+1}\right) =$

$= \frac{aH\left(2x+17-\frac{16}{x+1}\right)}{x+1} = aH\frac{2x^2+19x+1}{(x+1)^2} = aH\frac{2x^2+15x+1}{x^2+2x+1} =$

$2x^2+15x+1 \,|\, x^2+2x+1$

2

$= aH\left(2 + \frac{15x-1}{(x+1)^2}\right)$

$S' = aH \frac{15(x+1)^2 - 2(x+1)(15x-1)}{(x+1)^4} = \frac{15x^2+30x+15-30x^2-30x+2x+2}{(x+1)^4} =$

$-15(x+1)\left(x - \frac{17}{15}\right)$ -1 $\frac{17}{15}$

$-15x^2 + 2x + 17 = 0$

$x = \frac{17}{15}$

$\frac{D}{4} = 1 + 255 = 256$

$x_1 = \frac{-1+16}{-15} = -1$

$\frac{17}{15}$ $\frac{8}{5}$ $\frac{17}{25}$ 5

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$\left[-\frac{\pi}{4}+\pi k;\pi k\right]$ $=a^3-a^2b+ab^2+a^2b$

$\cos x<0 \Rightarrow 1+\operatorname{tg}x \geq 0$

$\operatorname{tg}x \geq -1 \Rightarrow x \in$

$// \sin x+\cos x=0$

$x=\frac{3\pi}{4}k$

2) $\sin x+\cos x \geq 0$: $x \in$

$\operatorname{tg}x \geq -1$ $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi k; -\frac{\pi}{4}+\pi k\right]$

$\sin 2x=$

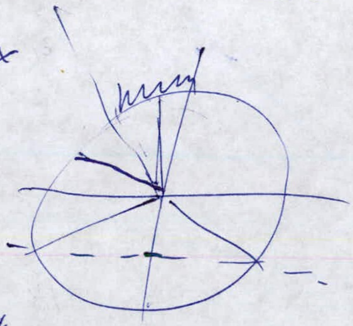
$\Leftrightarrow$

$x \in \left[\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{3\pi}{4}+\pi k\right]$

$1+2\sin x\cos x < -\sin 2x$

$1<-2\sin 2x$

$\sin 2x < -\frac{1}{2}$

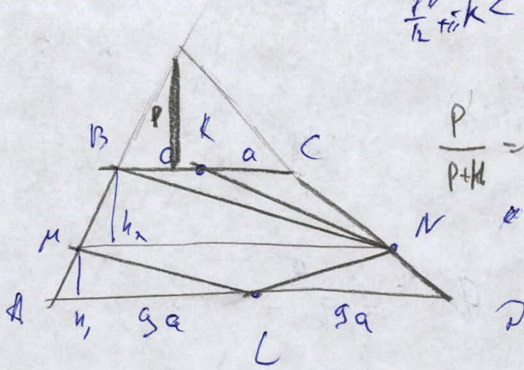


$\frac{7\pi}{6}+2\pi k < 2x < \frac{11\pi}{6}+2\pi k$

$\frac{7\pi}{12}+\pi k < x < \frac{11\pi}{12}+\pi k \Rightarrow$

$\frac{7\pi}{12}+\pi k < x < \frac{3\pi}{4}+\pi k$

3.



$\frac{P}{P+H}=\frac{1}{9}$ $H=8P$

$AD=9BC$

$\frac{AM}{MB}=\frac{h_1}{h_2}=x$

$\Rightarrow h_1=x\cdot h_2$

$H=(x+1)h_2$ $\frac{2a}{MN}=\frac{h_2}{H}=\frac{1}{x+1}$

$h_1+h_2=H$

$MN=2a(x+1)$

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{h_1\cdot MN}{h_2\cdot a}=2x(x+1)$

$S_2=a\cdot\frac{H}{x+1}$

$2x^2+2x+1 \,|\, x+1$
$2x^2-2x \,|\, 2x$

$S_1=S_2\cdot 2x(x+1)$

$f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-1+1$

$S_1+S_2=S_2(1+2x(x+1)) \to max$

$S=aH\cdot\frac{2x^2+2x+1}{x+1}=aH\left(2x+\frac{1}{x+1}\right)$