94-49-11-27
(182.1)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 173

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников

по математике

Гудкова Ивана Дмитриевича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«22» марта 2016 года

Подпись участника

94-49-11-27 (182.1)

65 (шестьдесят пять)

Олимпиада ПВГ 2016

Чистовик.

Задача №1)

$\frac{42}{31} \vee \sin 1 + \cos 1$

Т.к. $\sin 1 + \cos 1 > 0$, то возведём обе части в кв-т:

$\frac{42^2}{31^2} \vee \underbrace{\sin^2 1 + \cos^2 1}_{=1} + \underbrace{2\sin 1 \cdot \cos 1}_{\sin 2}$

$\frac{42^2}{31^2} \vee 1 + \sin 2$

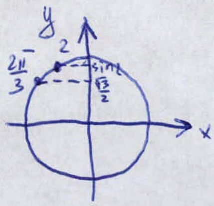
$\frac{42^2 - 31^2}{31^2} \vee \sin 2$

$\frac{(42-31)(42+31)}{31^2} \vee \sin 2$

$\frac{73 \cdot 11}{31^2} \vee \sin 2$

$\frac{803}{961} \vee \sin 2$

$73 \times 11 = 803$; $31 \times 31 = 961$



Заметим, что $\sin \frac{2\pi}{3} < \sin 2$, т.к. $2 < \frac{2\pi}{3}$, а 2 и $\frac{2\pi}{3}$ – углы 2-ой четверти.

$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Сравним следующие числа: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{803}{961}$

$\frac{3}{4} \vee \frac{803^2}{961^2}$

$\frac{3 \cdot 961^2 - 4 \cdot 803^2}{4 \cdot 961^2} \vee 0$

$3 \cdot 961^2 \vee 4 \cdot 803^2$

$961 \times 961 = 923521$; $923521 \times 3 = 2770563$; $803 \times 803 = 644809$; $644809 \times 4 = 2579236$

$2770563 \vee 2579236$

$2770563 > 2579236 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{803}{961} \Rightarrow \sin \frac{2\pi}{3} > \frac{803}{961}$, а т.к. $\sin 2 > \sin \frac{2\pi}{3}$, то ~~$\sin \frac{2\pi}{3}$~~ $\sin 2 > \frac{803}{961}$, значит

$\boxed{(\sin 1 + \cos 1) > \frac{42}{31}}$

верно

Ответ: $\sin 1 + \cos 1$ больше, чем $\frac{42}{31}$

Задача №3) $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+9)^2} \to \min$

1) $\sqrt{(x-3)^2 + y^2}$ – расстояние между точками $A(x;y)$ и $B(3;0)$

$\sqrt{x^2 + (y+9)^2}$ – расстояние между точками $A(x;y)$ и $C(0;-9)$

Т.к. нам необходимо минимизировать сумму расстояний от точки $A(x;y)$ до точек B и C

продолжение →

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик

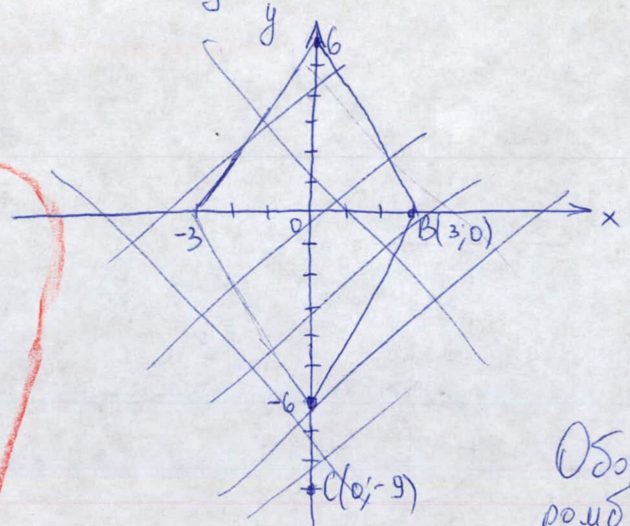
② $3|x|+|y|=6$

I) $x>0;\ y>0$
$3x+y=6$
$y=-3x+6$

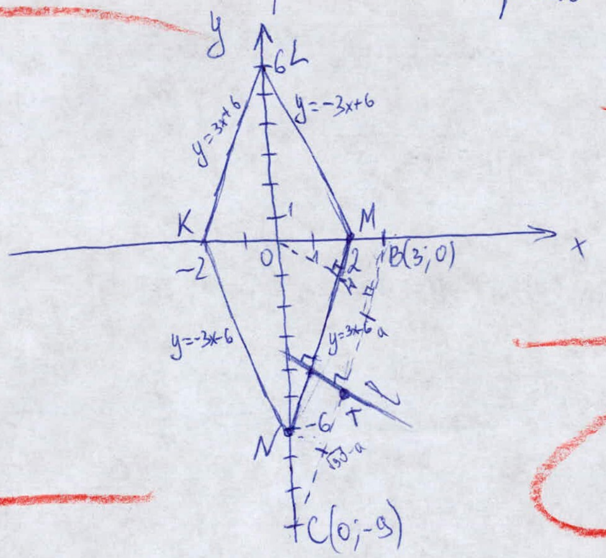
II) $x>0;\ y<0$
$3x-y=6$
$y=3x-6$

III) $x<0;\ y<0$
$-3x-y=6$
$y=-3x-6$

IV) $x<0,\ y>0$
$-3x+y=6$
$y=3x+6$



Обозначим полученный ромб KLMN (см. чертёж)



Возьмем точку P на стороне KL и точку P' на стороне LM, симметричну P отн-но O_y. Тогда $PB>P'B$, а $PN=P'N$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow P'M+P'N<PM+PN$, а значит точка $A(x;y)$ не лежит на стороне KL.

Проведя аналогичные рассуждения для сторон ML и MN, KN и MN, получим, что $A(x;y)$ лежит на стороне MN

Из геометрии известен факт, что из треугольников всех треугольников, имеющих одну и ту же площадь, наименьший периметр у равностороннего треугольника. Следуя этому же принципу из всех треугольников с равными площадями ~~наименьший периметр~~ и с равной стороной наименьший периметр у ~~того~~ треугольника, который явл-ся ~~р/б~~ равнобедренным (факт доказывается применением производной)

$S_{ABC}=const$, если $A\in MN$, т.к. $\rho(A,BC)=const$, т.к. $MN\parallel BC$ ($k_{MN}=k_{BC}=3$)

Значит проведем l: $l\perp BC$; $l\cap BC=T$, $CT=TB$

продолжение $\rightarrow$

94-49-11-27
(182.1)

Чистовик

$CT = TB = \frac{\sqrt{3^2+9^2}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$

$\rho(MN; BC)$ -?

Высота $\triangle OMN - OH$; $OH = \frac{2\cdot 6}{\sqrt{36+4}} = \frac{12}{2\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$

$\triangle MON \sim \triangle BOC$ (по 2-м углам) $\angle O$ - общий
$\angle OMN = \angle OBC$ (как соотв. при пар. прямых)

$\frac{OH}{OH_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow OH_2 = \frac{9\sqrt{10}}{10}$ (OH_2 - высота $\triangle BOC$)

$HH_2 = \rho(MN; BC) = \frac{9\sqrt{10}}{10} - \frac{3\sqrt{10}}{5} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

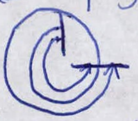
$MA + AC = 2\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2} = 2\cdot\sqrt{\frac{90}{4} + \frac{90}{100}} = 2\sqrt{\frac{90\cdot 25 + 90}{100}} = 2\cdot\sqrt{\frac{90\cdot 26}{100}} =$

$= \frac{\sqrt{90\cdot 26}}{5} = \frac{2\sqrt{45\cdot 13}}{5} = \cancel{\frac{6\sqrt{15\cdot 13}}{5}} = \cancel{\frac{6\sqrt{195}}{5}} = \frac{2\cdot 3\cdot\sqrt{65}}{5} = \frac{6\sqrt{65}}{5}$ Ответ верный

Ответ: $\frac{6\sqrt{65}}{5}$ - минимальное значение

Задача №2)

1) Заметим, что разница в длине путей, которые пробежали спортсмены между встречами равна ровно одному кругу. Действительно, каждый спортсмен пробежит целое кол-во кругов и ещё какую-то часть одного круга. ~~При этом~~ ~~если разница составляет 2к.~~ больше (эти части одинаковы)



При этом если разница путей составляет 2 круга, то первый спортсмен (быстрый) должен был обогнать первого на круг, то есть должна была произойти ещё одна встреча. Противоречие (между двумя ~~ххх~~ встречами есть ещё встреча) $\Rightarrow$ разница $\to$ 1 круг. Тогда можно записать уравнение:

$\frac{S}{7}\cdot t - \frac{S}{k}\cdot t = S$, где S – длина круга
$S \neq 0$; разделим на S $\quad$ t - время между встречами (мин)
k - время прохождения круга вторым спортсменом

$\frac{t}{7} - \frac{t}{k} = 1$

$t\left(\frac{k-7}{7k}\right) = 1$

$t = \frac{7k}{k-7}$

$(t \in \mathbb{Z})$

$(k \in \mathbb{Z})$

~~чтобы $t \in \mathbb{Z}$~~

~~$(7k) \vdots 7 \Rightarrow (k-7) \vdots 7 \Rightarrow k \vdots 7 \Rightarrow k = 7p$~~

~~Но $(7\cdot 7p) \vdots 49 \Rightarrow (k-7) \vdots 49 \Rightarrow k = 49q + 7$, $q \in \mathbb{N}$, т.к. $k \geq 7$~~

~~$q = 1 \Rightarrow k = 56 \Rightarrow t = 8 < 16$ (не удовл.)~~

~~$q =$~~

$\frac{7k}{k-7} \geq 16$ ① ~~$k = 8 \Rightarrow t = 56$ (удовл.)~~

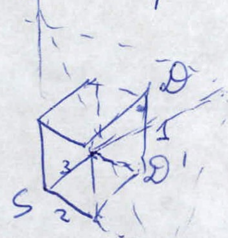
~~$k = 9 \Rightarrow t \notin \mathbb{Z}$~~

продолжение $\rightarrow$

Чистовик

6) $DD' \parallel AS \Rightarrow DD' \parallel ASC \Rightarrow \rho(D; ASC) = 3$

7) Значит для того, чтобы данные условия выполнялись в пирамиду можно вписать п/уг параллелепипед со сторонами 1; 2; 3



~~$\rho(A;$~~ $\rho(S;D) = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$ – расстояние SD

Если требуется $\min V_{SABC}$, то SD – кратчайшее расстояние между точками плоскости ABC и точкой S $\Rightarrow$ $ABC \perp SD$ не верно!

$\Rightarrow$ SD – высота пирамиды

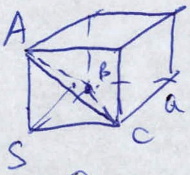
$S_{ABC} \to \min$, когда ABC –

Пусть SD – треть диагонали куба с ребром a, тогда

SABC – пирамида, отсекаемая от куба пл-тью ABC, △ABC-р/ст

$SA = SD = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \sqrt{14} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{14}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{a=\sqrt{42}} \Rightarrow$ ~~SAB~~ $SA=SB=SC=\sqrt{42}$

(пирамида, вписанная в куб имеет наим. объем)



~~V_{ABCS}~~

$V_{SABC} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{42}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{42}\cdot\sqrt{42}\right) = \cancel{21\cdot 3\sqrt{42}}\ \frac{21}{3}\sqrt{42} = 7\sqrt{42}$

Ответ: $\boxed{V = 7\sqrt{42}}$ неверно

Комментарий:

~~$V = \frac{1}{3}S\cdot h = \frac{1}{3}\cdot SB\cdot\frac{1}{2}SA\cdot SC = \frac{1}{6}SA\cdot SB\cdot SC$~~

~~$\sqrt[3]{SA\cdot SB\cdot SC} \le \frac{SA+SB+SC}{3}$ $SA\cdot SB\cdot SC \to \min$, когда $SA=SB=SC$~~

Задача №4)

$$[\log_2(\log_3 x)]^2 - 8\log_2([\log_3 x]) + 15\log_2(\log_3([x])) = 0$$

ОДЗ: $\begin{cases} \log_3 x>0 \\ [\log_3 x]>0 \\ \log_3[x]>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>1 \\ \log_3 x \ge 1 \\ [x] \ge 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>1 \\ x\ge 3 \\ x\ge 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{x \ge 3}$

1) $x=3$

$[(\log_2 1)]^2 - 8\log_2 1 + 15\log_2 1 = 0$ $\quad 0-8\cdot 0+15\cdot 0=0 \Rightarrow x=3$ – корень

Заметим, что при $x\ge 3$ $[\log_2(\log_3 x)] = \log_2([\log_3 x]) = \log_2(\log_3([x]))$ ошибочное рав-во!

$\Downarrow$

$[\log_2(\log_3 x)]^2 + 7\log_2(\log_3([x])) = 0$ $\quad f(x) = [\log_2(\log_3(x))]^2 + 7\log_2(\log_3([x]))$

При $x\ge 3$ эта ф-ция возрастает $\Rightarrow$ она может не убывает!!! иметь только 1 ноль. Этот ноль $\boxed{x=3}$ неверно

Ответ: $x=3$ не верно (потеряны решения)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

1) $k-7=1 \Rightarrow k=8 \Rightarrow t=56 > 16 \Rightarrow$ подходит → в ответ.

~~2) $k-7=2$~~ 2) $(k-7) \neq 1$

~~$k=9 \Rightarrow$~~

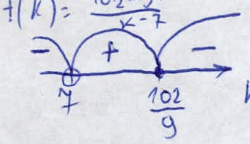
Чистовик

$$\frac{7k}{k-7} \geq 16$$

$$\frac{7k-16k+102}{k-7} \geq 0$$

$$\frac{102-9k}{k-7} \geq 0$$

$f(k) = \frac{102-9k}{k-7}$



$k \in \left(7; \frac{102}{9}\right]$

~~$k \in (7$~~

$k \in \{8; 9; 10; 11\}$, других k быть не может

~~$k=8 \Rightarrow 56$~~ а) $k=8$ - рассмотрен

б) $k=9 \Rightarrow t = \frac{63}{2}$; $t \notin \mathbb{Z}$

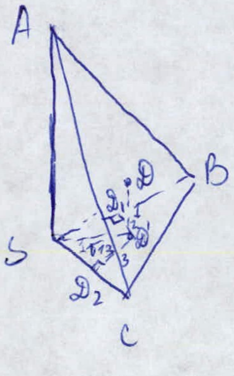
в) $k=10 \Rightarrow t = \frac{10 \cdot 7}{3}$; $t \notin \mathbb{Z}$

г) $k=11 \Rightarrow t = \frac{11 \cdot 7}{4}$; $t \notin \mathbb{Z}$

верно

Ответ: 56 минут, других возможных периодов времени нет

Задача №5)



1) $D' = пр_{(SBC)} D$

$DD' \parallel AS$ ~~$\Rightarrow D'S$~~

⇓

$\rho(D; AS) = \rho(D'; AS) = \sqrt{13}$

2) $AS \perp SB$
$AS \perp SC$
$SB \cap SC = S$
$(SB) \subset (SBC)$
$(SC) \subset (SBC)$

по пр-ку $\Rightarrow (AS) \perp (SBC)$

⇓ по св-ву

$AS \perp SD'$

$(SD') \subset (SBC)$

3) $\rho(D'AS) = SD'$ (по п. 1 и п. 2)

$SD' = \sqrt{13}$

4) Пусть $\rho(D'; BS) = a$
$\rho(D'; SC) = b$

Тогда по т. Пиф. для $\triangle DD'D_1$ и $DD'D_2$

$D_1 \in [SB]$ $D_2 \in [SC]$

$D'D_1 \perp SB$ $D'D_2 \perp SC$

$$\begin{cases} a^2 + DD'^2 = 5 \\ b^2 + DD'^2 = 10 \end{cases}$$

, но $a^2 + b^2 = 13$ (по т. Пиф для $\triangle D'D_1S$)

5) Получим, что $\underbrace{a^2+b^2}_{13} + 2DD'^2 = 15$

$2DD'^2 = 2$

$\boxed{DD' = 1} \Rightarrow a=2;\ b=3$

А значит $D_1S = 3$; $D_1D' = D_2S = 2$ ($D_1D'D_2S$ - пр/к)

Продолжение

94-49-11-27 (182.1)

Черновик

Олимпиада ПВГ 2016

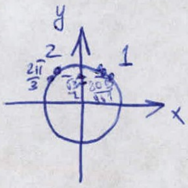
$\frac{42}{31} \vee \sin 1 + \cos 1$

$\frac{42^2}{31^2} \vee 1 + 2\sin 1 \cos 1$

$\frac{42^2 - 31^2}{31^2} \vee \sin 2$

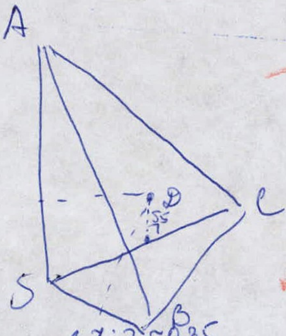
$\frac{11 \cdot 73}{31^2} \vee \sin 2$

$\frac{803}{961} \vee \sin 2$



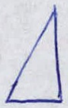
$73 \times 11 = 803$

$31 \times 31 = 961$



$1{,}7 : 2 \approx 0{,}85$

$\sin\alpha =$



$\cancel{\sin 2 < \sin \frac{2\pi}{3}}$

$\cancel{\frac{2\pi}{3} > 2}$

$\sin 2 > \sin \frac{2\pi}{3}$

$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \frac{803}{961}$

$\frac{3}{4} \vee \frac{803^2}{961^2}$

961×961: 961, 5766, 8649, 923521

$\times 3$: 2770563

803×803: 2409, 6424, 644809

$\times 4$: 2579236

~~3·9616 3696~~

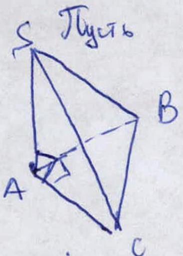
$\frac{3}{4} - \frac{803^2}{961^2} = \frac{3 \cdot 961^2 - 4 \cdot 803^2}{4 \cdot 961^2}$

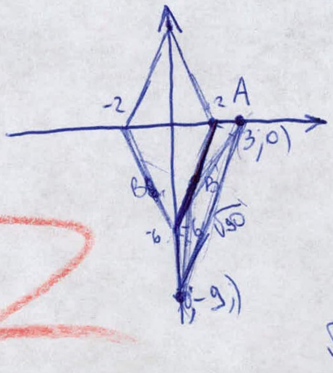
7; x

$v_1 = \frac{S}{7}$

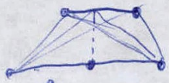
$v_2 = \frac{S}{x}$

Пусть





$(x; y)$ до т. $(3; 0)$



$\sqrt{a^2+h^2} + \sqrt{(90-a)^2+h^2}$

$3x + y = 6$

$x > 0$; $y > 0$

$x < 0$, $x < 0$: $-y - 3x = 6$

$x > 0$, $y < 0$: $3x - y = 6$

$y = 3x - 6$

$\sqrt{(x-3)^2 + (3x-6)^2} + \sqrt{x^2 + (3x+3)^2} =$

$= \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 9x^2 - 36x + 36} + \sqrt{x^2 + 9x^2 + 18x + 9}$ $42^2 - 40 \cdot 45$

$\sqrt{10x^2 - 42x + 45} + \sqrt{10x^2 + 18x + 9} \to \min$

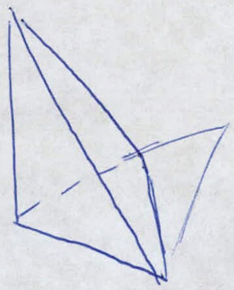
$f'(x) = \frac{1 \cdot (20x - 42)}{2\sqrt{10x^2 - 42x + 45}} + \frac{(20x + 18)}{2\sqrt{10x^2 + 18x + 9}}$

$(20x - 42) \cdot \sqrt{10x^2 + 18x + 9} + (20x + 18) \cdot \sqrt{10x^2 - 42x + 45}$

$(42 - 20x) \cdot \sqrt{10x^2 + 18x + 9} = (20x + 18) \cdot \sqrt{10x^2 - 42x + 45}$

$(21 - 10x) \sqrt{10x^2 + 18x + 9} = (10x + 9) \cdot \sqrt{10x^2 - 42x + 45}$

$\begin{cases} (21 - 10x)^2 \cdot (10x^2 + 18x + 9) = (10x + 9)^2 \cdot (10x^2 - 42x + 45) \\ (21 - 10x) \cdot (10x + 9) \geq 0 \end{cases}$

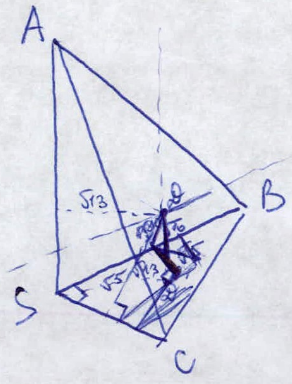


$[\log_2(\log_3 x)]^2 - 8\log_2([\log_3 x]) + 15\log_2(\log_3([x])) = 0$

ОДЗ: $[\log_3 x] > 0$

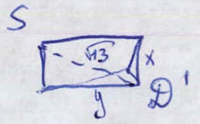
$\log_3 x \geq 1$

$\underline{x \geq 3}$



$D' = \text{пр}^{\perp}_{(SBC)} D$

$DD'_1 \parallel AS$; $D'S = \sqrt{13}$



$x^2 + y^2 = 13$

$x^2 + h^2 = 10$

$y^2 + h^2 = 5$

$2h^2 = 2$

$h^2 = 1$

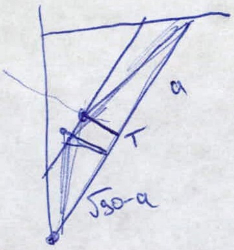
$[\log_2 \log_3 x]$

Cv.

$\log_2[\log_3 x]$

$\log_2 \log_3 [x]$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



$\sqrt{a^2+h^2} + \sqrt{(\sqrt{90}-a)^2+h^2}$

$\sqrt{a^2+h^2} + \sqrt{a^2-2a\sqrt{90}+90+h^2}$

$[-2,5]$ - $[3,9]$

3

$[x]>0$

$x \geq 1$

$\log_3[x] \geq 0$

~~lo[x]~~

$\log_3[x] \neq 0$

$[x] \neq 1$

$[x] \neq 0$ $\Rightarrow x \geq 2$

~~$[\log_3 x] >$~~

$[\log_3 x] > 0$

$\log_3 x \geq 1$

$x \geq 3$

7; 10

см

t: $v_1 = \frac{S}{7}$ 6

$\frac{S}{7} \cdot t - \frac{S}{k} \cdot t = y \cdot S$

t - время между встречами

k - время круга второго

$y \in \mathbb{Z}$; $t \in \mathbb{Z}$; $k \in \mathbb{Z}$

$\frac{k \cdot t \cdot S - 7St}{7k} = yS$

$\frac{t(k-7)}{7k} = y = 1$

1) $t : 7$, $k : 7$ 1) $k : 7 \Rightarrow 7k : 49$

$k \geq 16$

$tk - 7t = 7k$

$k(t-7) - 7t = 0$

$t = \frac{7k}{k-7}$ 56

$k:7$ $\Rightarrow 7k : 49 \Rightarrow k-7 : 49$

98 105

$8 = \frac{7 \cdot 56}{49}$

7 $\frac{102}{9}$

$\frac{7k}{k-7} \geq 16$

$\frac{7k - 16k + 102}{k-7} \geq 0$

>16 $16(k-7) \leq 7k$

$9k \leq 16 \cdot 7$

$k \leq \frac{102}{9}$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!