90-09-58-14
(183.3)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Выход 11.47 –
Вернулся 11.51

Вариант 174

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ______________________

по математике

Андреева Дмитрия Александровича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«22» марта 2016 года

Подпись участника

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

90-09-58-14
(183.3)

Чистовик | стр. 1

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

90 (девяносто баллов)

Задание №1:

I. $\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}=\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$

докажем, что $\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{40}{29}$

обе части положительны — можно возводить в квадрат:

$$2\sin^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1600}{841}$$

$$1-\cos\left(1+\frac{\pi}{2}\right)<\frac{1600}{841}$$

$\sin 1<\frac{759}{841}$ — а это верно, так как:

$$1<\frac{\pi}{3}\Rightarrow \sin 1<\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{1{,}72}{2}=\frac{172}{200}=\frac{43}{50}<\frac{759}{841}$$

нет слов о монотонности (так как $43\cdot 841=36163<37950=759\cdot 50$)

не показано, что $\sqrt{3}<1{,}72$!

Ответ: $\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}$ меньше

ответ верный но обоснования не строгие

Задание №2:

Пусть V_1 и V_2 — скорости водителей в кругах/минуту

n — число минут, нужное медленному на 1 круг;

m — число минут между обгонами.

Тогда: $\begin{cases} 3V_1=1 \\ nV_2=1 \\ m(V_1-V_2)=1 \\ n;m\in\mathbb{N} \\ n>3 \\ m>8 \end{cases}$

домножим 3-е уравнение на $3n$ получим:

$$3nmV_1-3nmV_2=3n$$

$$nm-3m-3n=0$$

$$\Leftrightarrow (n-3)(m-3)=9$$

Т.к. $m;n\in\mathbb{N}$, то $\begin{cases} 9 \vdots m-3 \\ 9 \vdots n-3 \end{cases}$ но $m>8 \Rightarrow m-3>5 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ единственное подходящее решение:

$\begin{cases} m-3=9 \\ n-3=1 \end{cases}\Rightarrow n=4$

Ответ: 4 минуты

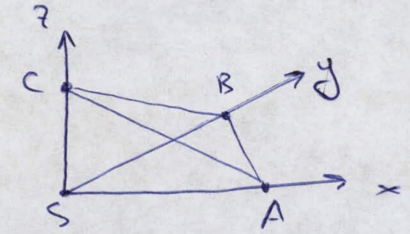
верно

Чистовик | стр. 4.

Задание № ~~продолжение~~ 5:

Введём ортогональную систему координат:

S – центр; SA; SB; SC – оси.



Пусть $SA=a$; $SB=b$; $SC=c$

Точка $D=(x;y;z)$.

Тогда: $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y^2+z^2=20 \\ x^2+z^2=13 \end{cases}$ – расстояния

А плоскость ABC: $bcx+acy+abz=abc$

Из уравнений расстояний: $\begin{cases} x^2=13-z^2 \\ y^2=20-z^2 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ | $33-2z^2=25$, $z^2=4$, $z=2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z=2 \\ y=4 \\ x=3 \end{cases}$

Это точка лежит в пл. ABC, значит $3bc+4ac+2ab=abc$

А объём пирамиды $V=\frac{1}{3}\cdot c\cdot\frac{1}{2}ab=\frac{abc}{6}$ – min – ?

Как известно, минимум выражения $3bc+4ac+2ab$ достигается при $3bc=4ac=2ab \Rightarrow \begin{cases} c=\frac{2}{3}a; \\ b=\frac{4}{3}a \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{8}{9}a^3=\frac{8}{3}a^2+\frac{8}{3}a^2+\frac{8}{3}a^2 \Rightarrow a=9 \Rightarrow \begin{matrix} b=12 \\ c=6 \end{matrix}$

$\Rightarrow V=\frac{abc}{6}=9\cdot 12=108$

Ответ: 108

верно

Чистовик | стр. 3

Задание №4:

$$[\log_3(\log_2 x)]^2 - 12\log_3([\log_2 x]) + 20\log_3(\log_2 [x]) = 0$$

(I.) $[\log_2 x] > 0$ т.к. под логарифмом

$\Leftrightarrow \log_2 x \geq 1 \Leftrightarrow \underline{x \geq 2}$

(II.) При $x \geq 2$:

1. $\log_3(\log_2 x) \geq 0$
2. $12\log_3([\log_2 x]) \geq 0$
3. $20\log_3(\log_2[x]) \geq 0$

Но тогда, если у нас достигается равенство:

$$12\log_3([\log_2 x]) \geq 20\log_3(\log_2[x])$$

при [illegible] $\Leftrightarrow x \geq 3$: $\begin{cases} 12\log_3([\log_2 x]) = 0 \\ 20\log_3(\log_2[x]) > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ неравенство не выполняется.

А при $x \geq 4$ правая часть уже быстрее возрастает, чем левая.

Значит нам может подходить только $\underline{2 \leq x < 3}$

(III.) А при этих значениях все три слагаемых исходного уравнения обращаются в ноль.

Получаем:

Ответ: $[2;3)$ верно

[illegible]

Шифр

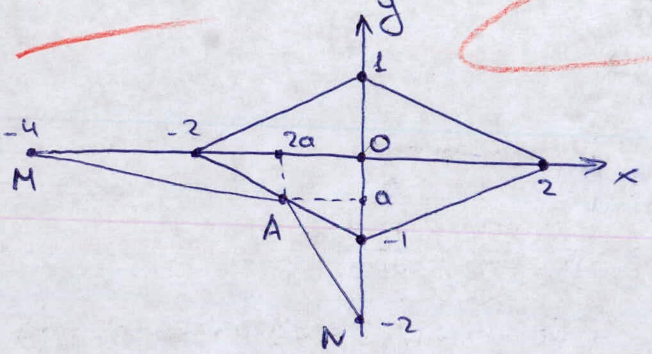
Чистовик | стр. 2.

Задание № 3:

$$t=\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+2)^2} - \min -?$$

при $|x|+2|y|=2$.

Нарисуем:



1. $|x|+2|y|=2$ – ромб
2. $t=R_1+R_2$
   (где $R_1;R_2>0$)
   $R_1=\sqrt{(x+4)^2+y^2}$
   $R_2=\sqrt{x^2+(y+2)^2}$

Графическое изображение
R_1 и R_2 – это длины отрезков $R_1=MA$, $R_2=NA$, где $A(x;y)$

где $A(x;y)$

~~3. В нашем случае A должна лежать на ромбе, причём так, чтобы MA+AN было минимальным.~~

~~Во-первых, видно, что надо брать эту точку в области, где $x;y\leq 0$. (так сумма меньше всего)~~

~~Во-вторых, я [illegible] утверждаю, что там минимум достигается при $A(-2;-1)$~~

~~Док-во: пусть $A(2a;a)$, где $-1\leq a\leq 0$.~~

~~Тогда $MA^2=(4+2a)^2+a^2$; $NA^2=(2+a)^2+4a^2$~~

~~И тогда $((MA)^2)'=2(4+2a)+2a=8+6a$~~

~~$((NA)^2)'=2(2+a)+8a=4+10a$~~

~~Но при $-1\leq a\leq 0$: $8+6a>-(4+10a)$~~

~~т.к. 12~~

3. В нашем случае A должна лежать на ромбе, причём так, чтобы MA+AN было минимальным. – верно

Во-первых, видно, что надо брать эту точку в области $x;y\leq 0$. Т.е. $A(2a;a)$, где $-1\leq a<0$

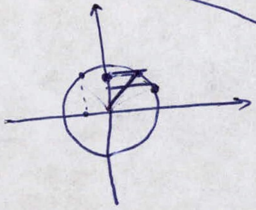
задача не решена до конца

~~Продолжение (стр. 3 страницу)~~

Черновик

1. $\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}=$

$\frac{\pi}{7}<\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}$



$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \vee \frac{40}{29}$

$1-\cos\left(1+\frac{\pi}{2}\right) \vee \frac{1600}{841}$

$\sin 1 \vee \frac{759}{1600}$

$\sin 1>\sin 57$ $\frac{759}{841}$

$\frac{76\cancel{0}}{160\cancel{0}}=\frac{38}{80}=\frac{19}{40}$

$\sin 1 \vee \frac{19}{40}>\frac{759}{1600}$

$\sin 1>\frac{1}{2}$

$\times\begin{array}{r}29\\29\end{array}$
261
$+58$
841

$40^2-29^2=$
$=11\cdot 69$
$\times\begin{array}{r}11\\69\end{array}$
69
75

$\frac{759}{841}$

$75\cdot 9=11\cdot 69$

$\frac{759}{843}=\frac{253}{281}$

$t'_{\text{по } y}=\frac{y}{\sqrt{(x+4)^2+y^2}}+\frac{y+2}{\sqrt{x^2+(y+2)^2}}$

$y^2(x^2+(y+2)^2)=(y+2)^2((x+4)^2+y^2)$

$y^2x^2=(y+2)^2(x+4)^2$

$4y(x+4)^2+$
$+4(x+4)^2+$
$+y^2(8x+16)=$
$=0$

$D=\cancel{16(x+4)^4-16\cdot 8(x+4)^3=16(x+4)^3(x+4-8)=16(x+4)^2(x^2-16)}$

2.

$V_1; V_2$

$\frac{\text{км}}{\text{м}}$

$3V_1=1$
$nV_2=1$ $n\in N$
$n>3$

$m(V_1-V_2)=1$ $m\in N$
$m>8$

$3mnV_1-3mnV_2=3n$
$mn-3m=3n$
$mn-3m-3n$
$m(n-3)-3(n-3)-9=0$

$\begin{cases}(m-3)(n-3)=9\\ n>3\\ m>8\end{cases}$ $m-3>5$

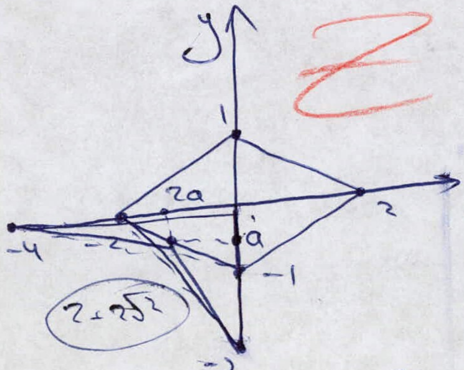
$n=4$
$m=12$

3.

$\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+2)^2}=t$

$|x|+2|y|=2$

$x+2y=2$



$2+2\sqrt{2}$

$1+\sqrt{10}\vee 2+2\sqrt{2}$
$\sqrt{10}\vee 1+2\sqrt{2}$

$x^2+(y+2)^2=R_1^2$
$(x+4)^2+y^2=R_2^2$

$t=|R_1|+|R_2|$

$y=\frac{-4(x+4)^2\pm 4(x+4)\sqrt{x^2-16}}{16(x+2)}$

$\cancel{t=\sqrt{(2+\alpha)^2+4\alpha^2}}$

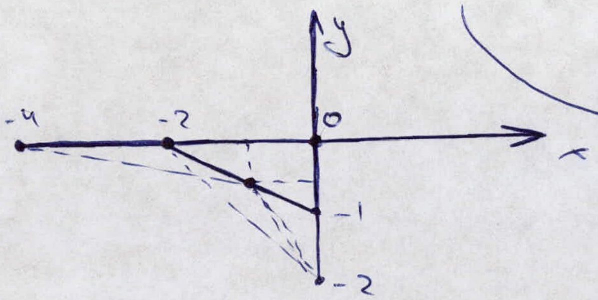
$\cancel{x^2}+\cancel{8x}+16-8x-16$

$y=\frac{-4(x+4)^2\pm 4(x+4)x}{16(x+2)}$; $y=\frac{-4x^2-32x-64+4x^2+16x}{16(x+2)}=$

$y=-\frac{x+4}{x+2}$

$=\frac{-\cancel{16}x-64}{x+2}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



$1+\sqrt{17} \vee 2+2\sqrt{2}$

$\sqrt{17} \quad 1+2\sqrt{2}$

$x = 2-2y$

$$\sqrt{(6-2y)^2+y^2} + \sqrt{(2-2y)^2+(y+2)^2} =$$

$$=\sqrt{36-24y+5y^2} + \sqrt{8-4y+5y^2}$$

$$d' = \frac{10y-24}{2\sqrt{\ldots}} + \frac{10y-4}{2\sqrt{\ldots}}$$

$$(5y-12)^2\cdot(8-4y+5y^2) = (5y-2)^2(36-24y+5y^2)$$

это слишком

$$\sqrt{(6-2y)^2+y^2}$$

$$\frac{5y-12}{\sqrt{\ldots}}$$

$$\left((4+2a)^2+a^2\right)' \vee \left((2+a)^2+4a^2\right)'$$

на отрезке $\underline{\underline{-1\le a\le 0}}$

$2(4+2a)+2a \vee 2(2+a)+8a$

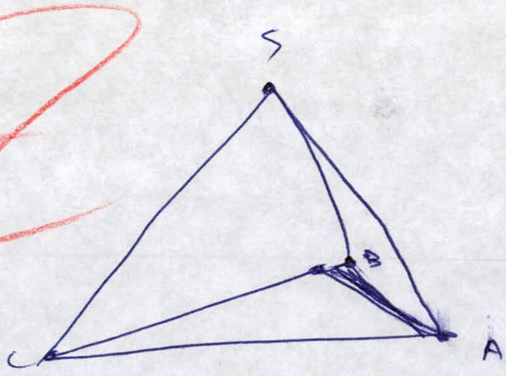
$8+4a+\cancel{2a} \vee 4+2a+8a$

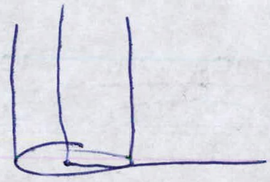
$4 \vee 4a$

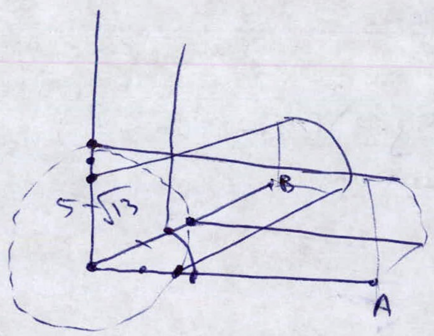
$1 \vee a$

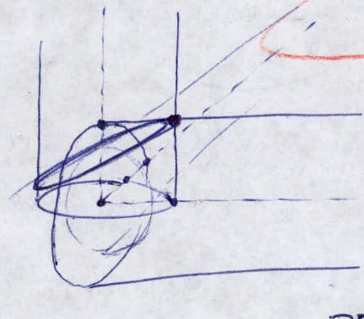
$a>-$

Черновик









$759 \times 50 = 37950$

841×43: 2523, 3364, 36163

$< \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{759}{841}$

841×841: 841, 3364, 6728, 707281

759×253: 2277, 3795, 1518, 192027

$\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1{,}72}{2} = \frac{172}{200} = \frac{86}{100} = \frac{43}{50}$

$841 \times 50 = 42050$

759×43: 2277, 3036, 32637

Черновик

$(x+4)^2 + \frac{(x+4)^2}{(x+2)^2}$

$(x+4)\sqrt{1+\frac{1}{(x+2)^2}} + \sqrt{x^2+\frac{4}{(x+2)^2}} = 4$

4.

$\boxed{[\log_3(\log_2 x)]^2} + \boxed{12\log_3([\log_2 x]) + 20\log_3(\log_2([x]))} = 0$

$\log_2 x > 0$

$x > 0$ $x > 1$

$\log_2 x \geq 1$

$x \geq 2$ $x \geq 2$

$\log_2[x] > 0$

$\log_2 x \geqslant 1$

$\log_3(\log_2 x) \geqslant 0$

$\cancel{t^2 - 12t + 20 = 0}$

$\cancel{(t-2)(t-10) = 0}$

$\cancel{144 - 80 = 64;\ 8^2}$

$t^2 + 8t = 0$

$t = -8$?
$t = 0$?

$12\log_3([\log_2 x]) \geq 20\log_3(\log_2([x]))$

при $x \geq 2$

при $x = 2$ — хорошо.

при $x > 2$?

при $2 \leq x < 4$

слева: 0

при $2 \leq x < 3$ и справа 0.

А вот при $x \geq 3$ справа. станет больше, чем. слева.

итого: $2 \leq x < 3$

при этом: $0 \leq \log_3(\log_2 x) < 1$

$[2; 3)$

90-09-58-14
(183.3)

Черновик

$MA = \sqrt{(4+2a)^2 + a^2}$

$AN = \sqrt{(2+a)^2 + 4a^2}$

$(MA+AN)' = MA' + AN' = 0$

$MA' = \frac{2a + 2(4+2a)}{4\cdot 2\sqrt{\ldots}}$

$AN' = \frac{8a + 2(2+a)}{2\sqrt{\ldots}}$

$3bc = 4ac$

$b = \frac{4}{3}a$

$c = \frac{1}{2}b = \frac{2}{3}a$

$3\cdot 2c^2 + x^2\cdot\frac{3}{2}c^2 + bc^2$

$18c^2 = c^3\cdot x\cdot\frac{3}{2}$

$3bc + 4ac + 2ab \geq$

$c = 6$

$b = 12$

$a = 9$

$(4+3a)\sqrt{\ldots} = -(2+5a)\sqrt{\ldots}$

$2abc = \ldots \geq 2\sqrt{12ab}\,c + 2\sqrt{8bc}\,a + 2\sqrt{6ac}\,b$

$(16 + 24a + 9a^2)(5a^2 + 4a + 4) = (4 + 20a + 25a^2)(5a^2 + 16a + 16)$

$(28 + \frac{9}{4})(\frac{5}{4} + 6)$ $(14 + \frac{25}{4})(\frac{5}{4} + 24)$

~~$5a^2(16a^2 - 4a - 12) + 8a(23a^2$~~

~~$36\cdot\frac{20}{9} + 7$~~

~~$\frac{79}{4}\cdot\frac{121}{4} = \frac{81}{4}\cdot\frac{101}{4}$~~

$7\sqrt{5}$ $+3\sqrt{5}$

$6\cdot 12\cdot 27$

$\sqrt{abc} \geq \sqrt{12c} + \sqrt{8a} + \sqrt{6b}$

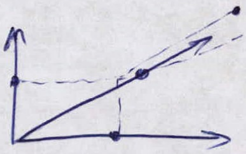
$MA^2 = 4 + (2+2a)^2 + a^2 + 2\cdot 2\cdot$ [illegible] $(2+2a)$

$4 + 4 + 8a + 4a^2 + a^2 + 8 + 8a = 5a^2 + 16a + 16$ Опять...

$\sqrt{5}$

$MA^2 = 4 + a^2 + 4a\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$

$MN^2 = 1 + (\sqrt{5} - a)^2 + 2(\sqrt{5} - a)\frac{1}{\sqrt{5}}$

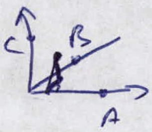


A(a;0;0)

B(0;b;0)

C(0;0;c)

D(x;y;z)



$abc = 3bc + 4ac + 2ab$ — min?

$\frac{3}{a} + \frac{4}{b} + \frac{2}{c} = 1$

~~$ka + mb + nc + 1 = 0$~~

$ka + 1 = 0$

$mb + 1 = 0$

$nc + 1 = 0$

$$\begin{cases} \boxed{bcx + acy + abz - abc = 0} \\ 20 = y^2 + z^2 \\ 13 = x^2 + z^2 \\ 25 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

abc — min.

при $\begin{cases} abc = bcx + acy + abz \\ y^2 + z^2 = 20 \\ x^2 + z^2 = 13 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

~~$z = \sqrt{20 - y^2}$~~

$\frac{ab}{2}\cdot c\cdot\frac{1}{3} = \frac{abc}{6}$

$13 - z^2 + 20 - z^2 = 25$

$2z^2 = 8$

$z = 2$ $y = 4$ $x = 3$

Черновик

$S = \frac{1}{2} r p$