34-62-88-54
(181.3)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 172

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы"

по математике

Димитриенко Александра Юрьевича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«22» марта 2016 года

Подпись участника

Ясинский / [illegible] (65) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Матвеев [illegible]

34-62-88-54 (181.3)

Чистовик. (Шестьдесят пять) Бег / Нестов

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

№1

$\frac{1}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}$ - угол I четверти $\Rightarrow \sin\frac{1}{2} > 0$

$\cos\frac{1}{2} > 0$

$\frac{26}{19} > 0$, значит, можем сравнить квадраты этих чисел:

$\left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{1}{2}+\cos^2\frac{1}{2}+2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} = \sin 1 + 1$

$\left(\frac{26}{19}\right)^2 \vee \sin 1 + 1$

$\sin\alpha \in [-1; 1]$ $\quad \sin 1 + 1 < \sin\frac{\pi}{3} + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}+1$

$\frac{676}{361} \vee \frac{\sqrt{3}+2}{2}$

$\frac{1352}{722} \vee \frac{722+361\sqrt{3}}{722}$

$361\sqrt{3} \vee 630$

$361\sqrt{3} < 630$

т.к. $(361\sqrt{3})^2 < 630^2$

$390963 < 396900$

$\boxed{\frac{26}{19} > \left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)}$

Ответ: $\frac{26}{19} > \left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)$

Верно

№2

Время между обгонами было больше 7, а более быстрый за 7 минут проехал больше двух кругов $\left(\frac{7}{3}\right)$. Более быстрый водитель ещё не обогнал более медленного, т.е. разница между ними меньше круга, а значит, более медленный проехал больше $\frac{7}{3}-1=\boxed{\frac{4}{3}}$ круга. Пусть n - время (целое), за которое более медленный водитель проезжает круг. Тогда:

$\frac{4}{3}n < \frac{7}{3}\cdot 3$ (время, за которое медлен. проехал $\frac{4}{3}$ круга, меньше, чем время, за которое быстрый проехал $\frac{7}{3}$ круга).

$n < \frac{21}{4}$

Так как n целое, а также $n > 3$ (т.к. n - время более медленного водителя, а более быстрый проехал круг за 3 минуты), то $n = 4 \vee n = 5$.

Пусть T - время между обгонами, x - количество кругов, которое проезжает более медленный водитель за время T. Тогда:

$T = nx = 3(x+1)$, т.к. за время T более быстрый водитель проезжает на 1 круг больше более медленного.

$nx = 3x+3$

$x = \frac{3}{n-3}$; $T = nx = \frac{3n}{n-3}$

При $n=4$:

$T = \frac{12}{1} = 12$

При $n=5$:

$T = \frac{15}{2}$

Чистовик. №4

Из I уравнения $x \in [2;3)$

$\log_2 x \in [1;2) \Rightarrow x \in [2;4)$

$\log_3(\log_2 x) \in [0;1) \Rightarrow \log_2 x \in [1;3) \Rightarrow x \in [2;8)$

ОДЗ.

Самым жёстким условием является $x \in [2;3)$.

Это и будет ~~ответом~~ решением уравнения, т.е при $\forall x \in [2;3)$ мы будем получать тот же результат.

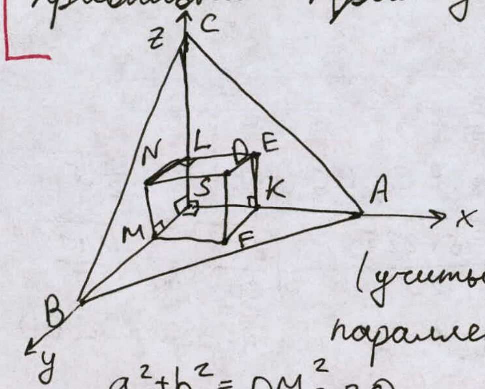
Ответ: $x \in [2;3)$

ответ верный, однако фактически угадан.

№5

неверно! Пирамида SABC будет иметь минимальный объём, когда $\triangle ABC$ — правильный, а $SA=SB=SC$ (SABC — правильная пирамида.

Это верно только в случае, когда D — симметрично расположена



$\rho(D;SA) = DK$ ~~= a~~

$\rho(D;SB) = DM$ ~~= b~~

$\rho(D;SC) = DL$ ~~= c~~

Пусть $SL = a$, $SK = b$, $SM = c$. Тогда (учитывая, что SMFKLNDE — прямоугольный параллелепипед (т.к. $SA \perp SB \perp SC$):

$a^2+b^2 = DM^2 = 20$

$a^2+c^2 = DK^2 = 25$

$b^2+c^2 = DL^2 = 13$

$2a^2 = 32$

координаты точки D

$a = 4$

$b = 2$

$c = 3$

$AC = AB = BC$, $SB = SA = SC \Rightarrow \angle SCB = \angle SCA = \angle SAB = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для любой точки $X \in (ABC)$ с координатами $(x;y;z)$ ~~(координаты S(0;0;0))~~ верно: $x+y+z = a+b+c = 9$ (т.к. $D \in (ABC)$)

Тогда $A(9;0;0)$, $B(0;9;0)$, $C(0;0;9)$. $SA = SB = SC = 9$.

$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ASB} \cdot SC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = \frac{3^5}{2} = \frac{243}{2} = 121{,}5$

Ответ: 121,5

ответ не верный, грубая ошибка в рассуждениях

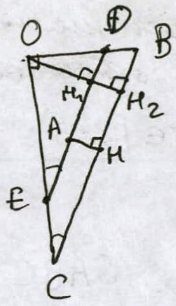
ЧИСТОВИК. №3

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AH\cdot BC=const$

необоснованный факт.

Значит, сумма сторон AB и AC будет минимальна тогда, когда $\triangle ABC$ будет равнобедренным ($AB=AC$).

Рассмотрим $\triangle OBC$.



$S_{OBC}=\frac{1}{2}OB\cdot OC=9$

$S_{OBC}=\frac{1}{2}OH_2\cdot BC$ ($OH_2\perp BC$, $BC\parallel ED \Rightarrow OH_2\perp ED$)

$OH_2=\frac{2\cdot 9}{BC}=\frac{18}{\sqrt{OB^2+OC^2}}=\frac{18}{\sqrt{45}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$

$\triangle EOD\sim\triangle COB$, $\frac{OH_1}{OH_2}=\frac{OD}{OB}=\frac{2}{3}$

$OH_1=\frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow H_1H_2=OH_2-OH_1=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

AHH_2H_1 – прямоугольник $\Rightarrow AH=H_1H_2=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\triangle ABC$ – равнобедренный $\Rightarrow H$ – середина BC, $HC=HB=\frac{BC}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{5}$

$AB=AC=\sqrt{AH^2+HC^2}=\sqrt{\frac{4}{5}+\frac{45}{4}}=\sqrt{\frac{16+225}{20}}=\sqrt{\frac{241}{20}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{241}{5}}$

$AB+AC=2AB=\sqrt{\frac{241}{5}}=\sqrt{48{,}2}$; $A(1;-2)$, т.к. A – середина ED

Ответ: $\sqrt{48{,}2}$

ответ верный, нет достаточного обоснования AB=AC

№4

Пусть x, $\log_2 x$ и $\log_3(\log_2 x)$ – целые. Тогда:

$\log_3(\log_2 x)=t.$

$t^2-10t+21t=0$

$t(t+11)=0$

$t=0 \quad \vee \quad t=-11$

найдено одно целое решение $x_0=2$.

$\log_3(\log_2 x)=0 \qquad \log_3(\log_2 x)=-11$

$\log_2 x=1 \qquad \log_2 x=3^{-11}$

$x=2 \qquad x=2^{3^{-11}}$, не целое

~~Для того, чтобы исходное уравнения~~

нет связи / необоснованно

Тогда для исходного уравнения:

$$\begin{cases}[x]=2\\ [\log_2 x]=1\\ [\log_3(\log_2 x)]=0\end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases}[x]=2^{3^{-11}}\\ [\log_2 x]=3^{-11}\\ [\log_3(\log_2 x)]=-11\end{cases}}$$

~~Из анализа Так как $|\log_2 3-1|<\ldots$ $f(x)-f(x_0)<x-x_0$,~~
~~а $|\log_2(2^{3^{-11}}+1)-\log_2(2^{3^{-11}})$~~

Шифр

Чистовик. №2

Т.к T по условию задачи — целое, то $T=12$ $(12>7)$.

Ответ: 12 минут. ответ верный

№3

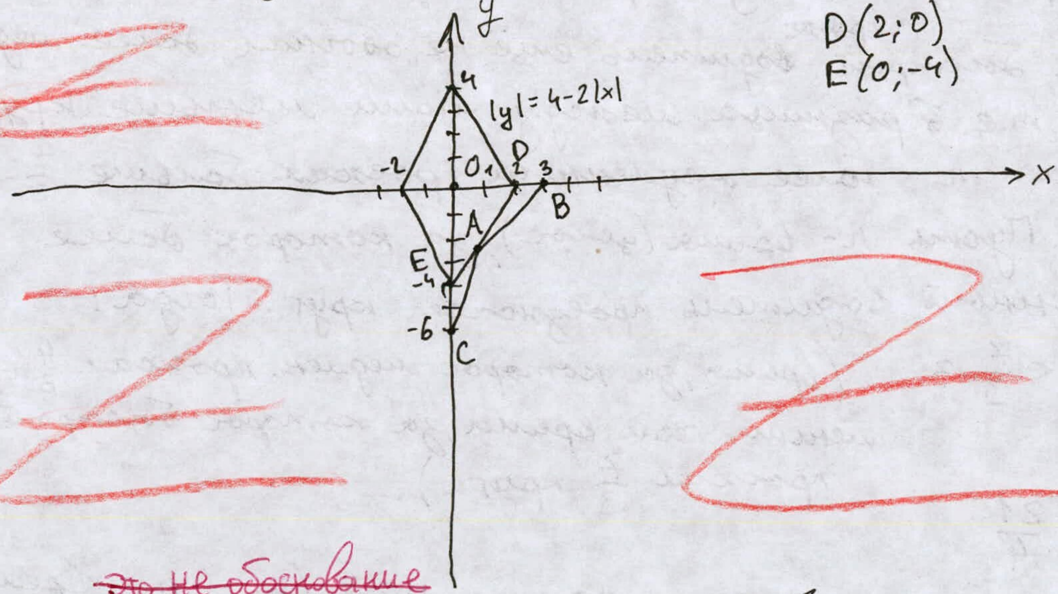
$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+6)^2}$$

Геометрический смысл этого выражения — сумма расстояний между ~~точками~~ парами точек B,A и A,C.

$B(3;0)$
$A(x;y)$
$C(0;-6)$

$|y|=4-2|x|$

~~Геом~~ График этой функции — ромб с центром в точке $(0;0)$. Это значит, что точка $A(x;y)$ принадлежит одной из сторон ромба. Необходимо найти минимальное значение ~~выражения~~ $BA+AC$.



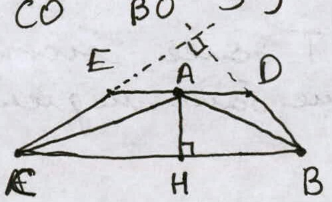
$D(2;0)$
$E(0;-4)$

~~это не обоснование~~

Из рисунка видно, что $AC+AB$ будет минимально, когда A будет лежать на ребре ED ромба.

Рассмотрим $\triangle EOD$ и $\triangle COB$.

$$\left.\begin{aligned}&\angle EOD=\angle COB\\&\frac{EO}{CO}=\frac{DO}{BO}=\frac{2}{3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \triangle EOD\sim\triangle COB \Rightarrow ED\parallel BC$$



A двигается по ED, $ED\parallel BC \Rightarrow$ $AH=const$, A всегда одинаково удалена от BC.

Матвеев

34-62-88-54
(181.3)

Черновик.

$\left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)^2 = 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} = \sin 1$

$\sqrt{\sin 1}$ $\qquad \frac{26}{19}$ $\qquad (0;-4):7$

$(3;0): 1+\sqrt{40} > 7$

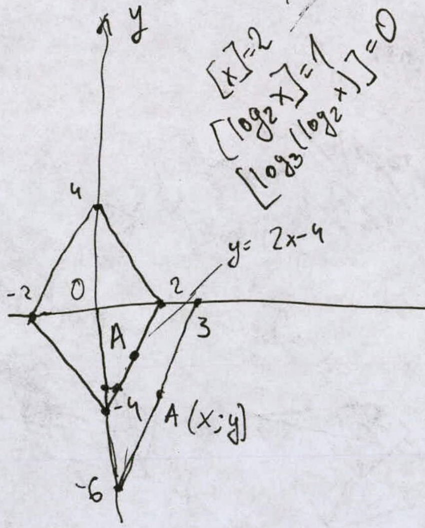
$\sin 1 < 1$

$x\in[2;3)$

$[x]=2$

$[\log_2 x]=1$

$[\log_3(\log_2 x)]=0$



$[x]=2^{3}=11$

$[\log_2 x]=3^{-11}$

$[\log_3(\log_2 x)]=-11$

$3\sqrt{5}\cdot 3h = 18$

$h=\frac{2}{5}\sqrt{5}$ $\qquad S_\triangle = 3$

$\sqrt{12{,}05} = \sqrt{\frac{241}{20}}$

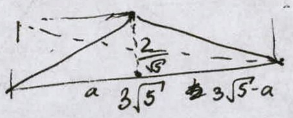
$|y| = 4-2|x|$

$\sqrt{\frac{45}{4}+\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{225+16}{20}} =$

$S = const$

$c, h = const$

$\frac{ab}{R} = const$



$\sqrt{x^2-6x+9+4x^2-16x+16} +$

$+\sqrt{x^2+4x^2+8x+4} = \sqrt{5x^2-22x+25}+$

$\begin{array}{r} \times 220 \\ 21 \\ \hline 22 \\ 44 \\ \hline 4620 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times 22 \\ 16 \\ \hline 132 \\ 22 \\ \hline 352 \end{array}$

$\sqrt{x^2-6x+9+4x^2-16x+16} + \sqrt{5x^2+8x+4}$

$+\sqrt{x^2+4x^2+8x+4}$

$f(a)=\sqrt{a^2+\frac{4}{5}}+$

$+\sqrt{(3\sqrt{5}-a)^2+\frac{4}{5}}$

$\sqrt{45\frac{4}{5}-6\sqrt{5}a+a^2}$

$f'(x) = \frac{\cancel{10x-22}\ 5x-11}{\sqrt{5x^2-22x+25}} + \frac{5x+4}{\sqrt{5x^2+8x+4}} = 0$

$\begin{array}{r} \times 95 \\ 95 \\ \hline 475 \\ 855 \\ \hline 9025 \end{array}$

$f'(a) = \frac{2a}{2\sqrt{a^2+\frac{4}{5}}}+$

$(5x-11)^2(5x^2+8x+4) = (5x+4)^2(5x^2-22x+25)$

$\frac{2a-6\sqrt{5}}{2\sqrt{\ldots\ldots}} = 0$

$(25x^2-110x+121)(5x^2+8x+4) = (25x^2+40x+16)\cdot(5x^2-22x+25)$

$\cancel{125x^4}+\cancel{200x^3}+100x^2-\cancel{550x^3}-880x^2-440x+605x^2+968x+484 =$

$\frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{4}{5}}} =$

$= \cancel{125x^4}-\cancel{550x^3}+625x^2+\cancel{200x^3}-880x+1000x+80x^2-352x+400$

$= \frac{3\sqrt{5}-a}{\sqrt{\frac{229}{5}-6\sqrt{5}a+a^2}}$

$560-1320=-760$

$880x^2-760x-84=0$

$220x^2-190x-21=0$

$\frac{D}{4} = 95^2+21\cdot 220 = 13645$

$\begin{array}{r} \times 115 \\ 115 \\ \hline 575 \\ 115 \\ 115 \\ \hline 13225 \end{array}$

$a^2\left(\frac{229}{5}-6\sqrt{5}a+a^2\right) = (3\sqrt{5}-a)^2\cdot$

$(3\sqrt{5}-a)^2+\frac{4}{5} \quad \cdot\left(a^2+\frac{4}{5}\right)$

черновик.

4 или 5

$T=4x=3(x+1) \lor T=5x=\cancel{3}2(x+1)$

$x=\frac{3}{2}$

$\frac{4}{3x} \geq \frac{7}{9}$

$x \leq \frac{12}{7}$

$x=3$

$\boxed{T=12}$

$\log_3 \log_2 x = n$

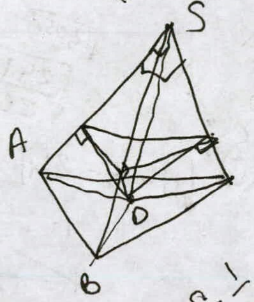
$\log_2 x = 3^n$

$x = 2^{3^n}$

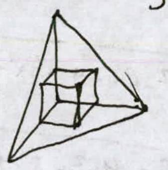
$n=0 \lor n=-11$

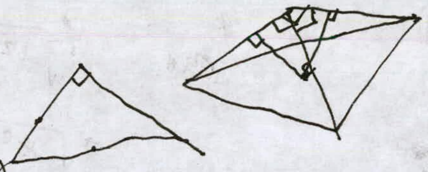
$x=2^{\frac{1}{3^{11}}}$

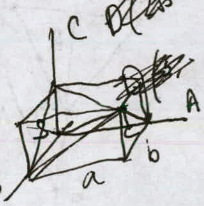
$x=2$



$S=\frac{1}{3}Sh$







$y=2x-4$

$(1;-2)$

$\sqrt{4+4}+\sqrt{1+16}=$

$=\sqrt{8}+\sqrt{17}$

$a^2+b^2=13$

$a^2+c^2=20$

$b^2+c^2=25$

$2a^2=8$

$a=2$

$b=3$

$c=4$

$7 > \frac{4}{3}x$

$x<\frac{21}{4}$

$19\sqrt{3}$ 33

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=$

$=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\frac{4+2\sqrt{3}}{4}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{33}{38} \lor \frac{26}{19}$

$\frac{26}{19}$

$\frac{676}{361}$

63 × 63 = 189 + 378 = 3969

361 × 361 = 361 + 2166 + 1083 = 130321

× 3 = 390963

396900

26 × 26 = 156 + 52 = 676