62-30-12-08
(182.5)

Олимпиада ПВГ 2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 173

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников

по математике

Дрокина Ярослава Александровича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата «22» марта 2016 года

Подпись участника

80 (восемьдесят)

Чистовик

Задача № 1

Поскольку $0<1<\frac{\pi}{2}$, то $\sin 1+\cos 1>0$

Сравним квадраты этих чисел: $(\sin 1+\cos 1)^2=\sin^2 1+\cos^2 1+2\sin 1\cos 1=$

$=1+\sin 2$; $\left(\frac{42}{31}\right)^2=\frac{42^2}{31^2}$ => сравним $\frac{42^2}{31^2}$ и $1+\sin 2$ <=>

сравним $\frac{42^2-31^2}{31^2}$ и $\sin 2$; Заметим, что т.к. $1<\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2}<2<\frac{2\pi}{3}$

но т.к. $\frac{\pi}{2}<2<\frac{2\pi}{3}$, то $\sin\frac{\pi}{2}>\sin 2>\sin\frac{2\pi}{3}$, то есть $1>\sin 2>\frac{\sqrt{3}}{2}$

Сравним $\frac{42^2-31^2}{31^2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (если окажется, что $\frac{42^2-31^2}{31^2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$, то это автоматически означает, что $\sin 2>\frac{42^2-31^2}{31^2}$

Проделаем вычисления: $42^2=1764$; $31^2=961$ → $\frac{42^2-31^2}{31^2}=\frac{803}{961}$

тогда мы сравниваем $\frac{803}{961}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ <=> $2\cdot 803$ и $961\sqrt{3}$

числа положительны => сравним их квадраты: $4\cdot 803^2$ и $3\cdot 961^2$

$803^2=644809$, $961^2=923521$ → $4\cdot 803^2=2.579.236$; $3\cdot 961^2=2.770.563$

Несложно видеть, что $2.770.563>2.579.236$ => $4\cdot 803^2<3\cdot 961^2$ =>

$2\cdot 803<961\cdot\sqrt{3}$ => $\frac{803}{961}<\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin 2$ => $\frac{42^2-31^2}{31^2}<\sin 2$ => $\frac{42}{31}<\sin 1+\cos 1$

Таким образом, второе число больше

Решение правильное и ответ верный.

Ответ: $\sin 1+\cos 1>\frac{42}{31}$

Задача № 2

Пусть v_1 м/мин – скорость быстрого бегуна, v_2 м/мин – медленного, S м – длина круга вокруг озера. Тогда первый бегает круг за $\frac{S}{v_1}=7$ мин.; второй: $\frac{S}{v_2}=k$ мин, где $k\in\mathbb{N}$, $k>7$ (т.к. этот бегун медленнее)

Найдем время между встречами: встреча происходит, когда первый обгоняет второго на S м, а т.к. его скорость относительно второго v_1-v_2 м/мин, то это время между встречами равно $\frac{S}{v_1-v_2}=n$ мин, где $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 16$. Составим систему: $\begin{cases}\frac{S}{v_1}=7\\ \frac{S}{v_2}=k\\ \frac{S}{v_1-v_2}=n\end{cases}$ <=> $\begin{cases}S=7v_1\\ S=v_2k\\ S=n(v_1-v_2)\end{cases}$ =>

$\begin{cases}7v_1=kv_2\\ 7v_1=n(v_1-v_2)\end{cases}$ <=> $\begin{cases}\frac{7}{k}v_1=v_2\\ 7v_1=n\left(v_1-\frac{7}{k}v_1\right)\end{cases}$ => из нижнего уравнения имеем $7=n\left(1-\frac{7}{k}\right)$, т.к. $v_1\neq 0$

Домножим обе части на k, откуда $7k=n(k-7)$

Решим уравнение в целых числах, зная, что $k>7$, $n\geq 16$

~~Предположим, что $k=7p$, $p\in\mathbb{N}$, т.е. $k\,\vdots\,7$. Тогда $49p=n7(p-1)$ =>~~

~~$7p=n(p-1)$~~

(продолжение →)

Задача №3 Чистовик

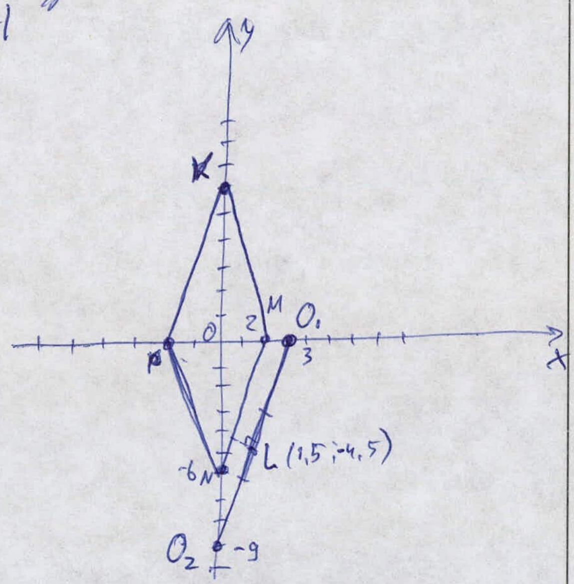
Рассмотрим с графической точки зрения условие $3|x|+|y|=6$: $|y|=6-3|x|$

на плоскости это ромб:

в первом квадранте $y=6-3x$

во втором квадранте $y=6+3x$

в 3 и 4 получаем симметрию фигуры отн. оси Ox.



Рассмотрим сумму корней:

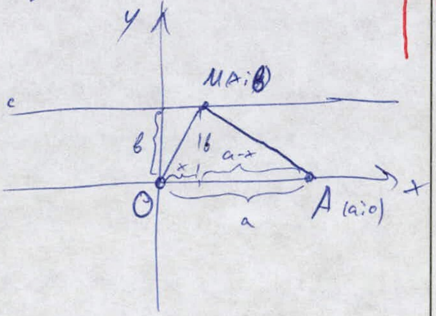
Пусть $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=a \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2=a^2$ - окружность радиуса a, центр в $(3;0)$ - O_1

Пусть $\sqrt{x^2+(y+9)^2}=b \Leftrightarrow x^2+(y+9)^2=b^2$ - окружность радиуса b, центр в $(0;-9)$ - O_2

Рассмотрим вопрос задачи:

Для точек с условием $3|x|+|y|=6$ надо найти наименьшее значение $a+b$, иначе говоря, мы ищем такую точку ромба, что расстояние от неё до O_1 и O_2 в сумме дает наименьшее значение. Очевидно, эта точка должна лежать на $[MN]$: Если она на KP, то расстояние от симметричной ей отн. Oy до O_2 - такое же (в силу симметрии), а до O_1 - меньше. После симметрии этой (второй) точки отн. Ox расстояние до O_1 - не изменилось, до O_2 - уменьшилось. $\Rightarrow$ аналогично получим, что и на NP таких точек нет. То есть, искомая точка лежит на $[LM]$. Заметим, что $(MN) \parallel (O_1O_2)$: ведь $\triangle ONM \sim \triangle OO_2O_1$ по сторонам и углу. Докажем факт: точка на прямой, параллельной данной, ~~равноуд~~ имеет наименьшее расстояние до концов отрезка на этой прямой, если лежит на серединном перпендикуляре к отрезку. Доказательство:

Верно!



Пусть на Ox отмечена точка $A(a;0)$ и есть прямая $c \parallel Ox$; Докажем, что $M \in c$ $OM+MA$ - наименьшее, если $OM=MA$ (т.е. она на ср. перп. к OA)

Действительно:

$OM+MA=\sqrt{x^2+b^2}+\sqrt{b^2+(a-x)^2}$

по нерав-ву о средних $\sqrt{\frac{x^2+b^2}{2}} \geq \frac{x+b}{2}$; $\sqrt{\frac{b^2+(a-x)^2}{2}} \geq \frac{b+a-x}{2} \Rightarrow$

$OM+MA \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(b+x+b+a-x)=const$, равенство достижимо, когда $b=x=a-x$, т.е. $x=\frac{a}{2} \Rightarrow OM+MA$ наименьшее, только если M лежит на серединном перпендикуляре к OA - утверждение доказано

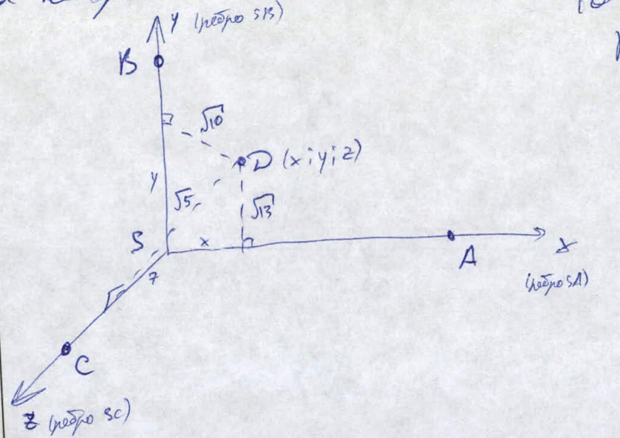
(продолжение →)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

чистовик

Задача №5

Введем систему координат с центром в S и осями, ~~совпада~~ на которых лежат A, B и C (оси перпендикулярны). Найдем координаты точки D ~~[illegible]~~:



По условию $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y^2+z^2=13 \\ x^2+z^2=10 \end{cases} \Rightarrow 2(x^2+y^2+z^2)=28$

откуда $x^2+y^2+z^2=14 \Rightarrow$

$\begin{cases} z^2=14-5=9 \\ x^2=14-13=1 \\ y^2=14-10=4 \end{cases}$

считая, что все координаты >0

получаем $\underline{D(1;2;3)}$

Пусть уравнение плоскости ABC имеет вид $Mx+Ny+Kz+P=0$, т.к. $D\in(ABC) \Rightarrow M+2N+3K+P=0$ (1)

Пусть плоскость (ABC) пересекает оси Ox, Oy, Oz в соответствующих точках, тогда $A(x;0;0)$, $B(0;y;0)$, $C(0;0;z)$

т.к. эти точки лежат в (ABC) $\Rightarrow \begin{cases} 0M+0N+zK+P=0 \\ 0M+yN+0K+P=0 \\ xM+0N+0K+P=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{-P}{K} \\ y=-\frac{P}{N} \\ x=\frac{-P}{M} \end{cases}$ (2)

Теперь найдем объем тетраэдра: по формуле

$V=\frac{1}{3}S\cdot h$, где S - основание (BCS), а h - высота $|AS|$

$S_{BCS}=\frac{1}{2}\cdot y\cdot z$ как прямоугольный треугольник, $|AS|=x \Rightarrow$

$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}xyz=\frac{xyz}{6}$, зная (2) подставим и получим

$V=\frac{-P^3}{6MNK}$ (3). Теперь нам нужно найти наименьшее значение V, зная, что $M+2N+3K+P=0$

то есть, если $\boxed{\frac{M}{P}+2\frac{N}{P}+3\frac{K}{P}=-1}$

Поскольку мы рассматриваем (ABC) в положительном направлении осей x, y, z, то можно считать, что координаты вектора нормали к ней положительны, т.е. $M, N, K>0$, в то время как $P<0$; пусть $L=-P \Rightarrow \frac{M}{L}+\frac{2N}{L}+\frac{3K}{L}=1$

найти наименьшее значение $\frac{L^3}{6MNK}$

Как известно из неравенства о средних для 3-х чисел

$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \frac{\frac{M}{L}+\frac{2N}{L}+\frac{3K}{L}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{2\cdot3\cdot MNK}{L^3}} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{6MNK}{L^3}}$

Верно

откуда $\frac{1}{27}\geq\frac{6MNK}{L^3}$, т.к. числа положительны $\Rightarrow \frac{L^3}{6MNK}\geq27$

Откуда наименьшее значение $V=27$ (достигается при $M=2N=3K$)

Ответ: 27 (и значение достигается)

задача решена верно!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик

(продолжение задачи №2)

~~Поскольку $k-7<k$, то $n>k$ иначе произведение справа меньше, тогда~~

I случай $n \vdots k$, тогда $k-7 < 7$ (иначе справа произведение больше) $\Rightarrow k < 14 \Rightarrow 7<k<14$ $n>k$

тогда $k \not\vdots 7 \to k-7 \not\vdots 7 \to n \vdots 7$ (т.к. справа число $\vdots 7$) $\Rightarrow$

$n = 7p \geq 21$, где $p \in N$ и $p \geq 3$

решим в целых числах $k = p(k-7)$, $p \in N$, $p \geq 3$, $7<k<14$

т.к. k и $k-7$ разной четности, то k-четное (иначе справа четное а слева нечетное), но тогда p-четное (иначе справа нечет. слева четное) $\Rightarrow$ p-делитель k и он четный

переберем $p = 4, 6, 8$ и 12 (т.к. $p \geq 3$ и $k<14$)

1) $p=4 \Rightarrow$ $k = 4k-28 \Rightarrow 28 = 3k$, $k \notin Z$

2) $p=6 \Rightarrow$ $k=6k-42$, $k \notin Z$

3) $p=8 \Rightarrow$ $k=8k-56 \Rightarrow \boxed{k=8}$

4) $p=12 \Rightarrow$ $k=12k-12 \cdot 7$, $k \notin Z$

Единственный ответ $k=8$ при $p=8$, то есть в этом случае между встречами прошло

$\boxed{n = 7p = \underline{56} \text{ минут.}}$

Это и есть ответ.

Задача решена верно! Решение обосновано!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

62-30-12-08
(182.5)

Чистовик

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

(продолжение задачи № 3)

А значит чтобы найти:

нужно точку осталось найти пересечение

ср. перпендикуляра к $[O_1O_2]$ и отрезка $[MN]$

Координата середины $[O_1O_2]$: $L(1,5; -4,5)$

уравнение O_1O_2: $y = 3x - 9$ → уравнение прямой

перпендикулярной O_1O_2: $y = -\frac{1}{3}x + b$ (как известно, произведение угловых коэф-тов перпендикулярных прямых равно -1), т.к. $L(1,5; -4,5)$ лежит на

прямой $y = -\frac{1}{3}x + b$ $\Rightarrow -4,5 = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} + b \Rightarrow b = -4,5 + \frac{1}{2} = -4$

уравнение ср. пера к O_1O_2: $y = -\frac{1}{3}x - 4$

найдем пересечение с $[MN]$ (ур-ние прямой MN: $y = 3x - 6$)

$-\frac{1}{3}x - 4 = 3x - 6 \Rightarrow \left(\frac{9}{3} + \frac{1}{3}\right)x = 2 \Rightarrow x = \frac{2\cdot 3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

тогда $y = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} - 4 = -4 - \frac{1}{5} = \frac{-21}{5}$

Осталось подставить $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{-21}{5}$ в

искомое ~~урав~~ выражение:

$$\sqrt{\left(\frac{3}{5} - 3\right)^2 + \frac{21^2}{5^2}} + \sqrt{\frac{9}{25} + \left(\frac{-21}{5} + 9\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{25} + \frac{441}{25}} + \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{576}{25}} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\sqrt{585} + \sqrt{585}\right) = \frac{2}{5}\cdot\sqrt{585} = \frac{6}{5}\sqrt{5\cdot 17}$$

Ошибка на самом последнем шаге

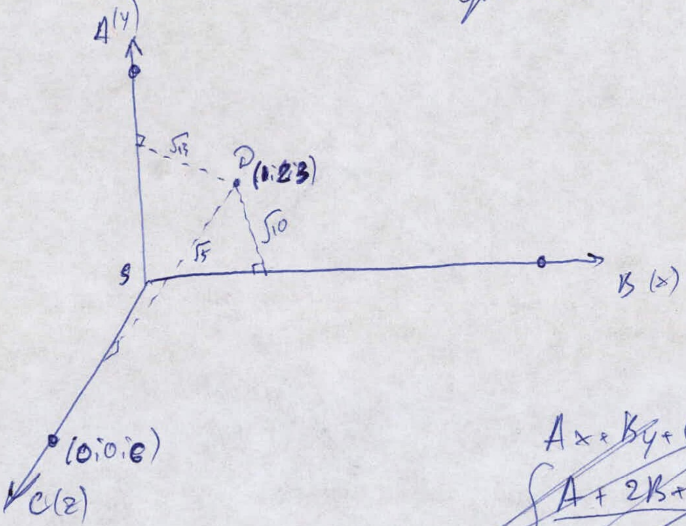
Правильный ответ!

Ответ: $\frac{6}{5}\sqrt{5\cdot 17}$

~~Ответ~~

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Черновик



$D(1;2;3)$

$\underline{M+2N+3K+P=0}$

$3z+P=0$
$2y+P=0$
$x+P=0$

$V_{тетр.}=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot z\cdot y\cdot x=\boxed{\frac{xyz}{6}}$

Найти $\min\frac{xyz}{6}$, если

$$\begin{cases} Kz+P=0\\ Ny+P=0\\ Mx+P=0\\ M+2N+3K+P=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} Kz+P=0\\ Ny+P=0\\ Mx+p=0\\ M+2N+3K+P=0\end{cases}\quad z=\frac{-P}{K}\quad y=-\frac{P}{N}\quad x=-\frac{P}{M}$$

$xyz=\frac{-P^3}{KNM}$ $\quad V=\frac{-P^3}{6KNM}\to\min$

если $M+2N+3K+P=0$

$\frac{M}{P}+2\frac{N}{P}+3\frac{K}{P}=-1$ $\quad a+2b+3c=-1$ $\quad \min\left(\frac{-1}{6abc}\right)$

$\sqrt[3]{6abc}\le\frac{a+2b+3c}{3}=-\frac{1}{3}$

$6abc\le-\frac{1}{27}$ $\quad \frac{1}{6abc}\ge-27$

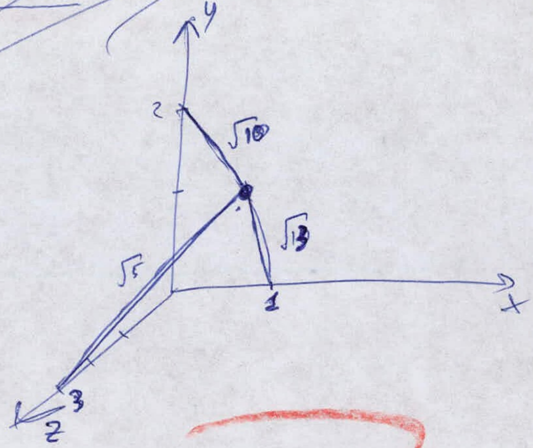
Д1

3B: $0\cdot a+b+0\cdot c=0$

$$\begin{cases} a^2+c^2=10\\ b^2+c^2=13\\ a^2+b^2=5\end{cases}\quad b^2=4\quad a^2=1\quad c^2=9$$

$2(a^2+b^2+c^2)=28$ $\quad \Sigma=14$

$Ax+By+Cz+D=0$ – пл-ть ABC



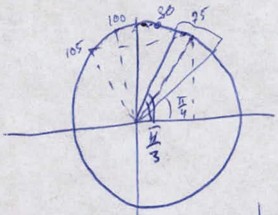
Черновик

$\sin 1 + \cos 1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 1\right) = \sqrt{2}\left(\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{42}{31}$ сравним $\frac{42}{31} \overset{<}{и} \sqrt{2}$ $\quad 42^2 \overset{<}{и} 2\cdot 31^2$ $\quad$ Ответ: меньше

$1764 \overset{<}{и} 1922$

42×42: 84, 168, 1764 $\qquad 31 \times 31$: 31, 93, 961; $961 \times 2 = 1922$



$\sin 1 < \sin\frac{\pi}{3}$

$\cos 1 < \cos\frac{\pi}{4}$ $\Big| < \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

$1{,}35 \overset{?}{<} \frac{\sqrt{2}+1}{2} < \Big|\ \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 1,\ \frac{1}{2} < \cos 1$ $\quad 100 <$ $\quad < 45+60 = 105$

$42 : 31 = 1{,}35\ldots$ (31, 110, 93, 170, 155, 15…)

$\sin 75 < \sin(\ ) < \sin 80$

$1{,}35 > \frac{2{,}5}{2}$

~~$f(x) = \sin x + \cos x$~~

$110 < 2 < 120^\circ$ $\quad 57 \quad 55$

$\frac{42^2}{31^2}$ и $1 + \sin 2$

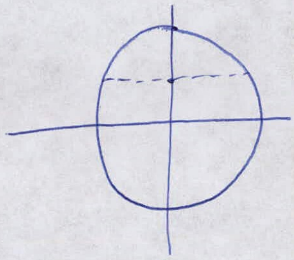
sin

$1764 - 961 = 803$

$\frac{42^2 - 31^2}{31^2}$ и $\sin 2$ $\quad \frac{803}{961}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin 2$

$\sin 2 > \sin 120 = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{803}{961} \overset{?}{\underset{и}{<}} \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin 2$



сравнить

$8030 : 961 = 0{,}83$ (7688, 3420, 2883, 6370)

$\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$

См.

$\frac{4\cdot 803^2}{961^2}$ и 3

$4\cdot 803^2 \overset{?}{<}$ и $3\cdot 961^2$

$\cancel{4}\ 1\cdot 803^2$ и $3(961^2 - 803^2)$

$3\cdot 158\cdot 1764$

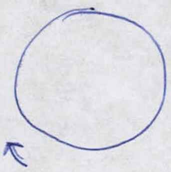
$644809 \overset{<}{и} 836136$

803×803: 2409, 6424, 644809

$961 - 803 = 158$ $\quad 961 + 803 = 1764$ $\quad 1764 \times 158$: 14112, 8820, 1764, 278712; $278712 \times 3 = 836136$

$v_1 ; v_2$ круг S: $\frac{S}{v_1} = 7$

$\frac{S}{v_2} = k,\ k \in \mathbb{N},\ 7 > k$



между встречами-целое ≥ 16 об-?

$\frac{S}{v_1} = 7 \quad \frac{S}{v_2} = k, \quad \frac{S}{v_1 - v_2} = n, \quad n \geq 16, \ k < 7$

$\begin{cases} 7v_1 = kv_2 \\ 7v_1 = n(v_1 - v_2) \\ n \geq 16 \\ k < 7 \end{cases}$

42×42: 84, 168, 1764; $- 961$; 31×31: 31, 93

803

Черновик

$$\begin{cases} 7v_1 = kv_2 & , k>7 \\ 7v_1 = n(v_1 - v_2) & , n \geq 16 \\ k, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$v_2 = \frac{7}{k} v_1$ $k>7$

$7v_1 = -n \cdot \frac{7}{k} v_1 + n v_1$

$\times \begin{array}{r} 24 \\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$

$7 = n - n \cdot \frac{7}{k}$

$7v_1 = n(v_1 - \frac{7}{k} v_1)$

$\boxed{7 = n(1 - \frac{7}{k})}$ $7k = n(k-7)$

$7 = n(1 - \frac{7}{k})$

$7k = n(k-7)$ $k>7$ $n \geq 16$?

1) $n \vdots k \to n \geq k \to k-7 \leq 7$ $\boxed{k \leq 14}$

$n > k; 7 < k < 14$

значит $\boxed{k \not\vdots 7} \to k-7 \not\vdots 7 \to n \vdots 7 \Rightarrow n \geq 21$ $n = 7p$

$\boxed{k = p(k-7) \quad , p \in \mathbb{N} \quad , p \geq 3}$

$n = 7p$ 8

$7 < k < 14 \to 0 < k-7 < 7$

$\boxed{n = 56}$

если $p = 3$, то $k = 3k - 21 \Leftrightarrow 21 = 2k$ W

если $p = 4$, то $k = 4k - 28 \Leftrightarrow 28 = 3k$ W

$7v_1 = 8v_2 = 56(v_2 - v_1)$

если $p = 5$, то $k = 5k - 35$ W

$p = 6$, то $k = 6k - 42$ $42 = 5k$ W

$p = 7$, то $k = 7k - 49$ $6k = 49$ W

$p = 8$ $k = 8k - 56$ $56 = 7k \to \boxed{k = 8}$

Итог $7<k<14 \to$ рассмотрев $3 \leq p < 14$ – найдем все возможные k целые,

при этом: если k-чёт – $(k-7)$-нечёт. $\to$ p-чётное | перебор только по чётным

если k-нечёт. $\to k-7$-чёт $\to$ p-нечуд. | p (в поисках чётного k)

$p = 4, 6, 8, 12$ см,

$p = 12$ $k = 12k - 12 \cdot 7$ $12 \cdot 7 = 11k$ W

~~$18+3+7$~~ $\frac{x-3+y}{2} \leq \sqrt{\frac{(\ )^2 + (\ )^2}{2}}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}(x-3+y) + \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y+9) \leq A$

равенство:

$\frac{\sqrt{2}}{2}(2x+2y+6) = \sqrt{2}(x+y+3) \leq A$

$$\begin{cases} x-3 = y \\ x = y+9 \end{cases}$$

$9x^2 + 6|x||y| + y^2 = 36$ $y^2 = 36 - 9x^2 - 6|x||y|$

$\times \begin{array}{r} 21 \\ 21 \\ \hline 21 \\ 42 \\ \hline 441 \end{array}$

$\sqrt{x^2 - 6x + 9 + 36 - 9x^2 - 6|x||y|}$

1) $3x + y = 6$, $x>0, y>0$

$y = 6 - 3x$

$5 \cdot 3$

$\begin{array}{r} 45 \\ -21 \\ \hline 24 \end{array}$

$-4,5 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} + b$

$\sqrt{(x-3)^2 + (6-3x)^2} + \sqrt{x^2 + (15-3x)^2}$

$b = -4,5 + \frac{1}{2} = -4$

$\begin{array}{r|l} 585 & 5 \\ 117 & 3 \\ 39 & 3 \\ 13 & \end{array}$

$\sqrt{x^2 - 6x + 9 + 36 - 36x + 9x^2} + \sqrt{x^2 + 9x^2 - 90x + 225}$

$\frac{15}{5} - \frac{3}{5} = \frac{12}{15}$

$\sqrt{10x^2 - 42x + 45} + \sqrt{10x^2 - 90x + 225}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$\log_2(\log_3(x)) = a \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

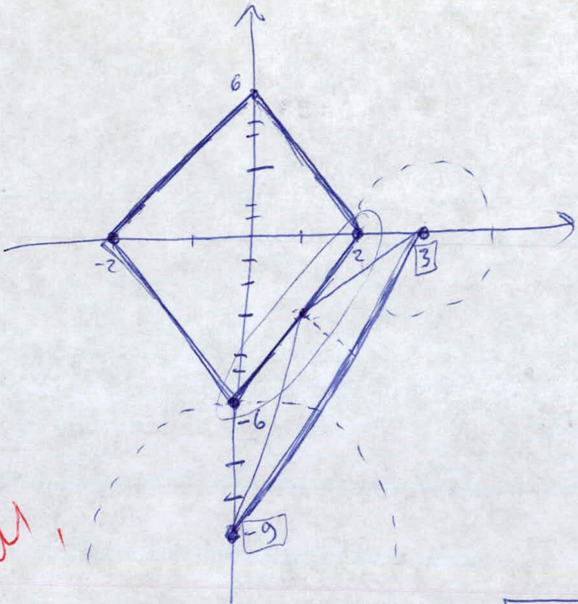
1) $x = 9$ Черновик

$\log_3 x = 2^7$

$a^2 - 8a + 15a = a(a+7) = 0$

$|y| = 6 - 3|x|$

$a^2 = (x-3)^2 + y^2$



$(2;0)$

$y < 0$
$x > 0$
$3x - y = 6$

$\boxed{y = 3x - 6}$

$\sqrt{(x-3)^2 + 9(x-2)^2} + \sqrt{x^2 + (3x+3)^2}$

$\sqrt{x^2 - 6x + 9 + 9x^2 -}$

$\sqrt{(x-3)^2 + (3x-6)^2} + \sqrt{x^2 + (3x+3)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 9x^2 - 36x + 36} + \sqrt{}$

$\sqrt{x^2 + 9x^2 + 18x + 9} = \sqrt{10x^2 - 42x + 45} + \sqrt{10x^2 + 18x + 9}$ – найти min

$\sqrt{45} + \sqrt{9}$ $\qquad \sqrt{10 - 42 + 45} + \sqrt{10 + 27} - \sqrt{13} + \sqrt{37}$

$f'(x) = \frac{20x - 42}{2\sqrt{}} + \frac{20x + 18}{2\sqrt{}} = \frac{10x - 21}{\sqrt{}} + \frac{10x + 9}{\sqrt{}} = 0$

$(10x - 21)\sqrt{10x^2 + 18x + 9} + (10x + 9)\sqrt{10x^2 - 42x + 45} = 0$

$(10x - 21)^2(10x^2 + 18x + 9) = (10x + 9)^2(10x^2 - 42x + 45)$

$\times \begin{array}{r}21\\21\end{array}$ $\quad 21$ $\quad 42$ $\quad 441$

$(10^2x^2 - 20 \cdot 21 \cdot x + 21^2)(10x^2 + 18x + 9) = (10^2x^2 + 20 \cdot 9x + 81)(10x^2 - 42x + 45)$

$10^3x^4 + 18 \cdot 10^2x^3 + 9 \cdot 10^2x^2 - 20 \cdot 21x^3$

$10x^2 + 18x + 9 > 0 \qquad x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 90}}{}$

$10x^2 - 42x + 45 = 0 \qquad D = 21^2 - 450 \geq 0$

$\Sigma > \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

$\frac{6}{9} = \frac{2}{3} \rightarrow$ они параллельны!

$y_3 = 3x - 6$

$3x - 6 = -\frac{1}{3}x + 5$

$\frac{9}{3} + \frac{1}{3}x = 11$

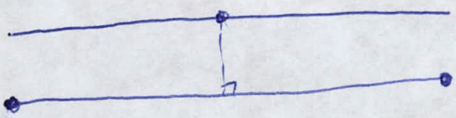
$x = \frac{11 \cdot 3}{10}$ → находим min

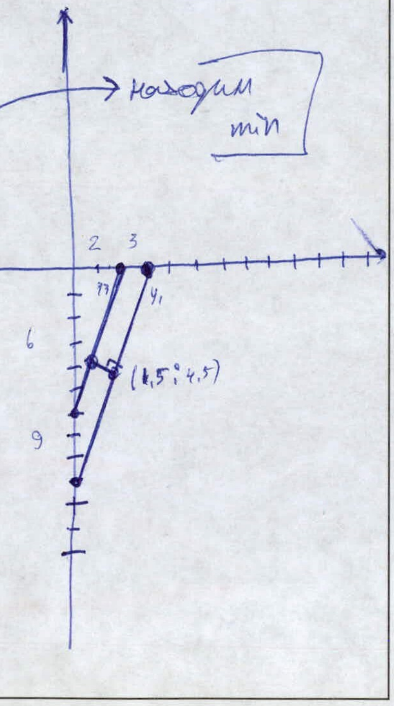
$y_1 = 3x - 9$

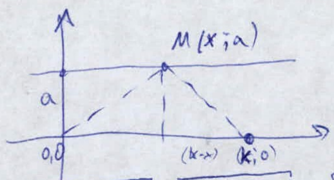
$y_2 = -\frac{1}{3}x + b = -\frac{1}{3}x + 5$

$\frac{9}{2} = -\frac{3}{3 \cdot 2} + b$

$b = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5$







$A = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + (k-x)^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a + x + a + k - x) = const$

$\boxed{k - x = x}$ $\quad x = \frac{k}{2}$