30-45-75-07
(183.1)

Олимпиада ПВГ
2016

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 174

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

**Олимпиада школьников** ~~по математике~~

**по** математике

Дячука Игоря Константиновича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«22» марта 2016 года

Подпись участника

75 (семьдесят пять) Федор

## ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

30-45-75-07 (183.1)

Черновик

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

$\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}$ $\frac{40}{25}$

841 − 755 = 82

$\sin\alpha + \cos\alpha \le$

$1 < \frac{\pi}{3}$

$1 + 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}$ $\frac{40^2}{25^2}$

$\frac{1}{2} < \frac{\pi}{6}$

$\frac{82}{841}$

$\sin\frac{1}{2} < \sin\frac{\pi}{6} < \frac{1}{2}$ 0,5

$\sin 1$ $\frac{11\cdot 69}{25^2}$

$\cos\frac{1}{2}$ $\frac{11}{25}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1

$\left(\frac{755}{841}\right)^2$ $\frac{3}{4}$

$\frac{1}{2} > \frac{\pi}{12}$ $\frac{\pi}{6}$ 1 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{11\cdot 65}{25^2}$

841 − 755 = 82 $\frac{11\cdot 65}{25\cdot 25}$

841 −

$\sin 1 \le$

$\sin\alpha + \cos\alpha \le \sqrt{2}$ 8 $\sqrt{2}$ $\frac{40}{25}$

25 × 25 = 261, 58, 841 $> \frac{\sqrt{3}}{2} > \sin 1$

8

25 × 25 = 261, 58, 841

65 × 11 = 69, 69, 759

65 × 11 = 65, 65, 759

$\frac{759}{25\cdot 25}$

$\sqrt{2}$

$2\cdot 25$

8

25 × 25 = 261, 58, 841

40

$\frac{40\cdot 40}{20}$

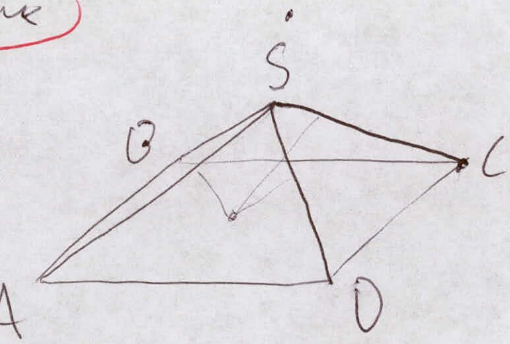
800

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{11\cdot 65}{25^2}$

69 11·65

Черновик

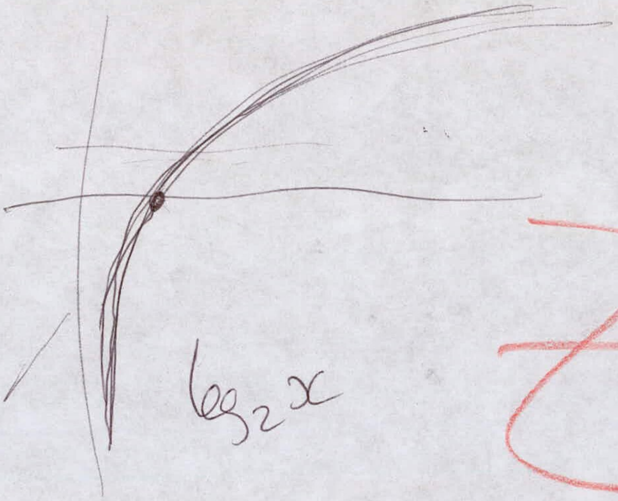
$x > 0.$




$> 1$

$> 0.$

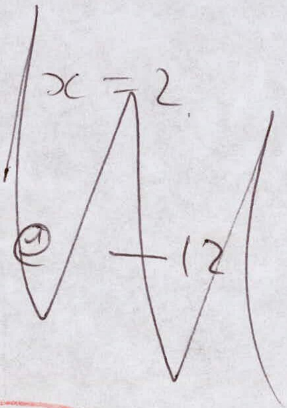
$x > 1.$



$\log_2 x$

$x > 2.$

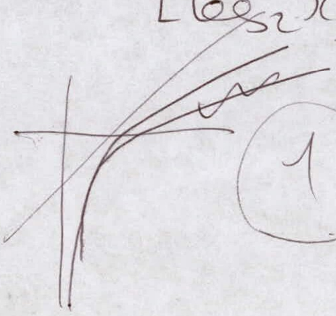
$x = 2.$




$\log_2 x\, \ln 2 = 1.$

$\log_2 x \ln 2.$

$\log_3 \frac{\log_2 [x]}{[\log_2 x]}$ 4 8



1

1

Черновик

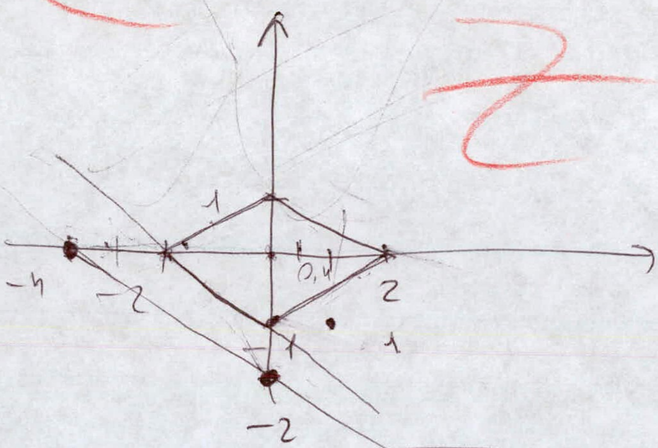
$x + 2y = 2.$

4

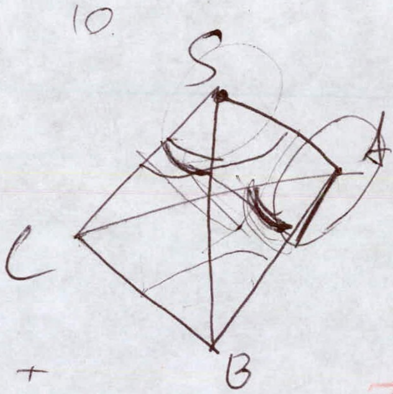
$y = 1 - \frac{x}{2}$

$y = -1 - \frac{x}{2}$

$\frac{SC \cdot SB}{2} \cdot \frac{SA}{3}$




$\frac{4}{10}$




$\sqrt{\left(-1 + \frac{x}{2}\right)^2 + (x+4)^2} +$

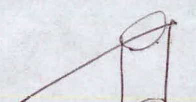
$+ \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2}$

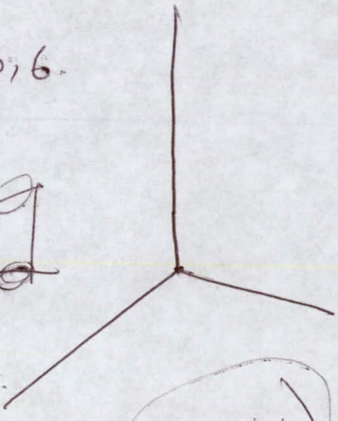
$\frac{x^2}{4} - x + 1.$

$1 + x + \frac{5}{4}x^2 + 8x + 16.$

$-3,6.$

$\sqrt{\frac{(5x^2 + 36x + 68)}{2}} +$





$+ \sqrt{\frac{5x^2 - 4x + 4}{2}}$

$\frac{24^2}{25}$

V.

$[\log_2 x] \ ? \ \log_2 [x]$

$[2; 4)$

$\frac{4}{25}$

$\frac{2}{5}$

$\frac{6 \cdot 4 \cdot 6}{6 \cdot 2}$

**ЛИСТ-ВКЛАДЫШ**

Черновик

$x$ $\qquad x+б$

$\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+2)^2}$

$\frac{1}{x}=3.$ $\qquad \frac{1}{y}>3.$

$|x|+2|y|=2$

$x=\frac{1}{3}$

$x=-\frac{1}{3}.$

б₁

$y<\frac{1}{3}$

$\frac{1}{x+y}=б_2$

$-x+4+x=2.$

$\frac{1}{y}$ - уже

$-x+2(2+\frac{1}{2}x)=2.$

$\frac{1}{\frac{1}{3}+y}>8.$

$\frac{1-\frac{8}{3}+8y}{\frac{1}{3}+y}>0.$

$8y-\frac{5}{3}<0$

$y=-\frac{1}{2}x-2$

$y<\frac{1}{3}.$

$\frac{1}{x}=3$

$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=б_1$

$x<0$, $y<0$

-2, -4, -1, -2, $x$, $y$

$\frac{x}{2}-4$

$\frac{1}{x-y}=б_2+8$ $\qquad \frac{24}{8}=3$ $\qquad \frac{24}{5}$ 4

$\frac{x-y}{xy}=б_1$ $\qquad \frac{3}{y(б_2+8)}=б_1$

$(0;\frac{1}{3})$.

$\frac{5}{24}$ $\qquad \frac{8}{24}$

$\frac{1}{(б_2+8)xy}$

$\frac{5}{24}$ $\qquad \frac{8}{24}.$

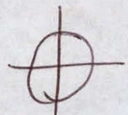
**Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!**

чистовик 1

$\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2} \vee \frac{40}{29}$ не обоснован переход

$\sin^2\frac{1}{2}+\cos^2\frac{1}{2}+2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} \vee \frac{40\cdot 40}{29\cdot 29}$

$\sin 1 \vee \frac{11\cdot 69}{29^2}$



$1<\frac{\pi}{3}$; $\sin 1<\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

сравним

$\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \frac{11\cdot 69}{29^2}$

$\frac{3}{4} \vee \left(\frac{759}{841}\right)^2$

$\frac{759}{841}=1-\frac{82}{841}$; $\frac{82}{841}<\frac{84,1}{841}=\frac{1}{10}$

$1-\frac{82}{841}>0,9$; $\left(\frac{759}{841}\right)^2>0,8>\frac{3}{4}$

$\frac{11\cdot 69}{29^2}>\frac{\sqrt{3}}{2}>\sin 1$ нер-во строго не обосновано

$\sin 1<\frac{11\cdot 69}{29^2}$

$\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}<\frac{40}{29}$

Ответ: $\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}$ меньше. Верно

Чистовик.

при $x=3$ первые 2 слагаемых обнуляются, но третье $>0$, значит, это не подходит.

при $x>3$

$\log_2([x]) > 1$ ; $8\log_3(\log_2([x]))>0$

$\log_3(\log_2[x]) \geq \log_3([\log_2 x])$ (было доказано ранее)

$12\log_3(\log_2[x]) \geq 12\cdot\log_3([\log_2 x])$

$12\log_3(\log_2[x]) - 12\log_3([\log_2 x]) \geq 0$

при $x>3$:

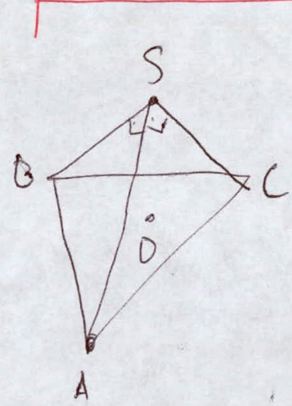
$8\log_3(\log_2([x])) + 12\log_3(\log_2[x]) - 12\log_3([\log_2 x]) > 0$

$[\log_3(\log_2 x)]^2 + 20\log_3(\log_2[x]) - 12\log_3[\log_2 x] > 0$, значит, не может быть равно нулю. при $x>3$

$x \in [2;3)$

Ответ: $x \in [2;3)$ Верно

5




$V = \frac{S_{BSA}\cdot SC}{3} = \frac{SA\cdot SB\cdot SC}{6}$

$-\frac{1}{2}x^{-1}$ Чистовик

и $z^{-1}$

2

Пусть $x$ $\frac{\text{кругов}}{\text{мин}}$ — скорость более быстрого водителя,

$$\frac{1}{x} = 3$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Пусть $y$ $\frac{\text{кр}}{\text{мин}}$ — скорость более медленного водителя.

$x \neq y$

Тогда $\frac{1}{x-y} > 8$, ~~значит~~.

$$\frac{1}{\frac{1}{3} - y} > 8; \quad \frac{1 - \frac{8}{3} + 8y}{\frac{1}{3} - y} > 0$$

$$\frac{8\left(y - \frac{5}{24}\right)}{y - \frac{1}{3}} < 0 \qquad + \quad \frac{5}{24} \quad - \quad \frac{1}{3} \quad +$$

$$y \in \left(\frac{5}{24}; \frac{1}{3}\right)$$

$\{ f(x) = \frac{1}{x}$ мон. уб. при $x > 0 \}$

$$\frac{1}{y} \in (3; 4{,}8)$$

$4{,}8 = \frac{24}{5}$

$\frac{1}{y}$ — целое, значит, $\frac{1}{y} = 4$.

4 — единственное ~~подходящее~~ не отброшенное целое $\frac{1}{y}$, но учитывая, что требуемое $\frac{1}{y}$ существует, значит, $\frac{1}{y} = 4$. 4 минуты

Ответ: 4 минуты. Верно

30-45-75-07
(183.1)

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

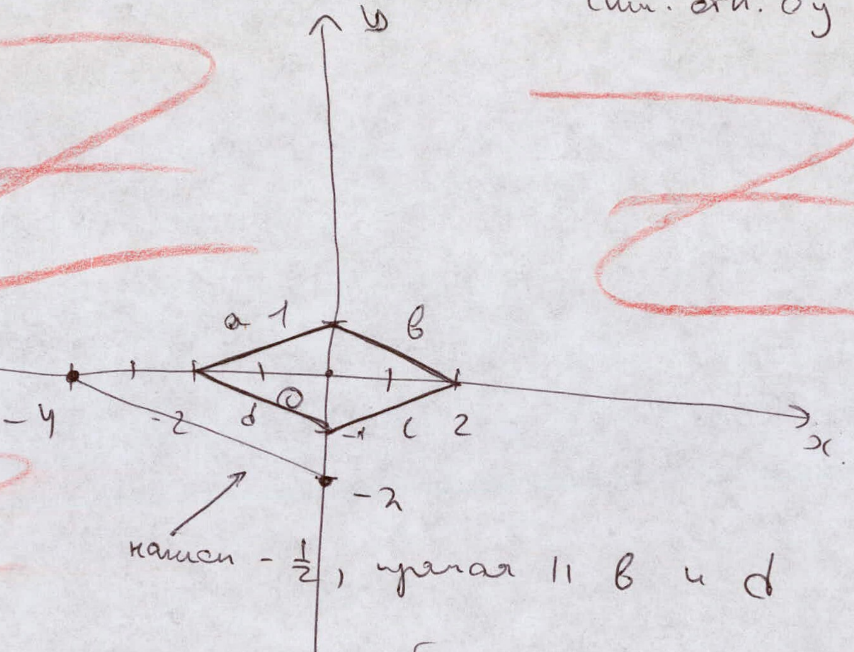
чистовик

3

$f(x,y)=\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+2)^2}$ — сумма расстояний от точки $(x;y)$ до точек $(-4;0)$ и $(0;-2)$

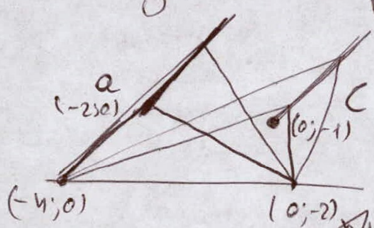
$|x|+2|y|=2$ ← при $x\geq0$ и $y\geq0$ $y=1-\frac{x}{2}$

(сим. отн. $Oy$ и $Ox$



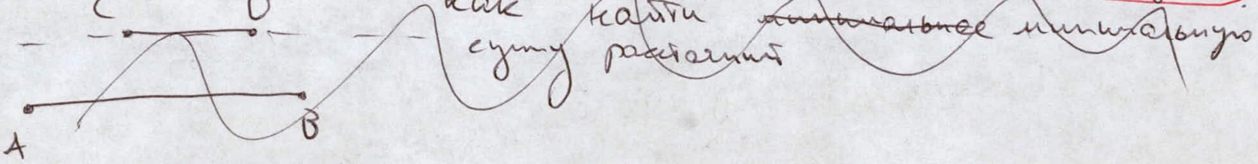

наклон $-\frac{1}{2}$, прямая ∥ b и d

Поделим фигуру-ромб на 4 части: a, b, c, d.




Для любой из точек на a или c при ~~спуске~~ сдвиге этих точек по направлению к точке $(-2;0)$ для ~~краю~~ отрезка a и к точке $(0;-1)$ для отрезка c расстояние от этой точки до каждой из точек $(-4;0)$ и $(0;-2)$ уменьшается, следовательно, уменьшается сумма этих расстояний. Значит, если точка, при которой достигается минимум $f(x,y)$ лежит на отрезках a или c, она лежит в точках $(-4;0)$ $\notin a$ или $(0;-2)$ $\notin c$, значит, эти отрезки можно не рассматривать, т. к. точки $(-4;0)$ и $(0;-2)$ лежат на отрезке неверно

Как найти ~~минимальное~~ минимальную сумму расстояний



чистовик.

~~$\log_2$~~ Сравним при $x \geq 2$

$[\log_2 x]$ и $\log_2 [x]$.

При $x$ – степенях двойки их значения равны

~~при~~ Если двигаться от $x = 2^n$ до $x = 2^{n+1}$, то значение $[\log_2 x]$ не меняется, пока мы не дойдём до $2^{n+1}$.

Значение $\log_2 [x]$ растёт с каждым прохождением ~~$[x]$~~ $x$ целого числа.

Следовательно, $\log_2 [x] \geq [\log_2 x]$ при $x \geq 2$;

$y = \log_3 x$ возрастает, значит, при $x \geq 2$

$\log_3(\log_2([x])) \geq \log_3([\log_2 x])$.

при $x = 2$ равенство ~~утв~~ выполняется, $0 = 0$

При $x \in [2; 3)$

$\log_3(\log_2([x])) = 0$

$\log_2 x$ $< 2$, но $\geq 1$

$\log_3([\log_2 x]) = 0$.

$\log_3(\log_2(x)) < 1$ (т.к. $\log_2(x) < 3$), но $\geq 0$

$[\log_3(\log_2(x))]^2 = 0$. Значит, при $x \in [2; 3)$ ~~выражение~~ равенство выполняется.

чистовик

Н - середина $B_1B_2$

$B_1$: $y = -2 + 2\left(\frac{2-\frac{6}{5}}{2}\right) = -2 + \frac{8}{5} = -\frac{2}{5}$

$x = 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$;

$f_{min} = \sqrt{\left(-4 - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(0 - \left(-\frac{2}{5}\right)\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{24^2}{25}} = \frac{2\sqrt{6 \cdot 24 \cdot 4 \cdot 6}}{5} =$

Арифметическая ошибка. Правильно: $2\sqrt{\frac{29}{5}}$

$= \frac{2 \cdot 6 \cdot 2}{5} = \frac{24}{5}$

Ответ: $\frac{24}{5}$

Неверно

4) $[\log_3(\log_2 x)]^2 - 12\log_3([\log_2 x]) +$
$+ 20\log_3(\log_2([x])) = 0$

$x > 0$.

~~$\log_3 \log_2[x]$~~

$[\log_2 x] > 0$ $\quad \log_2 x \geq 1$ $\quad x \geq 2$

~~При $x = 4$:~~
~~$20\log_3 2 - 12\log_3 2 + (\log_3 2)^2 = 0$~~
~~не выполняется.~~
~~при $x \in [2, 4)$:~~
~~$\log_2[x]$~~
~~при $x = 2$: $0 = 0$, выполняется~~

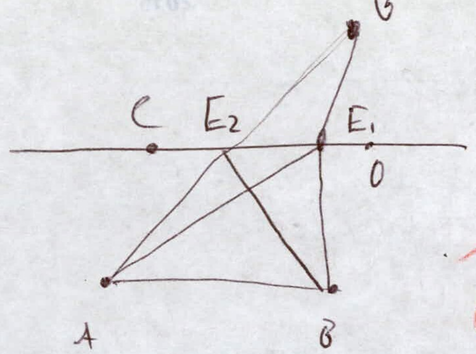
при $x \geq 2$: $[\log_3(\log_2 x)]^2 \geq 0$

$\log_3(\log_2([x])) \geq 0$.

$\log_3([\log_2 x]) \geq 0$.

Черновик

~~ВС~~




Допустим, у нас есть две точки A B и ~~прямая || AB~~ отрезок CO на прямой || AB.

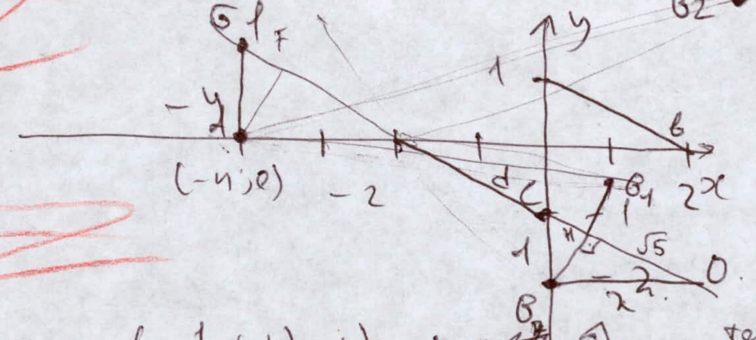
чтобы узнать наим. сумму расстояний ~~от~~ от точки на CO до точек A и B, отразим точку B относительно CO ~~в~~ в точку $B_1$,

Сумма расст. от люб. точки E на CO до A и B = этой сумме от точки E до A и $B_1$

А эта сумма наименьшая, когда $A$, E и $B_1$ лежат на одной прямой (из нер-ва △)

(это наименьшее значение достижимо, если E будет лежать на CO)

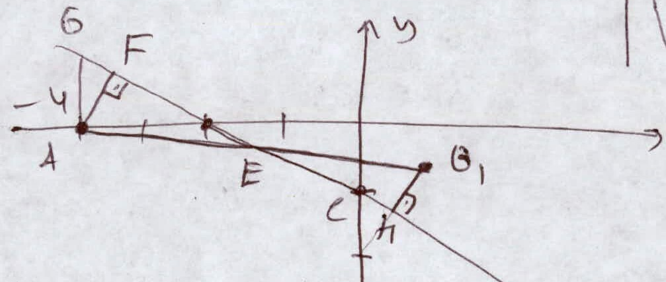
применим это в нашем случае:




точка B(0;-2) отражается в $B_1$ относительно d и в $B_2$ относительно b. $B_1$ ниже и левее $B_2$, значит, расст от точки A(-4;0) до $B_1$ меньше, чем до $B_2$ и $B_2$ можно не рассматривать, ~~если $B_1$ достижима~~ если случай с $B_1$ достижим. Т.к. $B_1$ выше −1, он достижим.

$AG = \left(-\frac{1}{2}\cdot(-4)-1\right) = 1$;

$AF = \frac{2}{\sqrt5}$




В △BCO BO=2; CO=$\sqrt5$;

$BH = \frac{2}{\sqrt5} = HB_1$

$CH = \frac{1}{\sqrt5}$

$y = -\frac{1}{2}x - 1$

△AFE = △$EB_1H$ ~~т.к. они ...~~ (по катету и остр. углу).

$E_x$ ~~...~~ $= \frac{A_x + B_x}{2}$

прямая $B_1B$: $y = 2x - 2$

ее точка H: $-\frac{1}{2}x - 1 = 2x - 2$

$\frac{5}{2}x = 1$; $x = \frac{2}{5}$; $y = -\frac{6}{5}$