09-07-52-22
(116.1)

Олимпиада ПВГ
2016

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

г. Уфа

Вариант 9 класс

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

**Олимпиада школьников** Покори Воробьевы горы

**по** математике

Алкина Эмиля Венеровича

фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата

«13» марта 2016 года

Подпись участника

09-07-52-22
(116.1)

Чистовик

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| + | + | + | + | + | + | + |
| 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| + | + | + | + | + | + | + |
| 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 |

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

100/105

Шатина 105

Столяр

1. Да, например:

$$(-1-2+(3+4)\times 5)\times(6-7+8)\times 9 = (35-3)\times 7\times 9 =$$
$$=32\times 7\times 9 = 2^5\times 7\times 3^2 = 2016$$ +

Ответ: да

105/105

2. Заметим, что если бы ей было 14, то в копилке у нее было бы: $1+2+3+\ldots+14 = (14+1)\cdot 7 = 15\cdot 7 = 105$ монет, но такого не могло быть по условию. Если бы ей исполнилось 16 лет, то у нее было бы: $1+2+\ldots+16 = 17\cdot 8 = 136$ монет, чего тоже не могло быть, значит ей не больше и не меньше 15, но если ей 15, то в копилке будет: $1+2+3+\ldots+15 = 16\cdot 7{,}5 = 120$ монет, что не противоречит условию. +

Ответ: 15 лет.

4. Обозначим второй катет за $a$, а гипотенузу за $b$, причем $a, b \in \mathbb{N}$ и $b > a$. Тогда, по теореме Пифагора: $(\sqrt{2016})^2 + a^2 = b^2$; $2016 + a^2 = b^2$, $b^2 - a^2 = 2016 \Rightarrow (b-a)(b+a) = 2016$. Отсюда заметим, что $(b-a)+(b+a) = 2b$, т.е. четное число и $(b-a) < (b+a)$, т.к. $a \in \mathbb{N}$. Будем искать пары нат. чисел, которые в произведении дают 2016 и их сумма четная. Каждая такая пара соответствует ровно одному треугольнику, т.к. все вышестоящие



Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

$S_{\Delta B_1AC_1} = AB_1 \cdot AC_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\angle A = \frac{39}{2} \cdot \sin\angle A = \frac{39}{2} \cdot \frac{BC}{BA} =$

$= \frac{39 \cdot 30}{2 \cdot 50} = \frac{39 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{117}{10} = 11{,}7$

$S_{\Delta A_1BC_1} = A_1B \cdot BC_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\angle B = \frac{49}{2} \cdot \sin\angle B = \frac{49}{2} \cdot \frac{AC}{BA} =$

$= \frac{49}{2} \cdot \frac{40}{50} = \frac{49 \cdot 4}{2 \cdot 5} = \frac{196}{10} = 19{,}6$

$S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta A_1BC_1} - S_{\Delta A_1CB_1} - S_{\Delta B_1AC_1} =$

$= \frac{30 \cdot 40}{2} - 14{,}5 - 11{,}7 - 19{,}6 = 30 \cdot 20 - 15 - 11{,}7 - 19{,}6 = 600 - 45{,}8 =$

$= 554{,}2$

Ответ: $S_{\Delta A_1B_1C_1} = 554{,}2$

7. Т.к. $n \in N$, то $n+2015$ и $n+2016$ тоже натуральные. Тогда мы можем сказать, что $n+2015 = 2016a$ и $n+2016 = 2015b$, где $a, b \in N$. Вычтем из 2ого равенства первое:

$$\begin{aligned} 2015b &= n+2016 \\ -\ 2016a &= n+2015 \end{aligned} \Rightarrow 2015b - 2016a = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2015(b-a) - a = 1$, т.к. $a \in N$, то

$2015(b-a) > 0$, т.е. $b - a > 0$, $b > a$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow b - a \geq 1 \Rightarrow 2015(b-a) \geq 2015 \Rightarrow a \geq 2014$.

Пусть $a = 2014$, тогда $b \geq a+1 \geq 2015$.

Пусть $b = 2015$ ~~и $n = 2015^2 - 2016$~~. Отсюда получим, что $n = 2015b - 2016 = 2015^2 - 2016$.

Заметим, что $n + 2016 = 2015^2 \,\vdots\, 2015$ и

$n + 2015 = 2015^2 - 1 = (2015-1)(2015+1) = 2014 \cdot 2016 \,\vdots\, 2016$.

Т.е. $n \geq 2015^2 - 2016$, но $n = 2015^2 - 2016$ подходит.

Ответ: $n = 2015^2 - 2016$.

Чистовик

3. Функция $f(x)$ имеет значение на $[-3;9]$, а $g(x)$ имеет значения на $[-1;6]$. Заметим, что наибольшее по модулю значение $f(x)\times g(x)$ равно произведению наибольших по модулю значений $f(x)$ и $g(x)$, т.е. оно равно $9\cdot 6=54$, т.е. наибольшее значение $f(x)\times g(x)$ не больше 54. Покажем теперь, что наименьшее значение $f(x)\times g(x)$ не меньше $-18$. Пусть такое существует, тогда оно отрицательное. Значит, одно из значений $f(x)$ и $g(x)$ положительное, а другое отрицательное. Пусть $f(x)$ - отриц. ~~тогда~~, а $g(x)$ - положит, тогда наибольшее по модулю значение $f(x)\times g(x)$ равно $-18=-3\cdot 6$, если же $f(x)$ - положит., а $g(x)$ - отриц., то наибольшее по модулю значение $f(x)\times g(x)$ равно $-9$. Приведем пример таких $f(x)$ и $g(x)$. Пусть $f(x)=2x+3$, если $x\in[-3;3]$
$g(x)=\frac{7}{9}x^2-1$, если $x\in[-3;3]$

Очевидно, они удовлетворяют условию задачи, а при $x=3$ $f(x)\times g(x)=6\times(-3)=-18$, а при $x=+3$ $f(x)\times g(x)=9\times 6=54$.

Т.к. такие функции существуют, значит наибольшая разница между наибольшим и наименьшим значением $f(x)\times g(x)$ равна $54-(-18)=54+18=72$.

Ответ: 72.

09-07-52-22 (116.1)

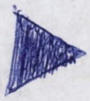
Черновик

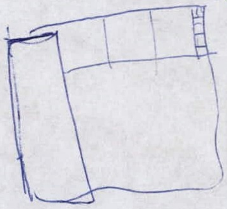
$(-1-2+(3+4)\times 5)\times(6-7+8)\times 9$

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

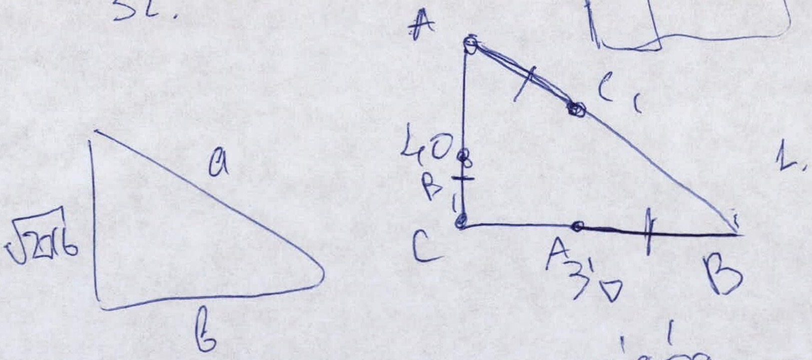
2016 | 2
1008 | 2
504 | 2
252 | 2
126 | 2
63 | 3
21 | 3
7 | 7
1

$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7.$





32.



$2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$

2, 4

$b^2+2016=a^2$

$a>b.$

$1909 + 7182 = 9091$

$a^2-b^2=2016$

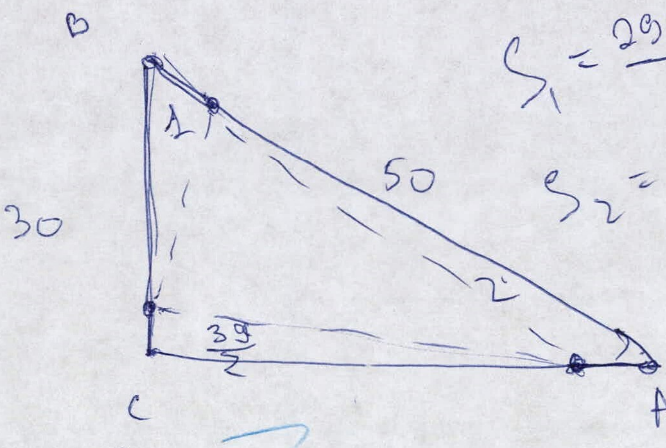
$(a-b)(a+b)=2016.$

$1+\dots+$

$70+35$

$\overline{abcd} + 7182 = \overline{dcba}$

$d+2=a.$



$S_1=\frac{29\cdot 1\cdot \sin\beta}{2}$

$S_2=\frac{49\cdot 1\cdot \sin\alpha}{2}.$

$\sin\alpha=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$

$\sin\beta=\frac{4}{5}$

$80+56=$

$=136$

40

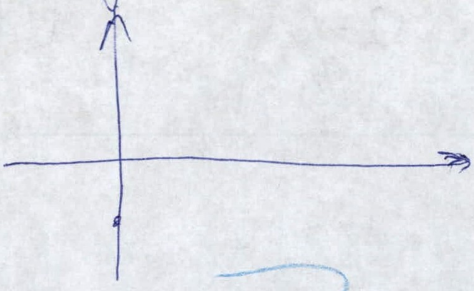
$S_1+S_2=\frac{49\sin\alpha+29\sin\beta}{2}$

# ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$[-3;9]$ $f(x)$ $\max(\max(f(x) \times g(x))) = 9 \cdot 6 = 54$

$[-1;6]$ $g(x)$ $\min(\min(f(x) \times g(x))) = 9 \cdot -3 = -27$

$g(x)$

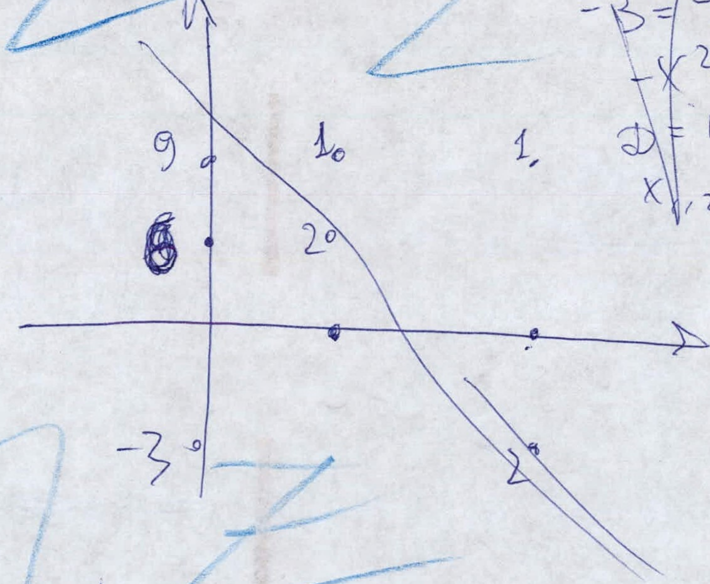


$kx^2 + ax - 3$

$k \cdot 9 + a \cdot 3 - 3 = 9$

$k \cdot 9 + a \cdot (-3) - 3 = 9$

$k = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$



$-3 = -x^2 + 4x + 6$

$-x^2 + 4 + 9 = 0$

$D = 16 + 36 = 52$

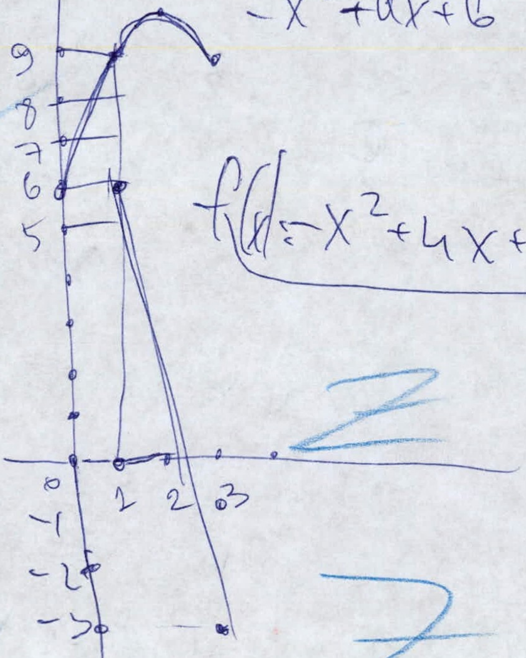
$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{-2} = 1$

$\frac{-4 \pm \sqrt{52}}{-2} = 2 + \frac{\sqrt{52}}{2}$

$+15 + 11,7 + 19,6$

$30 + 15 + 1,3$

$46,3$



$-x^2 + ax + b$

$-\frac{b}{2a} = \frac{a}{-2} = \frac{a}{2}$

$f\left(\frac{a}{2}\right)$

$f(x) = -x^2 + 4x + 6$

$y = -4,5x + 10,5$

$y =$

$6 = k \cdot 1 + b$

$6 = k + b$

$-3 = 3k + b$

$2k = -9$

$k = -4,5$

14,5

11,7

19,6

45,8

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!