

94-79-32-53  
(185.2)



Олимпиада ПБГ  
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7-8

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы»

по математике

Астаховой Софии Александровны

фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата

«22» марта 2016 года

Подпись участника

Астахов



100 (сто) зн

94-79-32-53  
(185.2)

Ташаева

Чистовик.  
Задача 6.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Если  $a$  и  $c$  - натуральные числа,  $b = \sqrt{1001}$ , то

$$a^2 + 1001 = c^2$$

$$c^2 - a^2 = 1001$$

$$(c-a)(c+a) = 1001$$

$$1001 = 1 \cdot 1001 = 7 \cdot 143 = 11 \cdot 91 = 13 \cdot 77$$

Значит таких прямоугольных треугольников существует 4:

$$\begin{cases} c-a=1 \\ c+a=1001 \end{cases}$$

$$2c = 1002$$

$$\begin{cases} c = 501 \\ a = 500 \end{cases}$$

Ответ:  $c=501$   
 $a=500$

$$\begin{cases} c-a=7 \\ c+a=143 \end{cases}$$

$$2c = 150$$

$$\begin{cases} c = 75 \\ a = 68 \end{cases}$$

Ответ:  $c=75$   
 $a=68$

$$\begin{cases} c-a=11 \\ c+a=91 \end{cases}$$

$$2c = 102$$

$$\begin{cases} c = 51 \\ a = 40 \end{cases}$$

Ответ:  $c=51$   
 $a=40$

$$\begin{cases} c-a=13 \\ c+a=77 \end{cases}$$

$$2c = 90$$

$$\begin{cases} c = 45 \\ a = 32 \end{cases}$$

Ответ:  $c=45$   
 $a=32$

1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | +  
+ | + | + | + | + | + | +  
+ | + | + | + | + | + | +  
+ | + | + | + | + | + | +

Ответ: существует 4 различных прямоугольных треугольника, у которых один катет равен  $\sqrt{1001}$ , а другой катет и гипотенуза ~~натурально~~ выражаются натуральными числами.

Задача 3.

Пусть  $x$  - число вопросов в одном разделе,  $y$  - общее число вопросов.  
 $5x = y \Rightarrow y$  кратно 5.

$$y - 100\%$$

$$32 - 77\%$$

$$y = \frac{32 \cdot 100}{100 - 77}$$

$$y = 41 \frac{43}{77}$$

$$y - 100\%$$

$$32 - 70\%$$

$$y = \frac{32 \cdot 100}{100 - 70}$$

$$y = 45 \frac{5}{7}$$



Задача 2.

$$\frac{1}{8} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{28} = \frac{1}{72} \times \frac{1}{28} = \frac{1}{2016}.$$

Ответ:  $\frac{1}{8} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{28}$

⊕

Задача 4

$$\overline{abcd} + 8802 = \overline{dcba}$$

$$\begin{array}{r} a1 \quad b \quad c \quad d \quad 0 \\ + \quad 8 \quad 8 \quad 0 \quad 2 \\ \hline d9 \quad c \quad b \quad a \quad 1 \end{array}$$

Если  $d < 8$ , то  $c = b$  и  $b + 8$  оканчивается на  $e$ , что невозможно.

$d \neq 8$ , т.к.  $a \neq 0$

Значит  $d > 8$ . Этому неравенству удовлетворяет только 9. Посмотрим на разряд тысяч.  $1 + 8 = 9$  — верно. Значит  $b + 8 < 10$  и  $b < 2$ . Этому неравенству удовлетворяют 1 и 0. Действительно:

$$\begin{array}{r} 1099 \\ + 8802 \\ \hline 9901 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1109 \\ + 8802 \\ \hline 9911 \end{array}$$

Число, которое является обратной записью цифр первого получилось в первом случае. Значит такое число только одно — 1099.

Ответ: одно число.

⊕



94-79-32-53  
(185.2)

$$\begin{array}{r} 1001 \overline{) 119} \\ 95 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1001 \overline{) 121} \\ 84 \\ \hline 161 \\ 127 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1001 \overline{) 113} \\ 91 \\ \hline 22 \\ 1001 \overline{) 17} \\ 7 \\ \hline 10 \\ 28 \\ \hline 21 \end{array}$$

ОЛИМПИАДА - ПБУ

20, a, b, c, d, e, f, 16.

$a + b = 80$

~~$a + b = 80$~~   $b + d = 80 \sqrt{= 6}$

$a^2 + b^2 = c^2$       $a + b + c = 100$

$\Rightarrow a = d$       $c = 20$

Если  $b = \sqrt{1001}$ , то  $a + e = 80$

$a^2 + 1001 = c^2$

$c^2 - a^2 = 1001$

$(c - a)(c + a) = 1001$

$$\begin{cases} c - a = 1 \\ c + a = 1001 \end{cases}$$

$2c = 1002$

$c = 501$   
 $a = 500$

$$\begin{cases} c - a = 7 \\ c + a = 143 \end{cases}$$

$2c = 150$

$c = 75$   
 $a = 68$

$$\begin{cases} c - a = 11 \\ c + a = 91 \end{cases}$$

$2c = 102$

$c = 51$   
 $a = 40$

$$\begin{cases} c - a = 13 \\ c + a = 77 \end{cases}$$

$2c = 90$

$c = 45$   
 $a = 32$

Пусть  $a - d = x$   
 $b - c = y$

$111a - 111d + 10b - 10c = 978$

$111(a - d) + 10(b - c) = 978$

$111x + 10y = 978$

$x + y = 9$

$999a + 90b + 10a + d = 999d + 100c + 10b + a + 8802$

$999a + 90b = 999d + 90c + 8802$

$111a + 10b = 111d + 10c + 978$



$$8 \cdot 9 = 72$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 72 \\ \hline 100 \\ 196 \\ \hline 2016 \end{array}$$

1000 ← самое м.

9999 ← самое б.

$9802 > X$  — это больше

$$\begin{array}{r} 9999 \\ - 8802 \\ \hline \end{array}$$

$1197$  — это наибольшее из меньших.

$$1197 > X$$

$$X + 8802 \rightarrow 9802$$

$$X \rightarrow 1000$$

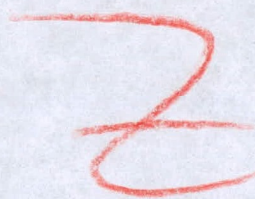
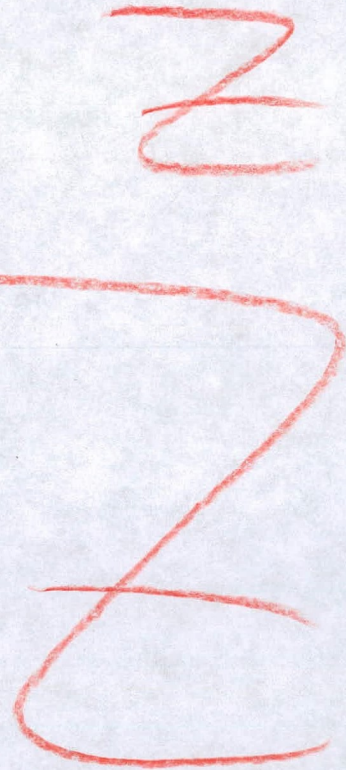
$$1000 < \overline{abcd} < 1197$$

$$\overline{abcd} + 8802 = \overline{dcba}$$

$$\begin{array}{r} 1bc9 \\ + 8802 \\ \hline 9901 \end{array}$$

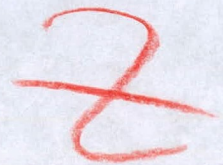
$$\begin{array}{r} 1099 \\ + 8802 \\ \hline 9901 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1099 \\ + 8802 \\ \hline 9901 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 1199 \\ + 8802 \\ \hline 10001 \\ 10001 \\ + 1199 \\ + 8802 \\ \hline 9911 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} abc d 8 \\ + 8802 \\ \hline d c b a 3 \end{array}$$



$$c = b$$

$$c + 1 = b$$

$$d = 8$$

$$d = 8$$

$$a = 1$$

$$b < 2$$

$$b = 1$$

$$c = 9$$