88-05-08-77
(185.2)

Олимпиада ЦВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7-8

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробёвы горы"

по математике

Лагутиной Екатерины Алексеевны

фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата

«22» марта 2016 года

Подпись участника

100 (сто) Ви
Толмачёва

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

1	2	3	4	5	6
+	+	+	+	+	+

88-05-08-77
(185.2)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

Чистовик

1

$20, x, y, z, \ldots$

$$\left.\begin{aligned} 20+x+y&=100 \\ x+y+z&=100 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z=20$$

$20, x, y, 20, a, \ldots$

$$\left.\begin{aligned} x+y+20&=100 \\ y+20+a&=100 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a=x$$

$20, x, y, 20, x, b, \ldots$

$$\left.\begin{aligned} 20+x+y&=100 \\ 20+x+b&=100 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=b$$

$20, x, y, 20, x, y, c, 16$

$$\left.\begin{aligned} x+y+20&=100 \\ x+y+c&=100 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c=20$$

$20, x, y, 20, x, y, 20, 16$

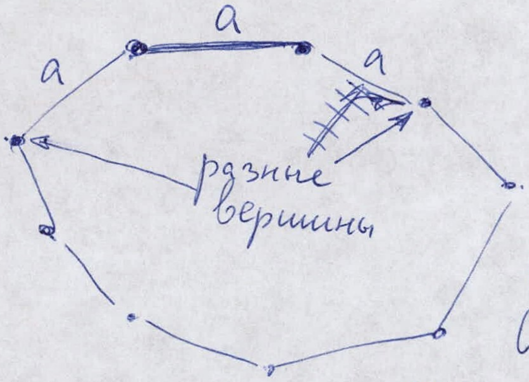
$$20+x+y=20+16+y=100$$

$$\Downarrow$$

$$x=16,\ y=64$$

Ответ: 20, 16, 64, 20, 16, 64, 20, 16.

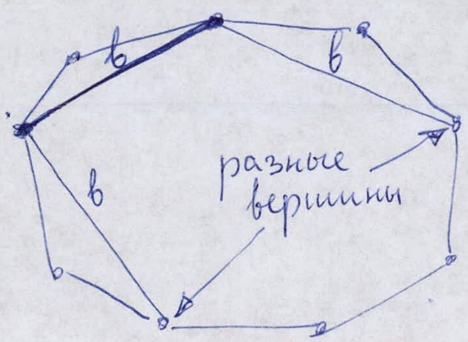
1) Прав. Δ со сторонами а.



Возьмём одну сторону а. Из двух вершин на её концах должны выходить по отрезку длины а и приходить в одну вершину. Однако, в одной вершине они сойтись никак не могут.

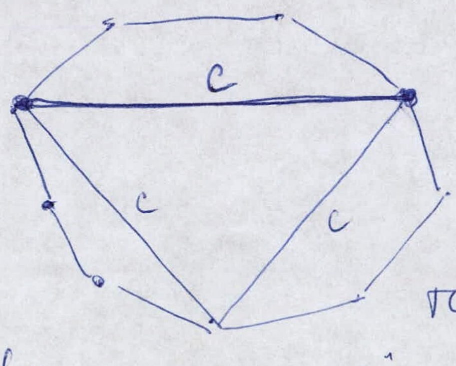
Такого Δ не может быть.

2) Δ со сторонами в.



Аналогично возьмём сторону длины в. Вершины тоже разные, Δ тоже не может быть.

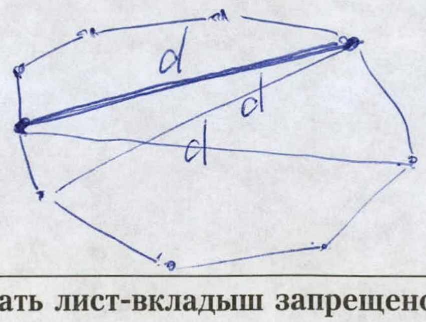
3) Δ со сторонами с.



Аналогично возьмём отрезок длины с. Из вершин на его концах проводим отрезки длиной с, они сходятся в одной точке => Δ существует.

Начиная с трёх различных вершин, получим 3 разных Δ в 9угольнике.

4)



Для отрезков длины d Δ тоже не получается.

шифр

② $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$

$$\frac{1}{8} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{28} = \frac{1}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 7} = \frac{1}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 7} = \frac{1}{2016}$$

Ответ: $\frac{1}{8} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{28}$

③ Пусть в разделе x вопросов ($x \in N$)
Всего в тесте $5x$ вопросов.

$$0{,}7 < \frac{32}{5x} < 0{,}77$$

1) $\frac{32}{5x} > 0{,}7$

$32 > 3{,}5x$

$\frac{32}{3{,}5} > x$

$x < 9\frac{1}{7}$

2) $\frac{32}{5x} < 0{,}77$

$32 < 3{,}85x$

$\frac{32}{3{,}85} < x$

$x > 8\frac{120}{385}$

$\Downarrow$

$x = 9$

$5x = 45$ вопросов

$\frac{32}{45} = 0{,}7(1)$ – подходит.

Ответ: 45 вопросов.

④ Числа $\overline{abcd}$ и $\overline{dcba}$. $(a \neq 0,\ d \neq 0)$

$$\begin{array}{r} -\ dcba \\ 8802 \\ \hline abcd \end{array}$$

$\Downarrow$

$d \geq 8$

$\boxed{d = 9}$

1) $$\begin{array}{r} -\ 9cba \\ 8802 \\ \hline abc9 \end{array}$$

$\boxed{a = 1}$

2) $$\begin{array}{r} -\ 9cba \\ 8802 \\ \hline abc9 \end{array}$$

$\boxed{a = 1}$

1) $\begin{array}{r} -\,9c\dot{b}1 \\ 8802 \\ \hline 1bc9 \end{array}$

из этого разряда точно ничего не занимают

$\begin{cases} b-1-0=c \\ c-8=b \end{cases}$

$\Downarrow$

$c-9=c$

$\Downarrow$

не может быть

$\begin{array}{r} \overset{1}{1}\overset{1}{0}99 \\ +\,8802 \\ \hline 9901 \end{array}$ — верно

Ответ: 1099.

2) $\begin{array}{r} -\,9\dot{c}\dot{b}1 \\ 8802 \\ \hline 1bc9 \end{array}$

$\begin{cases} 10+b-1-0=c \\ c-1-8=b \end{cases}$

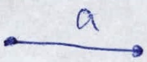
$\Downarrow$

$\begin{cases} b+9=c \\ c-9=b \end{cases}$

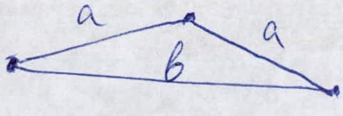
$\Downarrow$

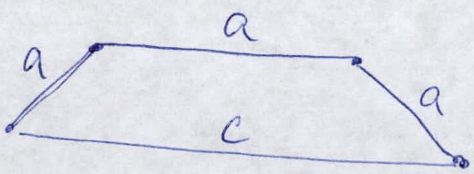
$\boxed{b=0,\ c=9}$

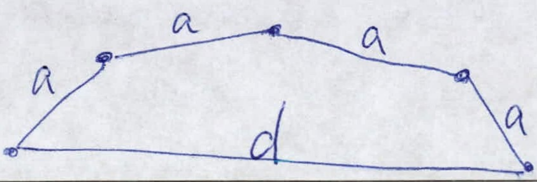
(5) В правильном 9-угольнике мы можем получить несколько отрезков различных длин, соединяющих вершины. Обозначим их как a, b, c, d.



(две соседние вершины)

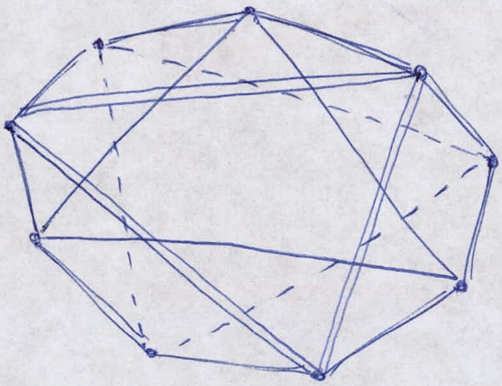






⑤ (продолж.) Чистовик

Тогда есть только 3 правильных Δ.



Каждая вершина входит только в один Δ, поэтому достаточно составить 3 комплекта чисел:

2016
2017
2018

$$\downarrow$$

$$\frac{2016+2018}{2} = 2017$$

2019
2020
2021

$$\downarrow$$

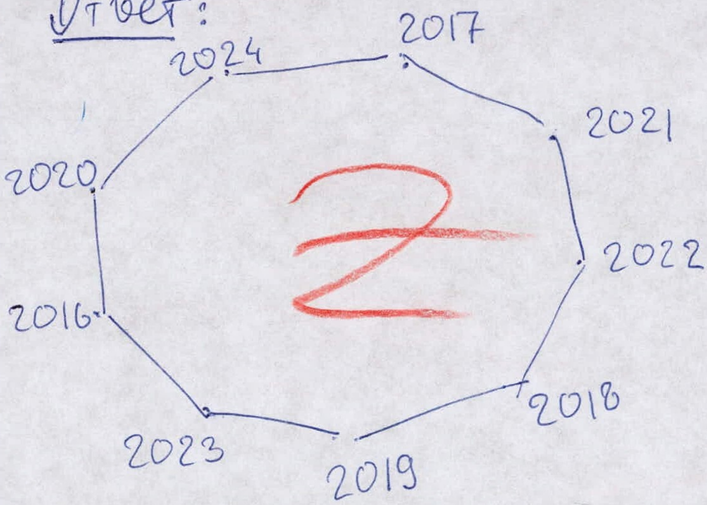
$$\frac{2019+2021}{2} = 2020$$

2022
2023
2024

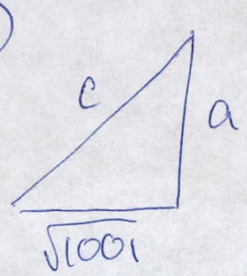
$$\downarrow$$

$$\frac{2022+2024}{2} = 2023$$

Ответ:



⑥



$$c^2 = a^2 + 1001$$

$$c^2 - a^2 = 1001$$

$$(c-a)(c+a) = 1001$$

$c \in N$, $a \in N$ $\Rightarrow$ $(c-a) \in N$, $(c+a) \in N$ $\Rightarrow$ это делители числа 1001

Шифр

$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$

$1001 = 1001 \cdot 1 = 7 \cdot 143 = 11 \cdot 91 = 13 \cdot 77$

1) $\begin{cases} c+a = 1001 \\ c-a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 500 \\ c = 501 \end{cases}$

2) $\begin{cases} c+a = 77 \\ c-a = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 32 \\ c = 45 \end{cases}$

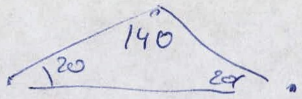
3) $\begin{cases} c+a = 143 \\ c-a = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 68 \\ c = 75 \end{cases}$

4) $\begin{cases} c+a = 91 \\ c-a = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 40 \\ c = 51 \end{cases}$

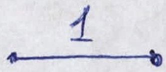
Все 4 варианта различны и удовлетворяют условию.

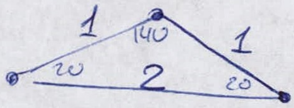
Ответ: 4 треугольника.

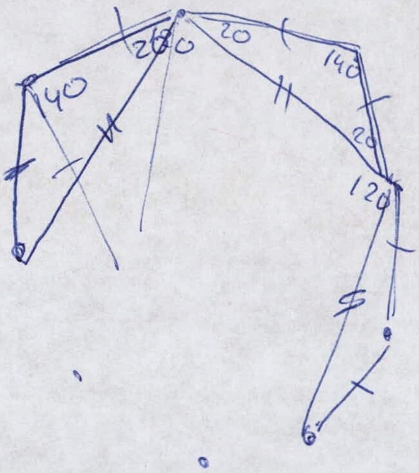
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

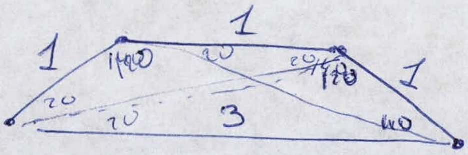


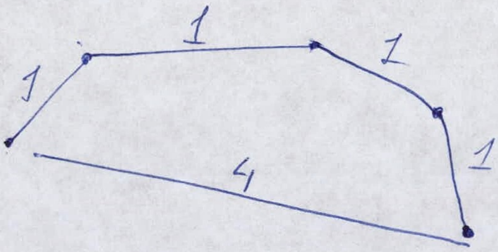
— не мб

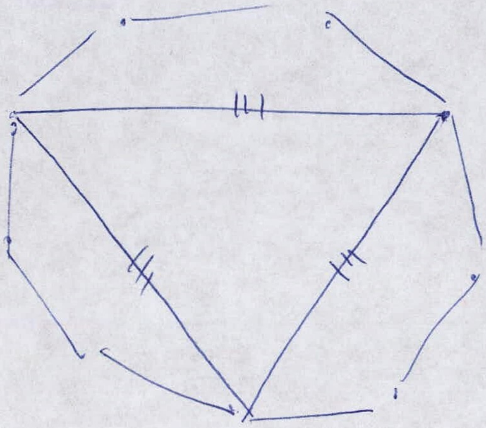


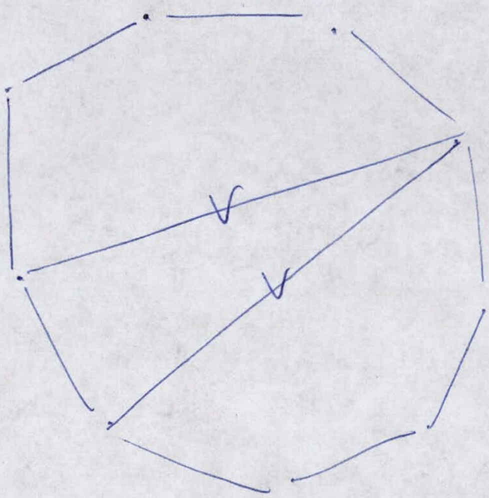


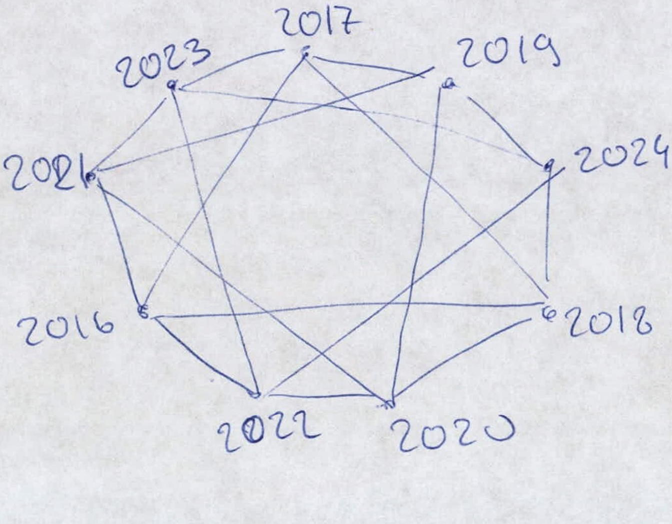












88-05-08-77
(185.2)

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

Черновик

①

100 100 100 100

$20 \cdot 16 \times 20 \cdot 16 \times 20 \cdot 16$

100 100 100 100

$x = 100 - 20 - 16 = 64$

②

2016	$2 \cdot 2$
504	$2 \cdot 2$
126	2
63	7
	$3 \cdot 3$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 63 \\ \hline 96 \\ 192\ \ \\ \hline 2016 \end{array}$$

$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$

$$\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} \times \frac{1}{3 \cdot 3} \times \frac{1}{4 \cdot 7} = \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 28} = \frac{1}{72 \cdot 28} = \frac{1}{2016}$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ \times\ 28 \\ \hline 576 \\ 144\ \ \\ \hline 2016 \end{array}$$

③ x – в одном разделе

5x – всего $x \in N$

$0{,}7 < \frac{32}{5x} < 0{,}77$

$\frac{32}{5x} > 0{,}7$

$\cancel{\frac{32}{5x}}$

$32 > 3{,}5x$

$\frac{32}{3{,}5} > x$

$\boxed{x < 9\frac{1}{7}}$

$\frac{32}{5x} < 0{,}77$

$32 < 3{,}85x$

$\frac{32}{3{,}85} < x$

$\boxed{x > 8\frac{120}{385}}$

$\Rightarrow \boxed{x = 9}$

$$\begin{array}{r|l} 320 & 35 \\ 315 & 9 \\ \hline 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}77 \\ \times\ 5 \\ \hline 3{,}85 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3200 & 385 \\ 3080 & 8 \\ \hline 120 & \end{array}$$

$5x = 45$ вопр.

$\frac{32}{45} = $ 320 | 45; 315; 50 | 0,7(1)

④ $\overline{abcd} \to \overline{dcba}$

$1000a + 100b + 10c + d + 8802 = 1000d + 100c + 10b + a$

$999d + 90c - 90b - 999a = 8802$

$111d + 10c - 10b - 111a = 978$

8802 | 9; 81; 70; 63; 72; 72; 0 | 978

$\overline{dcba} - 8802$

$\boxed{d \geq 8}$

$d = 8$ → $\overline{8cba} - 8802$ → $\boxed{c \geq 8}$

$c = 8$: $\overline{88ba} - 8802 = \overline{ab88}$ → не мб

$c = 9$: $\overline{89ba} - 8802 = \overline{ab98}$ → не мб

$d = 9$

$\overline{9cba} - 8802 = \overline{abc9}$

$\begin{cases} b - 1 = c \\ c - 8 = b \end{cases}$ ⇒ $b - 9 = b$, $0 = 9$ ⇒ не мб

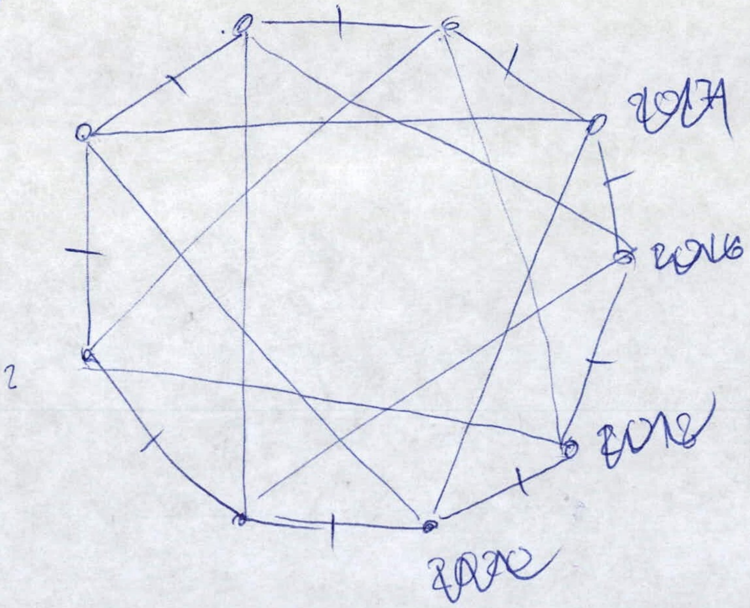
$\overline{9cb1} - 8802 = \overline{1bc9}$

$\begin{cases} b + 9 = c \\ c - 9 = b \end{cases}$

$\boxed{b = 0,\ c = 9}$

$1099 + 8802 = 9901$

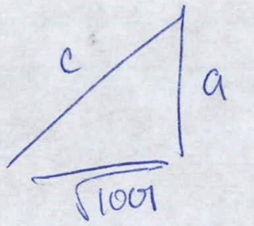
5



$$180 \cdot 7$$

$$1260 : 9 = 140$$

6



$$c^2 = a^2 + 1001$$

$$c^2 - a^2 = 1001$$

$$(c-a)(c+a) = 1001$$

$$1001 : 7 = 143$$

$$143 : 11 = 13$$

$$7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$$

1) $\begin{cases} c+a = 1001 \\ c-a = 1 \end{cases} \to \begin{cases} 2a = 1000 \\ c = a+1 \end{cases} \to \begin{cases} a = 500 \\ c = 501 \end{cases}$

2) $\begin{cases} c+a = 77 \\ c-a = 13 \end{cases} \to \begin{cases} 2a = 64 \\ c = a+13 \end{cases} \to \begin{cases} a = 32 \\ c = 45 \end{cases}$

3) $\begin{cases} c+a = 143 \\ c-a = 7 \end{cases} \to \begin{cases} 2a = 136 \\ c = a+7 \end{cases} \to \begin{cases} a = 68 \\ c = 75 \end{cases}$

4) $\begin{cases} c+a = 91 \\ c-a = 11 \end{cases} \to \begin{cases} 2a = 80 \\ c = a+11 \end{cases} \to \begin{cases} a = 40 \\ c = 51 \end{cases}$