70-01-08-05
(117.1)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 8 класс

город Уфа

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Покори Воробьевы Горы"

по математике

Мансурова Марата Робертовича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«13» марта 2016 года

Подпись участника

70-01-08-05
(117.1)

Чистовик

1	2	3	4	5	6
+	+	+	+	+	+

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

100

Толкачёва

ВМ

№1

11 a b c d e f 12

Сумма каждых трех чисел, стоящих подряд, равна 50.

Значит $\begin{cases} 11+a+b=50 \\ a+b+c=50 \end{cases} \Rightarrow \underline{11=c}.$

Также $\begin{cases} c+d+e=50 \\ d+e+f=50 \end{cases} \Rightarrow c=f.$

Еще $\begin{cases} e+f+12=50 \\ e+f+d=50 \end{cases} \Rightarrow d=12.$

Еще $\begin{cases} b+c+d=50 \\ a+b+c=50 \end{cases} \Rightarrow a=d.$

Итого, мы знаем

11 12 b 11 12 e 11 12

$11+12+b=50$ и $11+12+e=50$

$b=27$ $e=27.$

Значит ряд таков: +

11 12 27 11 12 27 11 12

№2.

Ответ: да, могу. +

Пример:

$(1+2+3+4+5+6+7)\cdot 8\cdot 9=2016.$

№3.

Пусть процент верных ответов был бы 60%.

Тогда всего вопросов 33(3)

А если бы он был 70%, то вопросов было бы $28\frac{4}{7}$

Чем больше вопросов, тем меньше процент правильных ответов.

Значит кол-во вопросов колеблется от $28\frac{4}{7}$ до $33\frac{1}{3}$.

При том, сказано, что всего 4 раздела с одинаковым кол-вом вопрос

Значит кол-во целое и кратно 4. А такое число на нашем отрезке

одно. Это 32. Ответ: 32 вопроса. +

Чистовик

№4

Пусть наше число $\overline{abcd}$, где a, b, c, d - цифры нашего числа.

Тогда $\overline{abcd} + 7182 = \overline{dcba}$

$1000a + 100b + 10c + d + 7182 = 1000d + 100c + 10b + a$.

$999a + 90b + 7182 = 999d + 90c$.

$111(d-a) + 10(c-b) = 798$

$0 \le (d-a) \le 9 \quad 0 \le (c-b) \le 9$.

$-999 \le 111(d-a) \le 999 \quad -90 \le 10(c-b) \le 90$.

$111(d-a) + 10(c-b) = 798$.

$708 \le 111(d-a) \le 888$

$d-a = 7$ или $d-a = 8$.

$777 + 10(c-b) = 798$

$10(c-b) = 21$

$c-b = 2{,}1$.

Не подходит.

$888 + 10(c-b) = 798$.

$10(c-b) = -90$

$10(c-b) = -90$

$10(b-c) = 90$

$b-c = 9$.

Тогда $b=9$ $c=0$.

$\begin{cases} d=8 \\ a=0 \end{cases}$ $\begin{cases} d=9 \\ a=1. \end{cases}$

Число не может начинаться с 0.

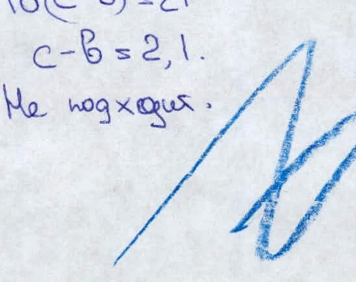
Значит $a=1$; $b=9$; $c=0$; $d=9$.

$1909 + 7182 = 9091$.? Да.

Других чисел нет.

Ответ: 1909.

№5.



$AB = 4$. E и F - середины DC и AB соот.

$S\ FGEH$ - ?

Решение:

Т.к. $ABCD$ квадрат, то $DE = EC = AF = FB = 2$.

$DE = 2$; $AD = 4$. Значит $GD = EG = GA$.
$EC = 2$ $CB = 4$ Значит $CH = EH = HB$
$FB = 2$ $BC = 4$ Значит $BH = CH = HF$
$AF = 2$ $AD = 4$ Значит $AG = DG = GF$

} В прямоуг. Δ. Медиана равна половине гипотенузы

и $\Delta DAF = \Delta CBF$ по 2 катетам.

Значит $DG = GE = EH = HC = BH = HF = FG = GA$.

Всего $S_{ABCD} = AB^2 = 16$. $\Delta CBE = \Delta FEB = \Delta FEA = \Delta DAE$ по катету и гипотенузе.

№5 (продолжение)

Значит $S_{\triangle} AEB = \frac{1}{2} S_{\square} ABCD$.

$S\ AEB = 8$.

~~$\triangle EGH$~~ GH - средняя линия $\triangle AEB$.

$GH = 2$.

$\triangle GEH = \triangle GFH = \triangle FHB = \triangle AGF$ по 3 сторонам.

Значит $S_{\square}\ EGFH = \frac{1}{2} S_{\triangle} AEB = \frac{1}{4} S_{\square} ABCD = 4$.

Значит $S_{\square} EGFH = 4$.

+

Ответ: 4.

№6.

По теореме Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$ (a, b - катеты; c - гипотенуза)

Пусть x - 2 катет, y - гипотенуза.

$\sqrt{2016}^2 + x^2 = y^2$.

~~$x^2 = y$~~ $y^2 - x^2 = 2016$.

$(y-x)(y+x) = 2016$ $y, x \in N$. $y - x < y + x$

$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Делители 2016: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 28, 32, 36, 42, 48, 56, 63, 72, 84, 96, 112, 126, 144, 168, 224, 252, 288, 336, 504, 672, 1008, 2016.

$y-x$	1	2	3	4	6	7	8	9	12	14	16	18	21	24	28	32	36	42
$y+x$	2016	1008	672	504	336	288	252	224	168	144	126	112	96	84	72	63	56	48
x	1007,5	503	334,5	250	165	140,5	122	107,5	78	65	55	47	37,5	30	22	15,5	10	3
y	–	505	–	254	171	–	130	–	90	79	71	65	–	54	50	–	46	45.

Значит всего существует 12 различных прямоугольных треугольников, так что, один из катетов $= \sqrt{2016}$, а другой катет и гипотенуза - ~~целые~~ натур. числа.

Ответ: 12 разл. треугольников.

+

70-01-08-05 (117.1)

Черновик

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

$\boxed{№6}$

$\sqrt{2016}^2 + x^2 = y^2$.

$2016 + x^2 = y^2$

$\cancel{x^2 = y^2}$ $y^2 - x^2 = 2016$.

$(y-x)(y+x) = 2016$

2016 =

2016	2
1008	2
504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7

$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$

Значит делители:

1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 28, 32, 36, 42

$6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$

y-x	1	2	3	4	6	7	8	9	12	14	16	18	21	24	28	32	36	42
y+x	2016	1008	672	504	336	288	252	224	168	144	126	112	96	84	72	63	56	48
x	$\frac{2015}{2}$	$\frac{1006}{2}$	$\frac{669}{2}$	$\frac{500}{2}$	$\frac{330}{2}$	$\frac{281}{2}$	$\frac{244}{2}$	$\frac{215}{2}$	$\frac{156}{2}$	$\frac{130}{2}$	$\frac{110}{2}$	$\frac{94}{2}$	$\frac{75}{2}$	$\frac{60}{2}$	$\frac{44}{2}$	$\frac{31}{2}$	$\frac{20}{2}$	$\frac{6}{2}$
y	—	505	—	254	171	—	130	—	90	79	71	65	—	54	50	—	46	

x = 503	250	165	122	78	65	55	47	30	22	10	3
y = 505	254	171	130	90	79	71	65	54	50	46	45

№4.

$\overline{abcd} + 7182 = \overline{dcba}$

$1000a + 100b + 10c + d + 7182 = 1000d + 100c + 10b + a$

$999a + 90b + 7182 = 999d + 90c$.

$111a + 10b + 798 = 111d + 10c$

$\cancel{111(a-d) + 10(b-c)}$

$111(d-a) + 10(c-b) = 798$.

a, b, c, d - цифры. $0 \le c - b \le 9$ $\quad 10(c-b) \le 90$.

$798 \ge 111(d-a) \ge 708$.

$(d-a) \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow d - a = 7$

$d - a = 7 \Rightarrow 10(c-b) = 21$. $\quad c - b = 2, 1$.

Значит таких чисел нет.

9091
− 1999
71 82

1 2

1 8

~~2086~~ 9.

9 2
2 9

8 1
1 8

9 1
1 9.

Задачи.

1	2	3	4	5	6
V	V	V	V	V	V

Черновик.

№3.

4x. $\frac{x}{5}$ 4(x-5).

20 вопросов

60 70

Если 60%. то 33 вопроса.

Если 70%. , то $\frac{1000}{35} = 28\frac{4}{7}$

То есть всего вопросов от 29 до 33

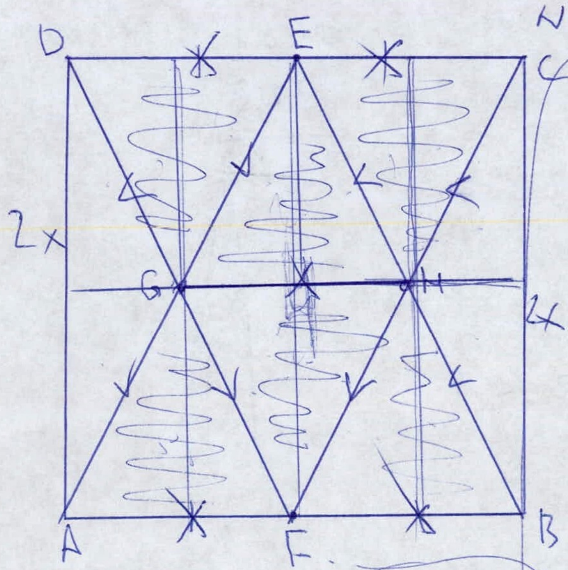
И при том 4x. Значит 32

№2.

$(1+2+3+4+5+6+7) \cdot 8 \cdot 9 = 2016$.

$(1+2+3+4+5+6+7) = 28$

№5.



AB=4. S_{GEMF}-?

$S_{ABCD}=16$

№4.

11 12 27 11 12 27 11 12