

Почткар - Ома

98-56-65-87  
(197.1)



Олимпиада ПБГ

2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант \_\_\_\_\_

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Покори Воробьевы горы!"

по математике

Разина Арсена Далматовича

фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

вопрос 11:38 - 11:40  
Дал

+1 балл Дал

вопрос 10:41 -  
10:43  
Дал

Дата

«27» марта 2016 года

Подпись участника

Дал

98-56-65-87  
(197.1)

Шатина

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

100  
(сто)

~2?

Олимпиада

ПВГ

2016

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 136 \\ \hline 0,82 \\ 272 \\ \hline 1088 \\ \hline 11152 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 124 \\ \hline 0,88 \\ 992 \\ \hline 992 \\ \hline 109,12 \end{array}$$

$$(100 + a) \cdot 0,82 = (100 + b) \cdot 0,88 = (100 + c) \cdot 0,9 = (100 + d) \cdot 0,92 = (100 + e) \cdot x = 100$$

$$82 + 0,82a = 88 + 0,88b = 90 + 0,9c = 92 + 0,92d = 100$$

$$0,82a = 6 + 0,88b = 8 + 0,9c = 10 + 0,92d = 18$$

$$\frac{18}{0,82} = \frac{1800}{82} = \frac{900}{41}$$

$$\frac{12}{0,88} = \frac{1200}{88} = \frac{300}{22} = \frac{150}{11}$$

$$\frac{10}{0,9} = \frac{100}{90} = \frac{10}{9}$$

$$\frac{8}{0,92} = \frac{800}{92} =$$

$$= \frac{400}{46} = \frac{200}{23}$$

$$\frac{900}{41} + \frac{150}{11} + \frac{10}{9} + \frac{200}{23} + x = 100$$

$$0,1a + 0,1b + 0,1d + 0,1e = c$$

$$0,18(b + c + d + e) = a$$

$$0,12(a + c + d + e) = b$$

$$0,1(a + b + d + e) = c$$

$$0,08(a + b + c + e) = d$$

$$x(a + b + c + d) = e$$

$$x(0,18(b + c + d + e) + 0,12(a + c + d + e) + 0,1(a + b + d + e) + 0,08(a + b + c + e)) = e$$

$$x(0,18b + 0,18c + 0,18d + 0,18e + 0,12a + 0,12c + 0,12d + 0,12e + 0,1a + 0,1b + 0,1d + 0,1e + 0,08a + 0,08b + 0,08c + 0,08e) = e$$

$$x(0,3a + 0,36b + 0,38c + 0,4d + 0,48e) = e$$

$16 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 = 16 \cdot 189 =$  перевик

$$\begin{array}{r} 55 \\ 160 \\ \times 16 \\ \hline 960 \\ 1760 \\ \hline 3024 \end{array}$$

$111, 117, 111, 111, 111, 117, 117 \quad | \quad 99$   
 $\hline 1122334455667789$

$$\begin{array}{r} 221 \\ - 99 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 221 \\ - 198 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 231 \\ - 198 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 331 \\ - 297 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 341 \\ - 297 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 441 \\ - 396 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 451 \\ - 396 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 551 \\ - 495 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 561 \\ - 495 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 661 \\ - 594 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 671 \\ - 594 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 771 \\ - 693 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 781 \\ - 693 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 881 \\ - 792 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 981 \\ - 981 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$100a + 100b + 100c + 100d + 100e = 164a + 82b + 82c + 82d + 82e = 82a + 176b + 88c + 88d + 88e = 90a + 90b + 180c + 90d + 90e = 92a + 92b + 92c + 784d + 92e$$

$$176a + 176b + 176c + 176d + 176e = 82a = 6a + 94b + 6c + 6d + 6e = 8a + 8b + 98c + 8d + 8e = 10a + 10b + 10c + 102d + 10e$$

$$172a + 176b + 176c + 176d + 176e = 76a = 94b + 6c + 6d + 6e = 2a + 8b + 98c + 8d + 8e = 4a + 10b + 10c + 102d + 10e$$

~~$$18 + 12 + 10 + 8 + 6 = 48 \Rightarrow 52 = e$$~~

~~$$36 + 24 + 20 + 16 = 96 \Rightarrow e = 4$$~~

ка 2%

136

~~$$36 + 24 + 20 + 16 + 4 = 0,82 (12 + 24 + 20 + 16 + 4)$$~~

$$(100+a) \cdot 0,82 = 100$$

$$82 + 0,82a = 100$$

$$0,82a = 18$$

$$a = \frac{18}{0,82} = \frac{1800}{82} = \frac{900}{41} = 21, \frac{39}{41}$$

$$b = \frac{12}{0,88} =$$

$$\frac{18}{0,82} + \frac{12}{0,88} + \frac{10}{0,9} + \frac{8}{0,92} + \frac{e}{x} = 100$$

$$\frac{1800}{82} + \frac{1200}{88} + \frac{1000}{900} + \frac{800}{920} + \frac{100e}{100x} = 10000$$

$$136 \cdot 0,82 = 124 \cdot 0,88 = 120 \cdot 0,9 = 116 \cdot 0,92 = 104 \cdot 0,98$$





чертовик

№5

20-значное число

Найдём все числа с суммой цифр больше 177, т.е. от 178 до 180

178: 1 число:

9999999999 9999999999

179: 20 чисел с 1 8-кой и 19 дев.

178: 1) 20 чис. с 1 7-кой и 19 дев.

2)  $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$  чис. с 2 8-ками и 18 дев.

2  
20 + 190 = 210

от 178 до 180 всего:

1 + 20 + 210 = 231 число

А всего 20-значных чисел:

90000000000000000000  
231

89999999999999999999 - число

№2

П. - а, М. - б, Г. - с, Д. - d, А. - e  
t - время раб.

$$t(a+b+c+d+e) = 0,82 t (2a+b+c+d+e) =$$

$$= \frac{t}{0,88} (a+2b+c+d+e) = \frac{t}{0,9} (a+b+2c+d+e) =$$

$$= \frac{t}{0,92} (a+b+c+2d+e) = \frac{t}{2} (a+b+c+d+2e)$$

$$a+b+c+d+e = 1,64 a + 0,82(b+c+d+e) = 1,76 b + 0,88(a+c+d+e) = 1,8 c + 0,9(a+b+d+e) = 1,84 d + 0,92(a+b+c+e) = 2xe + 2(a+b+c+d)$$

$$100a + 100b + 100c + 100d + 100e = 164a + 82b + 82c + 82d + 82e = 146b + 88a + 88c + 88d + 88e = 180c + 90a + 90b + 90d + 90e = 184d + 92a + 92b + 92c + 92e = 200xe + 100xa + 100xb + 100xc + 100xd$$

Чистовик  
 в 5 (продолжение)

$$\underbrace{900 \dots 00}_{19 \text{ нулей}} - 231 = 90000600000000000000 - 231 =$$

$$= \underbrace{899 \dots 99769}_{16 \text{ девяток}} - \text{количество 20-значных чисел с суммой цифр не превосходящей } 147.$$

Ответ: их количество:  $8999999999999999769$   
 в 6

Заметим, что число  $99N$  кратно 9 и кратно 11, и при этом состоит только из единиц. Тогда, т.к.  $99 : 9 = 11$ , то сумма его цифр кратна 9, а т.к. все цифры этого числа — единицы, то их количество кратно 9 (т.к. сумма цифр этого числа равна количеству цифр этого числа), т.к. все цифры — единицы).

Но так же ~~сумма~~ число  $99N$  кратно и 11, т.к. 9 и 11 — взаимнопросты и  $99 : 11 = 9$ . Но тогда сумма цифр, стоящих на чётных позициях и на нечётных равна (разности, кратной  $11$  будет, т.к. все цифры в этом числе одинаковы). Но тогда, т.к. все цифры в этом числе одинаковы количество чисел — чётно, т.к. количество чётных ~~чисел~~ позиций равно количеству нечётных позиций (рассматривается количество позиций, т.к. опять же все цифры числа одинаковы).

Тогда количество цифр в числе  $99N$  кратно и 9, и 2, т.е. оно кратно 18. Но т.к.  $99N \in \mathbb{N}$  числам, то количество цифр в числе отвлечено от нуля и их минимум 18. Тогда осталось найти число  $N$  разделив  $11 \dots 11$  (число  $99N$ ) на 99. ~~Получим:  $11 \dots 11 : 99 = 1122334455667789$~~  ~~Получим:  $11 \dots 11 : 99 = 1122334455667789$~~   
 Ответ: ~~Получим:  $11 \dots 11 : 99 = 1122334455667789$~~



98-56-65-87  
(197.1)

1	2	3	4	5	6	Σ
+	+	+	+	+	+	

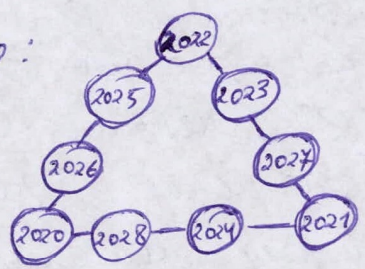
**7** Числовик  
Мат 1  
N 1

Олимпиада ПБГ  
2016

Заметим, что м.к.  $N : 12, N+2 : 14, N+4 : 16$ ,  
и  $N+6 : 18 \Rightarrow N \equiv_{12} 0, N \equiv_{14} 12, N \equiv_{16} 12,$   
 $N \equiv_{18} 12$ , но м.к.  $N \equiv_{12} 0 \equiv_{12} 12$ , то по всем мо-  
дулям число  $N$  равно 12 (по всем имеет-  
ся в виду по модулям 12, 14, 16 и 18). Но тогда  
да  $N$  имеет вид  $\text{НОК}(12; 14; 16; 18) \cdot k + 12$ , м.к.  
 $3024k + 12$ , м.к.  $\text{НОК}(12; 14; 16; 18) = 3024$ . Но тогда  
это число будет наименьшим при  $k=0$ , м.к.  
 $N$  - натуральное число, а значит  $k \geq 0$ .  
При  $k=0, N$  будет равно 12. Проверка:  
 $12 \equiv_{12} 12 \equiv_{12} 0; 12+2 \equiv_{14} 14 \equiv_{14} 0; 12+4 \equiv_{16} 16 \equiv_{16} 0; 12+6 \equiv_{18} 18 \equiv_{18}$   
 $\equiv_{18} 0$ . И.е. все условия, данные в задаче со-  
блюдены и мы нашли такое наименьшее  $N$ .  
Ответ: наименьшее  $N = 12$ . (+)

В3  
Ответ: Да, можно:

Здесь сумма чисел  
на каждой стороне  
равна 8093:



$$2022 + 2023 + 2027 + 2021 = 8093$$

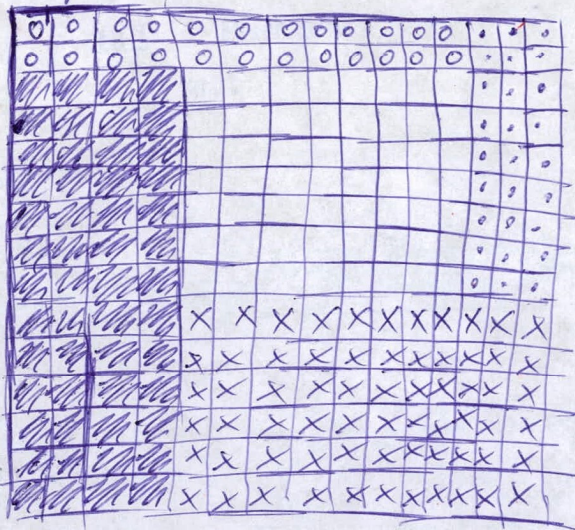
$$= 2021 + 2024 + 2028 + 2020 = 8093$$

В4  
Чтобы из этих прямоугольников можно было  
сложить квадрат  $15 \times 15$  нужно, чтобы и прямо-  
угольника образовали "рамку" вокруг 5-гого.

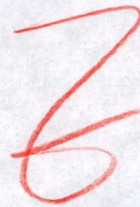
- Тогда можно предложить пример:  
Пусть прямоугольники имеют размеры
- 1)  $2 \times 12$
  - 2)  $9 \times 3$
  - 3)  $6 \times 11$
  - 4)  $13 \times 4$
  - 5)  $7 \times 8$
- Все числа 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11,  
12 и 13 - различные

Чистовик  
№4 (подойдет)

Пример разбивки:



- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)



- разбивки (разными способами обозначены соответствующие эти прямоугольники)



Ответ: эти 5 прямоугольников: 1)  $2 \times 12$ ; 2)  $9 \times 3$ ; 3)  $6 \times 17$ ; 4)  $13 \times 4$ ; 5)  $7 \times 8$   
№2


Заметим, что если вся семья работала в два раза быстрее, то она <sup>потратила</sup> ~~сравняла бы~~ на 50% меньше времени (т.е. у всех производительность увеличилась бы в 2 раза). С другой стороны без удвоенной работы Анёша семья <sup>потратила</sup> ~~сравняла бы~~ на  $18\% + 12\% + 20\% + 8\% = 48\%$  меньше времени. Значит если бы Анёша работало в два раза быстрее ~~он~~, семья потратила бы на  $50\% - 48\% = 2\%$  меньше времени.

Ответ: на 2% меньше времени потратила бы семья, если бы Анёша работало в два раза быстрее.

№5

Чтобы найти <sup>количество</sup> ~~число~~ таких чисел найдём количество ~~чисел~~ 20-значных чисел с суммой цифр большей 147, а затем вычтем это число из количества всех 20-значных чисел (которых всего  $900 \dots 00$ )  
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{19 \text{ нулей}}$

Числовик  
№5 (продолжение)

Заметим, что максимальная сумма цифр числа достигается, если все цифры - девятки. Тогда максимальная сумма цифр 20-значного числа -  $20 \cdot 9 = 180$ . Значит нам нужно найти все 20-значные с суммой цифр от 178 до 180 (от 178, т.к. мы ищем все числа с суммой цифр большей 177), а вернее их количество. Хотим: с суммой цифр 180 будет только одно число:  $\underbrace{99 \dots 99}_{20 \text{ девяток}}$  

2) С суммой цифр 179 будет 20 чисел, состоящих из 19 девяток и одной восьмёрки, а их 20, т.к. 8 может стоять на одном из 20 мест, а девятки на других.

3) С суммой цифр 178 два варианта:

а) 20 чисел из 19 девяток и 1 семерки (случай аналогичен для 19 девяток и 1 восьмёрки).

б) 190 чисел из 2-х восьмёрок и 18 девяток, таких чисел 190, т.к. первая восьмёрка стоит на одном из 20 мест, вторая на одном из 19 оставшихся, но ~~все~~ все числа в трёхзначной двадцати, т.к. мы брали числа где I-я восьмёрка на i месте, а II-я - на ~~на~~ j и когда I-я - на j и II-я - на i. Поэтому всего случаев:  $\frac{20 \cdot 19}{2} = \frac{20}{2} \cdot 19 = 19 \cdot 10 = 190$ .

Тогда всего 20-значных чисел с суммой цифр 178 будет  $190 + 20 = 210$

Тогда 20-значных чисел с суммой цифр большей 177 будет  $1 + 20 + 210 = 231$

Но тогда 20-значных чисел с суммой цифр не превышающей 177 будет:

98-56-65-87  
(197.1)

числовик  
лист 2  
№6 (продолжение)

ОЛИМПИАДА ПВИ  
2016

8

Разделим  $111 \cdot 111 \cdot 111 \cdot 111 \cdot 111 \cdot 111$  на  $99$  в столбик:

$$\begin{array}{r}
 111 \cdot 111 \cdot 111 \cdot 111 \cdot 111 \cdot 111 \quad | \quad 99 \\
 \hline
 1 \cdot 122334455667789 \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 111 \\
 - 99 \\
 \hline
 121 \\
 - 99 \\
 \hline
 221 \\
 - 198 \\
 \hline
 231 \\
 - 198 \\
 \hline
 331 \\
 - 297 \\
 \hline
 341 \\
 - 297 \\
 \hline
 441 \\
 - 396 \\
 \hline
 451 \\
 - 396 \\
 \hline
 551 \\
 - 495 \\
 \hline
 561 \\
 - 495 \\
 \hline
 661 \\
 - 594 \\
 \hline
 671 \\
 - 594 \\
 \hline
 771 \\
 - 693 \\
 \hline
 781 \\
 - 693 \\
 \hline
 881 \\
 - 792 \\
 \hline
 981 \\
 - 981 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Получим частное от деления числа  $99N$  на  $99$ , т.е. число  $N$ , а шестко частное от деления числа  $\underbrace{111 \dots 111}_{18 \text{ единиц}}$  на  $99$ , т.е.  $1.122334455667789$

Ответ: таким наименьшим натуральным числом  $N$  будет  $1.122.334.455.667.789$ .