ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2019 года

БИЛЕТ № 01 (ЧЕЛЯБИНСК): возможные решения и ответы.

Критерии оценивания:

<u>Для вопросов</u>:

Есть отдельные правильные соображения – **1 балл.**

Ответ в целом правилен, но содержит существенные неточности, или существенно неполон, или отсутствует обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **2 балла.**

Ответ правилен, но присутствуют мелкие неточности, или ответ недостаточно полон, или отсутствует достаточное обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **3 балла.**

Ответ полностью правильный, но недостаточно обоснованный (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **4 балла.**

Правильный, полный и обоснованный ответ – **5 баллов (максимальная оценка).**

<u>Для задач</u>:

Есть отдельные правильные соображения – **1-2 балла.**

Есть часть необходимых для решения соображений, решение не закончено или содержит серьезные ошибки – **3-4 балла.**

Присутствует большая часть необходимых для решения соображений, правильно записана часть необходимых соотношений, решение не закончено или содержит ошибки – **5-7 баллов.**

Присутствуют <u>все</u> необходимые для решения соображения, правильно записаны почти все необходимые для решения исходные уравнения, но решение не закончено или содержит ошибки – **8-10 баллов.**

Присутствуют <u>все</u> необходимые для решения соображения, правильно записаны <u>все</u> необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит ошибки – **11-14 баллов.**

Присутствуют <u>все</u> необходимые для решения соображения, правильно записаны <u>все</u> необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит одну-две мелкие неточности, не позволившие получить правильный ответ, или правильное решение с недостаточным обоснованием существенных использованных результатов – **15-17 баллов.**

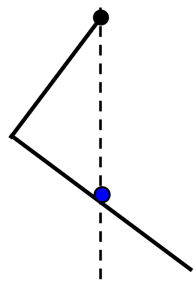
Правильное обоснованное решение с верным аналитическим ответом, но мелкой неточностью при получении численного ответа, либо правильное решение с правильными ответами с недостаточным обоснованием одного из использованных результатов (из числа не ключевых для решения, но необходимых) – **18-19 баллов.**

Полное, правильное, обоснованное решение с правильными ответами – **20 баллов (максимальная оценка).**

Задание 1.

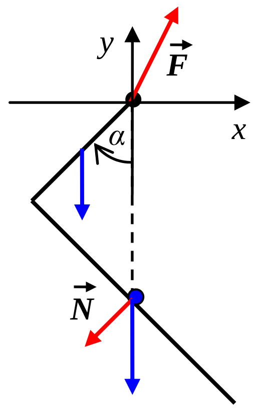
Вопрос: Кубик массы m покоится на очень шероховатой ($\mu \approx 1$) горизонтальной поверхности. При помощи какой минимальной силы его можно заставить начать вращение вокруг одного из своих горизонтальных ребер? Ускорение свободного падения равно g.

Задача: Уголок, изготовленный из однородной проволоки, имеет два перпендикулярных «плеча» с длинами $l_1 \equiv a = 20\,\text{см}$ и $l_2 = \dfrac{3}{2}a = 30\,\text{см}$. Его повесили за конец короткого плеча на шарнирном подвесе (который позволяет ему свободно вращаться в вертикальной плоскости вдоль стенки, не касаясь ее). Затем в стену на одной вертикали с подвесом вбили горизонтально гладкий гвоздь – так, что теперь уголок опирается на гвоздь серединой длинного плеча. Во сколько раз и как изменилась из-за появления гвоздя величина силы, с которой уголок действует на подвес?



Ответ на вопрос: Ясно, что для придания вращения необходимо, чтобы момент внешней силы как минимум уравновесил момент силы тяжести, действующей на кубик. Момент силы тяжести относительно одного из нижних ребер равен $M_g = mg\frac{a}{2}$. Минимальная сила будет соответствовать максимальной величине плеча силы, которое равно $l_{\max} = a\sqrt{2}$. Поэтому $F_{\min} = \frac{M_g}{l_{\max}} = \frac{mg}{2\sqrt{2}}$. При этом горизонтальная проекция силы будет равна $F_{||} = \frac{F_{\min}}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{2} < \mu mg$, то есть кубик не будет скользить.

Решение задачи: Из сил, приложенных к уголку, только сила реакция гвоздя и вес короткого плеча имеют ненулевые моменты относительно шарнира. Правило моментов (с учетом однородности уголка массы m): $\frac{2m}{5}g\frac{a}{2}\sin(\alpha) - N\frac{3a}{4} = 0 \Rightarrow N = \frac{4mg}{25}$. Здесь мы учли, что $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$. Из условия равновесия сил находим:



$$\left\{\begin{aligned} F_x &= N\sin(\alpha) = \frac{12mg}{125} \\ F_y &= mg + N\cos(\alpha) = \frac{141mg}{125} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{3\sqrt{89}}{25}mg.$$

Ясно, что до появления гвоздя сила реакции шарнира была равна mg, поэтому из-за появления гвоздя эта сила увеличилась в $\frac{3\sqrt{89}}{25} \approx 1{,}13$ раза.

Задание 2.

Вопрос: Как связаны между собой изменение внутренней энергии одноатомного идеального газа и полученное им количество теплоты в изобарном процессе?

Задача: ν = 2 моля одноатомного идеального газа находится в теплоизолирующем вертикальном цилиндре с подвижным поршнем площадью S и массой m. Дно цилиндра равномерно заряжено зарядом q, а поршень — зарядом ($-q$). Расстояние между дном сосуда и поршнем намного меньше диаметра цилиндра. Газ медленно получает от нагревателя количество теплоты Q. На какое расстояние при этом сдвинется поршень? Считайте, что электрическое поле остается однородным, трения нет. Диэлектрическая проницаемость газа равна единице, электрическая постоянная ε_0, ускорение свободного падения g, давление над поршнем равно p_0.

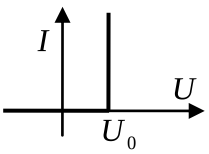
Ответ на вопрос: Рассмотрим изменение объема газа от V_1 до V_2. Изменение внутренней энергии при постоянном давлении p, в соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона, $\Delta U = \Delta\left(\frac{3}{2}\nu RT\right) = \frac{3}{2}\Delta(pV) = \frac{3}{2}p(V_2 - V_1)$. Работа газа в изобарном процессе равна $A = p(V_2 - V_1) = \frac{2}{3}\Delta U$. Поэтому $Q = A + \Delta U = \frac{5}{3}\Delta U$.

Решение задачи: Поскольку электрическое поле однородно, сила притяжения между поршнем и дном цилиндра не зависит от положения поршня: $F_{эл} = |q_-|E_+ = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$. Поэтому давление p газа во время опыта постоянно (с учетом наружного атмосферного давления и веса поршня): $p = p_0 + \frac{mg + q^2/(2\varepsilon_0 S)}{S}$. Рассуждая аналогично тому, как это было сделано в вопросе, замечаем, что полученное газом количество теплоты связано с работой по перемещению поршня соотношением $Q = \frac{5}{2} A \Rightarrow pS \cdot \Delta h = \frac{2}{5} Q$. Поэтому смещение поршня равно $\Delta h = \frac{4}{5} \frac{\varepsilon_0 Q S}{2\varepsilon_0 (p_0 S^2 + mgS) + q^2}$.

Задание 3.

Вопрос: Допустим, что для некоторого элемента цепи связь тока с приложенным напряжением дается уравнением $I = f(U)$, где f – известная функция. Как нужно рассчитывать мощность, которую будет потреблять этот элемент при подключении к клеммам источника с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r?

Задача: К источнику постоянной ЭДС подключают гирлянду из последовательно соединенных резистора и n одинаковых светодиодов, вольт-амперная характеристика



которых показана на рисунке ($U_0 = 1$В). Если включить в гирлянду $n_1 = 10$ светодиодов, то полная потребляемая ими мощность составит $P_1 = 175$Вт, если включить $n_2 = 28$ светодиодов, то $P_2 = 238$Вт. Определите «оптимальное» число светодиодов, при котором потребляемая мощность максимальна, а сила тока через каждый из светодиодов – минимальна (из возможных при этой мощности). Найти максимальную потребляемую мощность. Чему равна ЭДС источника?

Ответ на вопрос: В общем случае мощность, потребляемая элементом цепи, вычисляется по формуле $P = I \cdot U$. В случае заданной вольт-амперной характеристики необходимо исходить из того, что напряжение на элементе, подключенным к источнику, равно $U = \mathcal{E} - rI$. Значит, это напряжение находится из уравнения $U + r\, f(U) = \mathcal{E}$. Это уравнение может решаться как аналитически, так и графически, а затем вычисляется $P = U \cdot f(U)$.

Решение задачи: Рассмотрим гирлянду из n светодиодов, в которой течет ток (то есть ЭДС источника $\mathcal{E} > n \cdot U_0$). Сила тока $I = \frac{\mathcal{E} - n \cdot U_0}{R}$ (R – сопротивление «внешней» части цепи).

Потребляемая гирляндой мощность $P = nU_0 I = nU_0 \frac{\mathcal{E} - n \cdot U_0}{R} \equiv P_0 \cdot n(\bar{n} - n)$. Здесь введены обозначения $P_0 \equiv \frac{U_0^2}{R}$ и $\bar{n} \equiv \frac{\mathcal{E}}{U_0}$. Как видно, зависимость мощности от числа светодиодов – квадратичная, и максимум мощности соответствует значению $n = \frac{\bar{n}}{2}$. Записав соотношения $P_1 = P_0 \cdot n_1(\bar{n} - n_1)$ и $P_2 = P_0 \cdot n_2(\bar{n} - n_2)$, получаем из них уравнение на $\bar{n}$: $P_2 \cdot n_1(\bar{n} - n_1) = P_1 \cdot n_2(\bar{n} - n_2)$. Таким образом, $\bar{n} = \frac{n_2^2 P_1 - n_1^2 P_2}{n_2 P_1 - n_1 P_2} = 45$. Следовательно, ЭДС источника $\mathcal{E} = \bar{n} U_0 = 45$В. Поскольку число светодиодов – это целое число, а парабола симметрична относительно оси, то можно сделать вывод, что максимум мощности достигается при $n = 22$ и $n = 23$. По условию «оптимальности» на нужна меньшая сила тока, поэтому оптимальный режим соответствует $n_{опт} = 23$. Максимальная мощность $P_m = P_1 \cdot \frac{n_{опт}(\bar{n} - n_{опт})}{n_1(\bar{n} - n_1)} = \frac{253}{175} P_1 = 253$Вт.

Задание 4.

Вопрос: При выполнении каких условий линзу можно считать «тонкой»?

Задача: Предмет и его прямое изображение располагаются на оси тонкой линзы перпендикулярно этой оси и симметрично относительно одного из фокусов линзы.

Расстояние между предметом и изображением $l = 20$ см. Чему может равняться фокусное расстояние линзы?

Ответ на вопрос: При выводе формул, описывающих тонкие линзы, используются два приближения: пренебрегают смещением световых лучей вдоль плоскости линзы по сравнению с ее диаметром и считают малыми все углы между световыми лучами и главной оптической осью линзы (используются соотношения ***параксиального приближения*** $\sin(\alpha) \approx tg(\alpha) \approx \alpha$). Смещение луча вдоль плоскости линзы по величине порядка геометрической толщины самой линзы, то есть она действительна должна быть «тонкой»: ее толщина должна быть много меньше ее диаметра. Это требование также можно переформулировать следующим образом: диаметр линзы должен быть много меньше радиусов кривизны ограничивающих ее сферических поверхностей. Второе требование – то, что все рассматриваемые лучи должны быть параксиальными.

Решение задачи: Прямые изображения предметов (светящиеся точки которых есть действительные источники для линзы) создают рассеивающие линзы (при любом расстоянии от предмета до линзы) и собирающие линзы (когда расстояние от предмета до линзы меньше ее фокусного расстояния). В обоих случаях это изображение будет мнимым, то есть будет располагаться по одну сторону от линзы с предметом. Пусть a – расстояние от предмета до линзы, а $b = -|b|$ – расстояние от линзы до мнимого изображения. Для рассеивающей линзы оптическая сила отрицательна, а изображение находится ближе к линзе, чем предмет. Поэтому $a = |F| + \frac{l}{2}$, а $|b| = |F| - \frac{l}{2}$. Согласно формуле линзы $\frac{1}{|F| + \frac{l}{2}} - \frac{1}{|F| - \frac{l}{2}} = -\frac{1}{|F|} \Rightarrow |F|^2 - l|F| - \frac{l^2}{4} = 0$. Выбирая для $|F|$ положительный корень уравнения, находим: $|F| = \frac{(\sqrt{2}+1)l}{2} \approx 24{,}14$ см. Аналогично для собирающей линзы (мнимое изображение находится дальше от линзы, чем предмет: значения $a = F - \frac{l}{2}$, а $|b| = F + \frac{l}{2}$ приводят к уравнению $F^2 - lF - \frac{l^2}{4} = 0$, положительный корень которого снова $F = \frac{(\sqrt{2}+1)l}{2} \approx 24{,}14$ см. Ответ также можно записать в общем виде $F = \pm\frac{(\sqrt{2}+1)l}{2} \approx \pm 24{,}14$ см.