ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2019 года

БИЛЕТ № 07 (МОСКВА): ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

Критерии оценивания:

Для вопросов:

Есть отдельные правильные соображения – **1 балл.**

Ответ в целом правилен, но содержит существенные неточности, или существенно неполон, или отсутствует обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **2 балла.**

Ответ правилен, но присутствуют мелкие неточности, или ответ недостаточно полон, или отсутствует достаточное обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **3 балла.**

Ответ полностью правильный, но недостаточно обоснованный (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **4 балла.**

Правильный, полный и обоснованный ответ – **5 баллов (максимальная оценка).**

Для задач:

Есть отдельные правильные соображения – **1-2 балла.**

Есть часть необходимых для решения соображений, решение не закончено или содержит серьезные ошибки – **3-4 балла.**

Присутствует большая часть необходимых для решения соображений, правильно записана часть необходимых соотношений, решение не закончено или содержит ошибки – **5-7 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны почти все необходимые для решения исходные уравнения, но решение не закончено или содержит ошибки – **8-10 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит ошибки – **11-14 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит одну-две мелкие неточности, не позволившие получить правильный ответ, или правильное решение с недостаточным обоснованием существенных использованных результатов – **15-17 баллов.**

Правильное обоснованное решение с верным аналитическим ответом, но мелкой неточностью при получении численного ответа, либо правильное решение с правильными ответами с недостаточным обоснованием одного из использованных результатов (из числа не ключевых для решения, но необходимых) – **18-19 баллов.**

Полное, правильное, обоснованное решение с правильными ответами – **20 баллов (максимальная оценка).**

Задание 1.

Вопрос: Суммарная кинетическая энергия двух тел одинаковой массы в результате абсолютно неупругого соударения уменьшилась ровно в два раза. Каким был угол между векторами скоростей тел до соударения?

Задача: При взрыве снаряда, летевшего вертикально, в механическую энергию была преобразована часть энергии заряда, в 10 раз превосходящая кинетическую энергию снаряда перед взрывом. В результате взрыва снаряд раскололся на три осколка. На долю двух осколков – с массами $m_1 = 0{,}5$ кг и $m_2 = 3$ кг – пришлась 50% и 25% общей кинетической энергии соответственно, причем угол разлета этих осколков составил 90°. Третий осколок полетел в горизонтальном направлении. Пренебрегая массой пороховых газов, найти массу третьего осколка.

Ответ на вопрос: При абсолютно неупругом соударении прекращается относительное движение тел, и после удара их скорости одинаковы. Обозначим $\vec{v}_{1,2}$ скорости тел до удара, и $\vec{V}$ – их общую скорость после удара. Тогда из закона сохранения импульса следует, что $m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = 2m\vec{V} \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 2\vec{V}$. Возведем это соотношение в квадрат: $v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos(\alpha) = 4V^2$, где α – искомый угол. По условию $\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = 2\frac{2mV^2}{2}$, откуда $v_1^2 + v_2^2 = 4V^2$. Значит, $\cos(\alpha) = 0$ (вопрос в условии имеет смысл, только если обе скорости не равны нулю), то есть $\alpha = 90°$.

Решение задачи: В рамках заданных в условии предположений (сумма масс осколков равна массе снаряда, кинетическая энергия и импульс пороховых газов пренебрежимо малы) законы сохранения импульса и энергии можно записать в виде:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = M\vec{V} - m_3\vec{v}_3 \quad , \qquad (1)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} = 11\frac{M\,V^2}{2} \quad , \qquad (2)$$

причем $M = m_1 + m_2 + m_3$, $\vec{V}$ - скорость снаряда перед взрывом. Кроме того, по условию $m_1 v_1^2 = \frac{11}{2}M\,V^2$, $m_2 v_2^2 = \frac{11}{4}M\,V^2$. Подставляя эти соотношения в (2), получим, что $m_3 v_3^2 = \frac{11}{4}M\,V^2$. Возводя (1) в квадрат и учитывая перпендикулярность пар векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ и $\vec{V}$ найдем, что $m_3^2 v_3^2 + M^2 V^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2$. С учетом полученных выражений

$$\frac{11}{4}m_3 + m_1 + m_2 + m_3 = m_1\frac{11}{2} + m_2\frac{11}{4} \Rightarrow m_3 = \frac{18m_1 + 7m_2}{15} = 2\,\text{кг}.$$

ОТВЕТ: $m_3 = \frac{18m_1 + 7m_2}{15} = 2$ кг.

Задание 2.

Вопрос: Чему равна работа массы m идеального газа в процессе, уравнение которого в координатах плотность давление имеет вид $p(\rho) = p_0\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$, а плотность изменяется от $3\rho_0$ до $2\rho_0$? Константы ρ_0 и p_0 считать известными.

Задача: Над постоянным количеством идеального газа производят циклический процесс, состоящий из двух изохор и двух изотерм. Работа в этом цикле положительна и она в $k = 2$ раза меньше, чем количество теплоты, полученное газом в процессе изохорного нагревания. Абсолютная температура «более горячей» изотермы в $n = 1{,}6$ раза выше, чем температура «более холодной». Пусть этот процесс – цикл рабочего тела тепловой машины. Чему равен КПД этого цикла?

Ответ на вопрос: В этом процессе $p(V) = p_0\left(1 - \frac{\rho_0}{m}V\right)$, то есть в координатах давление-объем диаграмма процесса – прямая линия. Работа равна площади под этой диаграммой (площади трапеции), то есть $A_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1)$. Ясно, что $p_1 = \frac{2}{3}p_0$, $p_2 = \frac{1}{2}p_0$, $V_1 = \frac{m}{3\rho_0}$, и $V_2 = \frac{m}{2\rho_0}$. Поэтому $A_{12} = \frac{7p_0 m}{72\rho_0}$.

Решение задачи: Ясно, что идеальный газ в этом цикле получает тепло в процессах изохорного нагревания (обозначим его Q) и в процессе изотермического расширения, в котором подведенное тепло равно совершенной работе A_+ (по I Началу термодинамики $Q = A + \Delta U$, а в изотермическом процессе $\Delta U = 0$). Следовательно, теплота нагревателя $Q_H = Q + A_+$. Работа в цикле равна сумме положительной работы в процессе изотермического расширения A_+ и отрицательной – в процессе изотермического сжатия A_-. В изотермических процессах, в соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона, $p(V)=\frac{\nu RT}{V}$ (ν – количество вещества, а T – абсолютная температура), и поэтому даже без вычисления интеграла $A_{12}=\int\limits_{V_1}^{V_2}p(V)dV$ ясно, что при одинаковом количестве вещества и одинаковом соотношении граничных объемов модули работ пропорциональны абсолютным температурам изотерм. Поэтому $A_-=-\frac{1}{n}A_+$, и работа в цикле $A=\left(1-\frac{1}{n}\right)A_+=\frac{n-1}{n}A_+$. По условию $A=\frac{Q}{k}$, поэтому $A_+=\frac{n}{k(n-1)}Q$. Следовательно, $Q_H=\frac{k(n-1)+n}{k(n-1)}Q$, и поэтому КПД цикла $\eta=\frac{A}{Q_H}=\frac{n-1}{k(n-1)+n}=\frac{3}{14}\approx 0{,}214$.

ОТВЕТ: $\eta=\frac{n-1}{k(n-1)+n}=\frac{3}{14}\approx 0{,}214$.

Задание 3.

Вопрос: Как вычисляется потенциальная энергия электростатического взаимодействия системы точечных зарядов? Найдите максимальную кинетическую энергию каждого из двух тел одинаковой массы, с одинаковым зарядом q, отпущенных без начальной скорости с расстояния l в пустом пространстве? Электрическая постоянная равна ε_0.

Задача: Три одинаковых небольших тела массой m с зарядом q каждое удерживают на горизонтальной плоскости в вершинах равностороннего треугольника со стороной a. Какое расстояние s пройдет каждое из тел, если их отпустить? Какую максимальную скорость u приобретут тела в процессе движения? Коэффициент трения тел о плоскость равен μ. Электрическая постоянная равна ε_0.

Ответ на вопрос: Потенциальная энергия электростатического взаимодействия системы точечных зарядов вычисляется как сумма энергий попарных взаимодействий. Для каждой пары зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии r_{12}, энергия взаимодействия $U_{12}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$.

Два одинаковых тела в предложенном примере будут разгоняться симметрично, и одинаковая максимальная кинетическая энергия каждого из них достигается при удалении на очень большое расстояние (энергия взаимодействия практически рана нулю). Если пренебречь излучением, то максимальная кинетическая энергия каждого из тел равна половине начальной энергии взаимодействия, то есть $E_K^{(\max)}=\frac{q_1q_2}{8\pi\varepsilon_0 l}$.

Решение задачи: Благодаря симметрии системы все три тела пройдут одинаковое расстояние. К моменту остановки работа сил трения будет равна изменению потенциальной энергии взаимодействия тел. Три тела образуют три пары, а расстояние между телами в результате смещения на s увеличится от a до $a+s\sqrt{3}$ (радиус описанной около треугольника со стороной a окружности равен $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$, а тела смещаются в точности по радиусам этой окружности, то есть $\frac{a}{\sqrt{3}}+s=R'=\frac{a'}{\sqrt{3}}\Rightarrow a'=a+s\sqrt{3}$). Сила трения скольжения на горизонтальной плоскости $F_{тр}=\mu mg$, поэтому $3\mu mg\cdot s=3\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+s\sqrt{3}}\right)$. Из этого соотношения следует, что $s = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu mga} - \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Ответ имеет смысл, если $\mu < \dfrac{\sqrt{3}\, q^2}{4\pi\varepsilon_0 mga^2}$ (в противном случае трение не позволит телам сдвинуться с места). Для смещений $x < s$ кинетическая энергия тел может быть найдена из закона изменения энергии: $\dfrac{3mv^2}{2} == 3\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a + x\sqrt{3}}\right) - 3\mu mg \cdot x$. Выразим отсюда кинетическую энергию одного тела через величину $z \equiv (a + x\sqrt{3})\sqrt{\dfrac{4\pi\varepsilon_0 \mu mg}{\sqrt{3}\, q^2}}$. Это выражение имеет вид $\dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} + \mu mg\dfrac{a}{\sqrt{3}} - \sqrt{\dfrac{q^2 \mu mg}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{3}}}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$. Из очевидного неравенства $\dfrac{(z-1)^2}{z} \geq 0$ следует, что при любом $z \geq 0$ справедливо неравенство $z + \dfrac{1}{z} \geq 2$, причем равенство (то есть минимальное значение этого выражения) достигается при $z = 1$. При этом значении выражение для кинетической энергии сворачивается в полный квадрат. Значит, максимум скорости определяется формулой $u = \sqrt{\dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 am}} - \sqrt{\dfrac{2\mu ga}{\sqrt{3}}}$. Этот ответ имеет смысл при том же требовании к μ.

ОТВЕТ: $s = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu mga} - \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $u = \sqrt{\dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 am}} - \sqrt{\dfrac{2\mu ga}{\sqrt{3}}}$ при $\mu < \dfrac{\sqrt{3}\, q^2}{4\pi\varepsilon_0 mga^2}$; при большем значении коэффициента трения $s = 0$ и $u = 0$.

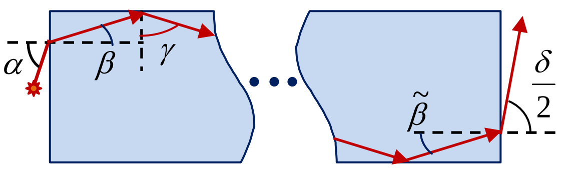
Задание 4.

Вопрос: Опишите явление полного внутреннего отражения.

Задача: Точечный источник света расположен перед торцом длинного стеклянного цилиндрического световода с показателем преломления *n*. Источник расположен на оси цилиндра. Чему равен угол δ между крайними лучами конического светового пучка, выходящего из противоположного торца световода?

Ответ на вопрос: Явление полного внутреннего отражения состоит в том, что при падении на границу раздела двух сред из оптически более плотной 1 в оптически менее плотную 2 с углами падения $\alpha \geq \alpha_0 = \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ преломленный луч отсутствует, и энергия падающего луча в отсутствие поглощения полностью переходит в энергию отраженного луча. Здесь $n \equiv \dfrac{n_1}{n_2}$ – относительный показатель преломления сред. Угол $\alpha_0 = \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ называется углом полного внутреннего отражения. Можно обратить внимание, что в такой ситуации закон преломления света предсказывает для синуса угла преломления невозможное значение $\sin(\beta) \geq 1$.

Решение задачи: Поскольку источник «точечный» (то есть его размеры много меньше диаметра световода) и расположен вблизи торца, то максимальный угол падения лучей от него на этот торец близок к 90°. Поскольку источник расположен на оси цилиндра, пучок лучей в световоде



распространяется, оставаясь симметричным относительно оси, и поэтому максимальный угол преломления при выходе из «дальнего» торца равен $\delta/2$. Согласно закону преломления, максимальный угол преломления на «ближнем» торце световода равен

$\beta_{\max} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\sin(\alpha_{\max})\right) \approx \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. Минимальный угол падения на боковую поверхность $\gamma_{\min} \approx \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. Здесь могут быть две ситуации в зависимости от соотношения этого угла с углом полного внутреннего отражения $\gamma_0 = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. Если $\gamma_{\min} \geq \gamma_0$ (это соответствует тому, что $\sin(\gamma_{\min}) \approx \sqrt{1-\frac{1}{n^2}} \geq \frac{1}{n}$, то есть $n \geq \sqrt{2}$), то все лучи, попавшие в световод, испытывают полное внутреннее отражение на боковых поверхностях и доходят до дальнего торца ($\tilde{\beta}_{\max} = \beta_{\max}$). Поэтому $\frac{\delta}{2} = \arcsin[n\sin(\beta_{\max})] \approx \alpha_{\max}$. Значит, в этом случае угол раствора пучка близок к 180°. Если же $\gamma_{\min} < \gamma_0$ ($n < \sqrt{2}$), то в распространяться по «длинному» световоду с многократным отражением от боковой поверхности смогу только лучи с $\gamma \geq \gamma_0 = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. В этом случае $\tilde{\beta}_{\max} = \frac{\pi}{2} - \gamma_0$, и $\frac{\delta}{2} = \arcsin[n\sin(\tilde{\beta}_{\max})] = \arcsin(\sqrt{n^2-1})$. Таким образом, в этом случае $\delta = 2\arcsin(\sqrt{n^2-1})$.

ОТВЕТ: $\delta = 2\arcsin(\sqrt{n^2-1})$ при $n < \sqrt{2}$, и δ близок к 180° при $n \geq \sqrt{2}$ (засчитывается также ответ, что при $n \geq \sqrt{2}$ δ равен удвоенному максимальному углу падения лучей от источника на торец световода).