Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2019/2020 учебного года для 5–6 класса

1. У Пети есть 10 конфет и еще половина количества конфет, которые есть у Миши. А у Миши 15 конфет и еще 75% количества конфет, которые есть у Пети. Найдите общее количество конфет у Миши и Пети.

Ответ: 64.

Решение: Пусть у Пети x конфет, у Миши – y. Тогда $\begin{cases} x = 10 + \frac{y}{2} \\ y = 15 + \frac{3x}{4} \end{cases}$. Подставим y из второго уравнения в первое: $x = \frac{35}{2} + \frac{3x}{8}$. Решив уравнение, получим x=28, y=36.

2. Из пункта А в пункт В выехали велосипедист и мотоциклист. Мотоциклист прибыл в пункт В, сразу же развернулся и отправился обратно в пункт А. В этот момент велосипедист уже проехал 10 км. Когда велосипедист проехал еще 2км, он встретил возвращающегося мотоциклиста. Найдите расстояние между пунктами А и В.

Ответ: AB=15.

Решение: Обозначим через r отношение скорости мотоциклиста к скорости велосипедиста. Тогда, с одной стороны $r = \frac{AB}{10}$, а с другой стороны $r = \frac{AB-12}{2}$. Последнее равенство следует из того, что к моменту встречи велосипедист проехал 12 км, следовательно, мотоциклист – оставшееся расстояние. Решая получившееся уравнение, находим AB=15.

3. Найдите последнюю цифру числа $202^{303^{404}}$.

Ответ:2.

Решение: При возведении в степень числа, оканчивающегося на 2, последняя цифра повторяется с периодом четыре: 2, 4, 8, 6, 2, 4, … Заметим, что 3 в четной степени дает остаток 1 при делении на четыре, поэтому последняя цифра будет 2.

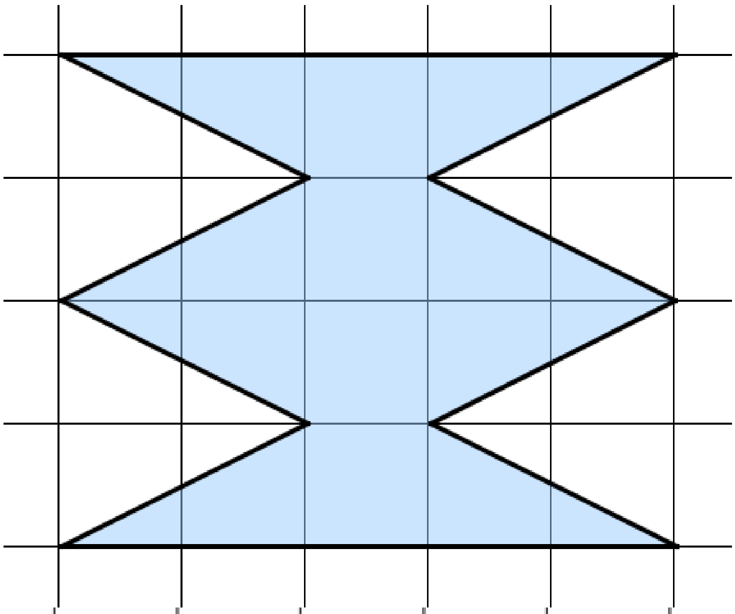
4. Сравните числа $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ и $2+\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}$.

Ответ: Числа равны.

Решение: $3+2\sqrt{2} = 1+2\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(1+\sqrt{2}\right)^2$, аналогично $3-2\sqrt{2} = \left(1-\sqrt{2}\right)^2$.

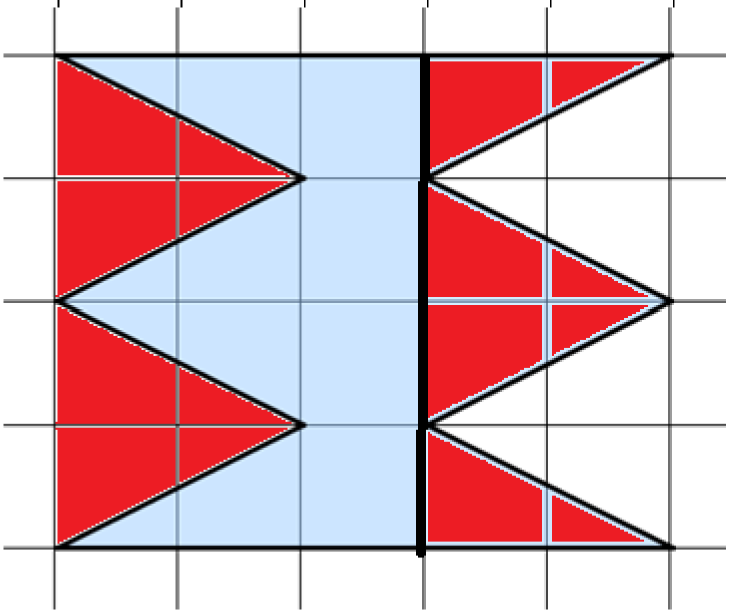
При извлечении корня (учитывая, что $1-\sqrt{2}<0$) получим $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}} = 2+\sqrt{2}-1 = 1+\sqrt{2}$.

5. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке. Площадь каждого квадрата сетки равна 1 см^2.



Ответ: 12 см^2.

Решение: Отрежем «зубцы», отмеченные красным и вставим в соответствующие выемки слева. Получится прямоугольник со сторонами 3 и 4.



6. Найдите количество натуральных чисел, кратных 3, не кратных 5 и принадлежащих отрезку $[1200; 2020]$.

Ответ: 219.

Решение. Среди отстатков от деления на 15 ровно четыре удовлетворяют условию: 3, 6, 9, 12. Значит на каждом интервале длины 15 ровно 4 таких числа. На отрезке умещается 54 таких интервала и еще остаются числа от 2010 до 2020 включительно, среди них три таких числа: 2013, 2016 и 2019.

7. Можно ли так расставить знаки «$+$» и «$-$» на месте звездочек, так, чтобы получилось верное равенство: $* \, 1^2 * 2^2 * \ldots * 2020^2 = 2020$?

Ответ: Да, можно.

Решение: Заметим, что для произвольного n $n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+\ (n+3)^2=4$. Разобьем все числа от 1 до 2020 на 505 четверок и расставим в каждой знаки $+\ -\ -\ +$. Получим 505*4=2020.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2019/2020 учебного года для 7–8 класса

1. Из пункта А в пункт В выехали велосипедист и мотоциклист. Мотоциклист прибыл в пункт В, сразу же развернулся и отправился обратно в пункт А. В этот момент велосипедист уже проехал 10 км. Когда велосипедист проехал еще 2км, он встретил возвращающегося мотоциклиста. Найдите расстояние между пунктами А и В.

Ответ: AB=15.

Решение: См. решения задач 5-6 классов.

2. Найдите последнюю цифру числа $202^{303^{404}}$.

Ответ:2.

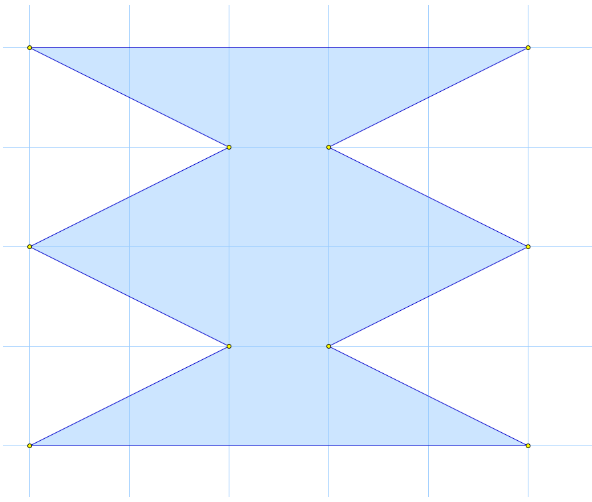
Решение: См. решения задач 5-6 классов.

3. Сравните числа $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ и $2+\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}$.

Ответ: Они равны.

Решение: См. решения задач 5-6 классов.

4. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке. Площадь каждого квадрата сетки равна 1 см^2.
Ответ: 12 см^2.
Решение: См. решения задач 5-6 классов.



5. Найдите количество натуральных чисел, кратных 3, не кратных 5 и принадлежащих отрезку $[1200; 2020]$.

Ответ: 219.

Решение: См. решения задач 5-6 классов.

6. Можно ли так расставить знаки «+» и «−» на месте звездочек, так, чтобы получилось верное равенство: $* 1^2 * 2^2 * \ldots * 2020^2 = 2020$?

Ответ: Да, можно.

Решение: См. решения задач 5-6 классов.

7. Найдите наименьшее возможное значение $x-y$ при условии $x^2-2xy-x+y^2+y\leq 0$.

Ответ: 0.

Решение: $x^2-2xy-x+y^2+y=(x-y)^2-(x-y)$. Обозначим $x-y=t$, тогда $t(t-1)<0$ при $t\in[0;1]$. Значит наименьшее значение равно -1.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2019/2020 учебного года для 9 класса

1. Найдите последнюю цифру числа $202^{303^{404}}$.

Ответ: 2.

Решение: См. решения задач 5-6 классов.

2. Сравните числа $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ и $2+\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}$.

Ответ: Они равны.

Решение: См. решения задач 5-6 классов.

3. В трапеции *ABCD* основание *AD* в три раза больше основания *BC*. Через точку *A* провели прямую, делящую площадь трапеции пополам. В каком отношении она делит сторону *CD*?

Ответ: 1:2

Решение: Площадь треугольника ACD составляет ¾ площади трапеции, значит прямая делит его площадь в отношении 1:2 считая от точки C. Значит отрезок CD она делит в том же отношении.

4. Найдите количество натуральных чисел, кратных 3, не кратных 5 и принадлежащих отрезку $[1200; 2020]$.

Ответ: 219.

Решение: См. решения задач 5-6 классов.

5. Можно ли так расставить знаки «$+$» и «$-$» на месте звездочек, так, чтобы получилось верное равенство: $* 1^2 * 2^2 * \ldots * 2020^2 = 2020$?

Ответ: Да, можно.

Решение: См. решения задач 5-6 классов.

6. Найдите наименьшее возможное значение $x-y$ при условии $x^2-2xy-x+y^2+y\leq 0$.

Ответ: 0.

Решение: См. решения задач 7-8 классов.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^4+ax^2+a^2-4=0$ имеет ровно 2 действительных корня.

Ответ: $a\in[-2;2]\cup\left\{-\frac{4}{\sqrt{3}}\right\}$.

Решение. $x^4 + ax^2 + a^2 - 4 = 0$ имеет ровно 2 действительных корня тогда и только тогда, когда уравнение $t^2 + at + a^2 - 4 = 0$ имеет либо ровно один (кратный) положительный корень, либо один положительный и один отрицательный.

В первом случае $D = 16 - 3a^2 = 0$ при $a = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$. Но положительный корень будет только при $a = -\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Во втором случае из Т. Виета $a^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow a \in [-2; 2]$.

Ответы к варианту Регионы-4

5-6 классы

1. 34 конфеты.

2. 180 км.

3. Посл.цифра= 4.

4. Числа равны

5. 15 см^2.

6. 291

7. Да, можно.

7-8

1. 180 км.

2. Посл. цифра = 4.

3. Числа равны.

4. 15 см^2.

5. 291

6. Да, можно.

7. 0.

9

1. Посл. цифра = 4.

2. Числа равны.

3. 1:3

4. 291

5. Да, можно.

6. 0.

7. $[-3; 3] \cup \{2\sqrt{3}\}$.

Ответы к варианту Регионы-5

5-6

1. 58 значков.

2. 60 км.

3. Цифра 3.

4. Числа равны

5. 12 см^2.

6. 136 чисел.

7. Да, можно

7-8

1. 60 км.

2. Цифра 3.

3. Числа равны

4. 12 см^2.

5. 136 чисел.

6. Да, можно

7. 0.

9

1. Цифра 3.

2. Числа равны

3. 3:5.

4. 136 чисел.

5. Да, можно

6. 0.

7. $[-4; 4] \cup \left\{\frac{8}{\sqrt{3}}\right\}$