Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2019/2020 учебного года для 5–6 класса

1. Аня и Таня – сестры, им вместе 28 лет. Сейчас Ане вдвое больше лет, чем было Тане в момент, когда Ане было столько лет, сколько Тане сейчас. Найдите возраст старшей из сестер.

Ответ: 16 лет.

Решение: Обозначим разницу возрастов девочек за P. Ане было столько лет, сколько Тане сейчас P лет назад. Тогда Тане было на P лет меньше, чем сейчас и на $2P$ лет меньше, чем Ане сейчас. Таким образом, $2P$ составляет половину текущего возраста Ани, т.е. возраст Ани равен $4P$, а Тани – $3P$. Суммарный возраст девочек равен $7P$, следовательно, $P = 4$, т.е. Ане 16 лет.

2. Часы со стрелками показывают полдень. Сколько минут пройдет до ближайшего момента времени, когда прямая, делящая пополам угол между часовой и минутной стрелкой, пройдет через отметку на циферблате, соответствующую 43 минутам?

Ответ: 24 мин.

Решение: Минутная стрелка движется со скоростью 6°/мин., а часовая – $½^{\circ}$/мин, поэтому биссектриса угла между ними движется со скоростью $13/4^{\circ}$/мин. Заметим, что в условии задачи указана прямая, а не луч, т.е. если она проходит через отметку 43 мин., то и через диаметрально противоположную отметку 13 мин. Очевидно, раньше прямая достигнет отметки 13 мин, которая отстоит от начального положения стрелок на $13/60*360 = 78^{\circ}$. Значит прямая достигнет ее за 24 мин.

3. В треугольнике одна из сторон равна 12,67 см, другая 0,55 см, найдите длину третьей стороны, если известно, что она составляет целое число сантиметров.

Ответ: 13 см.

Решение: По неравенству треугольника сумма длин двух сторон больше длины третьей, следовательно, она должна быть не больше 12,67 + 0,55 = 13,22см. С другой стороны, если она будет 12 см или меньше, то, прибавив 0,55, получим меньше, чем 12,67 см.

4. На первом занятии кружка по программированию учитель спросил участников, какими языками программирования они владеют. Четверо сразу признались, что не знают ни одного языка программирования. Остальные сказали, что знают или Python или Java или оба этих языка сразу. Доля знающих Python среди тех, кто владеет хотя бы одним языком, составила 60%, причем 1/6 из знающих Python знает также и Java. А доля владеющих языком Java среди всех участников кружка составила 5/12. Сколько всего участников кружка?

Ответ: 24

Решение: Среди знающих языки 60% / 6 = 10% знают оба языка, значит только Python знают 50%, поэтому Java знают 50%. Это 12/5 от общего количества участников, значит их 50%*12/5 = 120%. Лишние 20% составляют 4 ученика, не владеющие ни одним языком, значит 120% соответствует 4/20*120=24 участникам.

5. Коля решил проверить свое знание четырех арифметических действий. Он взял два натуральных числа и нашел их сумму. Потом нашел разность этих чисел – первое число минус второе. Потом нашел произведение этих же чисел. Потом частное от деления первого числа на второе. Сложив все 4 полученных результата Коля получил 153. Найдите два числа, над которыми производились действия.

Ответ: $a = 34,\ b = 2$.

Решение: Обозначим числа a и b, и запишем условие задачи: $(a + b) + (a - b) + \ ab + \frac{a}{b} = 153$. Заметим, что a кратно b, поскольку результат деления – целое число. Обозначим $a = k \cdot b$. После преобразований получаем: $k \cdot (b + 1)^2 = 153 = 3 \cdot 3 \cdot 17$. Значит $k = 17, b = 2, a = 34$.

6. Есть 7 красных, 6 белых и 8 желтых шаров, все шары пронумерованы различными числами. Сколькими способами можно выбрать 3 шара, так, чтобы не все были одного цвета и не все разных цветов? Способы, отличающиеся только порядком шаров, считаем одинаковыми.

Ответ: 883 способа.

Решение: Выбрать 3 шара из 21 можно $C_{21}^3 = 1330$ способами. Выбрать шары одного цвета можно $C_7^3 + C_6^3 + C_8^3 = 111$ способами, а три шара разных цветов можно выбрать $7 \cdot 6 \cdot 8 = 336$ способами. В итоге получаем $1330 - 111 - 336 = 883$ способа.

7. Дан набор из 100 гирь, самая легкая весит 3 грамма, каждая следующая имеет вес на 1 грамм меньший, чем удвоенный вес предыдущей гири. Найдите массу самой тяжелой гири.

Ответ: $2^{100} + 1$.

Решение: Рассмотрим несколько первых членов последовательности весов: 3,5,9,17,… Заметим, что каждый член равен степени двойки, увеличенной на единицу: $3 = 2 + 1, 5 = 2^2 + 1, 9 = 2^3 + 1$, … Значит на 100-м месте будет стоять $2^{100} + 1$. Доказать это строго можно с помощью метода математической индукции.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2019/2020 учебного года для 7–8 класса

1. Часы со стрелками показывают полдень. Сколько минут пройдет до ближайшего момента времени, когда прямая, делящая пополам угол между часовой и минутной стрелкой, пройдет через отметку на циферблате, соответствующую 43 минутам?

Ответ: 24 мин.

Решение: см. задачи для 5-6 классов.

2. На первом занятии кружка по программированию учитель спросил участников, какими языками программирования они владеют. Четверо сразу признались, что никакими языками не владеют. Остальные сказали, что знают или Python или Java или оба этих языка сразу. Доля знающих Python среди тех, кто владеет хотя бы одним языком, составила 60%, причем 1/6 из знающих Python знает также и Java. А доля владеющих языком Java среди всех участников кружка составила 5/12. Сколько всего участников кружка?

Ответ: 24

Решение: см. задачи для 5-6 классов

3. Коля решил проверить свое знание четырех арифметических действий. Он взял два натуральных числа и нашел их сумму. Потом нашел разность этих чисел – первое число минус второе. Потом нашел произведение этих же чисел. Потом частное от деления первого числа на второе. Сложив все 4 полученных результата Коля получил 153. Найдите два числа, над которыми производились действия.

Ответ: $a = 34,\ b = 2$.

Решение: см. задачи для 5-6 классов.

4. В трапеции *ABCD* с основаниями *BC* и *AD*, угол *ADC* равен 67,5°. Найдите углы трапеции, если известно, что биссектриса угла *CAD* пересекает отрезок *CD* в его середине, а основание ВС равно стороне АВ.

Ответ: $90^\circ; 90^\circ;\ 112{,}5^\circ; 67{,}5^\circ$.

Решение: Из условия следует, что треугольник $ACD -$ равнобедреный, $AC = AD = 4$. Следовательно, $\angle CAD = 45^\circ$. Треугольник ABC – равнобедренный и прямоугольный.

5. Есть 7 красных, 6 белых, 8 желтых и 5 черных шаров, все шары пронумерованы различными числами. Сколькими способами можно выбрать 4 шара, так, чтобы не все были одного цвета и не все разных цветов? Способы, отличающиеся только порядком шаров, считаем одинаковыми.

Ответ: 13145 способов.

Решение: см. задачи для 5-6 классов.

6. Дан набор из 30 гирь, самая легкая весит 3 грамма, каждая следующая имеет вес на 1 грамм меньший, чем удвоенный вес предыдущей гири. Найдите общий вес гирь.

Ответ: $2^{31} + 28$.

Решение: Рассмотрим несколько первых членов последовательности весов: 3,5,9,17,… Заметим, что каждый член равен степени двойки, увеличенной на единицу: $3 = 2 + 1, 5 = 2^2 + 1, 9 = 2^3 + 1$, … Значит общий вес гирь равен сумме $2 + 1 + 2^2 + 1 + \cdots + 2^{30} + 1 = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{30} + 30 = 2^{31} - 2 + 30 = 2^{31} + 28$.

7. Функция $f(x)$ определена и положительна при всех $\mathrm{x} > 0$. Известно, что $f(1) + f(2) = 20$ и $f(a + b) = f(a) + f(b) + 2\sqrt{f(a)f(b)}$ при всех $\mathrm{a},\ \mathrm{b} > 0$. Найдите $f(2020)$.

Ответ: $f(2020) = 20402000$.

Решение: Подставив единицы вместо *a* и *b*, получим $f(2) = f(1) + f(1) + 2\sqrt{f(1)f(1)} = 3f(1)$. Значит $f(1) + 3f(1) = 20, \text{поэтому } f(1) = 5$. Извлекая квадратный корень и пользуясь тем, что $f(x)$ положительна, получим $\sqrt{f(a + b)} = \sqrt{f(a)} + \sqrt{f(b)}$. Подставив b=1, получим $\sqrt{f(a + 1)} = \sqrt{f(a)} + \sqrt{f(1)} = \sqrt{f(a)} + \sqrt{5}$. Применяя формулу для a=1,2,…,2019, получим $\sqrt{f(2020)} = 2020\sqrt{5}$. Отсюда $f(2020) = \left(2020\sqrt{5}\right)^2 = 20402000$.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2019/2020 учебного года для 9 класса

1. На первом занятии кружка по программированию учитель спросил участников, какими языками программирования они владеют. Четверо сразу признались, что никакими языками не владеют. Остальные сказали, что знают или Python или Java или оба этих языка сразу. Доля знающих Python среди тех, кто владеет хотя бы одним языком, составила 60%, причем 1/6 из знающих Python знает также и Java. А доля владеющих языком Java среди всех участников кружка составила 5/12. Сколько всего участников кружка?

Ответ: 24

Решение: см. задачи для 5-6 классов

2. Коля решил проверить свое знание четырех арифметических действий. Он взял два натуральных числа и нашел их сумму. Потом нашел разность этих чисел – первое число минус второе. Потом нашел произведение этих же чисел. Потом частное от деления первого числа на второе. Сложив все 4 полученных результата Коля получил 153. Найдите два числа, над которыми производились действия.

Ответ: $a = 34,\ b = 2$.

Решение: см. задачи для 5-6 классов.

3. Есть 7 красных, 6 белых, 8 желтых и 5 черных шаров, все шары пронумерованы различными числами. Сколькими способами можно выбрать 4 шара, так, чтобы не все были одного цвета и не все разных цветов? Способы, отличающиеся только порядком шаров, считаем одинаковыми.

Ответ: 13145 способов.

Решение: Всего 26 шаров, из них выбрать 4 шара можно C_{26}^4 способами. Шары различного цвета можно выбрать $7*6*8*5=\frac{8!}{4!}$ способами, все шары одного цвета можно выбрать $C_7^4+C_6^4+C_8^4+C_5^4$ способами. Итого $C_{26}^4-\frac{8!}{4!}$=13145.

4. Дан набор из *n* гирь, самая легкая весит 3 грамма, каждая следующая имеет вес на 1 грамм меньший, чем удвоенный вес предыдущей гири. Найдите все $n, 9<n<16$, для которых все гири можно расположить на двух чашах весов так, чтобы весы пришли в равновесие.

Ответ:10 и 14.

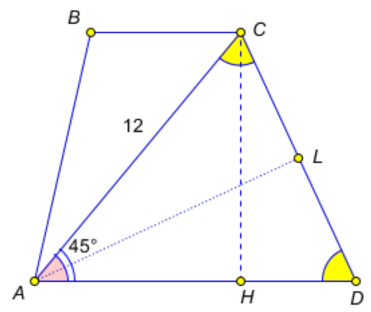
Решение: Несложно показать, что вес *k*-й гири равен 2^k+1.

Суммарный вес первых (n-1) гирь равен $(2^1+1)+(2^2+1)+\cdots+(2^{n-1}+1)=2^n+n-3$, что на $n-4$ превосходит вес последней гири. Допустим, что мы привели весы в равновесие, а потом оставили самую тяжелую гирю на одной чаше, а остальные – перенесли на другую. Для этого надо перенести вес, равный $\frac{n-4}{2}$. Очевидно, достаточно рассматривать только четные значения *n*. При *n*=10 и 14 есть гири веса 3 и 5, которые можно перенести. Для *n*=12 гири веса 4 нет и этот вес невозможно получить комбинацией других гирь.

5. В трапеции *ABCD* с основаниями *BC* = *4* и *AD* = *12*, угол *ADC* равен 67,5°. Найдите площадь трапеции, если известно, что биссектриса угла *CAD* делит отрезок *CD* пополам.

Ответ: $48\sqrt{2}$

Решение: Из условия следует, что треугольник $ACD -$ равнобедреный, $AC = AD = 12$. Следовательно, $\angle CAD = 45°$, опустим высоту $CH = 6\sqrt{2}$. Следовательно, площадь равна $\frac{1}{2}(4+12)\cdot 6\sqrt{2} = 48\sqrt{2}$



6. Функция $f(x)$ определена и положительна при всех $\mathrm{x} > 0$. Известно, что $f(1) + f(2) = 20$ и $f(a+b) = f(a) + f(b) + 2\sqrt{f(a)f(b)}$ при всех a, b > 0. Найдите $f(2020)$.

Ответ: $f(2020) = 16321600$.

Решение: Подставив единицы вместо *a* и *b*, получим $f(2) = f(1) + f(1) + 2\sqrt{f(1)f(1)} = 4f(1)$. Значит $f(1) + 4f(1) = 20,$ поэтому $f(1) = 4$. Извлекая квадратный корень и пользуясь тем, что $f(x)$ положительна, получим $\sqrt{f(a+b)} = \sqrt{f(a)} + \sqrt{f(b)}$. Подставив *b*=1, получим $\sqrt{f(a+1)} = \sqrt{f(a)} + \sqrt{f(1)} = \sqrt{f(a)} + 2$. Применяя формулу для *a*=1,2,…,2019, получим $\sqrt{f(2020)} = 4040$. Отсюда $f(2020) = (4040)^2 = 16321600$.

7. Известно, что $a, b, c -$ три попарно различных действительных числа. Найдите наибольшее возможное при этом условии значение x, являющегося корнем уравнения

$$a^2(x-b)(b-c)(c-x) + b^2(a-x)(x-c)(c-a) + c^2(a-b)(b-x)(x-a) = 100(a-b)(b-c)(c-a).$$

Ответ: 10.

Решение: Разделим уравнение на $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$. $\frac{a^2((x-b)(b-c)(c-x))}{(a-b)(b-c)(c-a)} + \frac{b^2((a-x)(x-c)(c-a))}{(a-b)(b-c)(c-a)} + \frac{c^2((a-b)(b-x)(x-a))}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 100$. В левой части стоит квадратичная функция, которая принимает значения a^2, b^2, c^2 при $x = a, b, c$, соответственно. Значит, эта функция совпадает с $f(x) = x^2$, т.к. через три точки можно провести только одну параболу. Уравнение сводится к $x^2 = 100$. Больший корень равен 10.