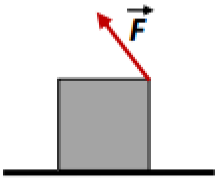
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ.
2020/21 учебный год, ЗАДАНИЕ ЗАОЧНОГО ТУРА. 10 и 11 классы.

Часть I . Тестовое задание. Пример варианта.

Вопрос 1 (8 баллов):
Однородный куб массой 400 г покоится на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между кубиком и поверхностью равен 0,18. К середине одного из его верхних ребер прикладывают силу, линия действия которой лежит в одной вертикальной плоскости с центром куба (см. рисунок). При какой минимальной величине этой силы возможно, что куб начнет вращаться вокруг оси, проходящей через его нижнее ребро, причем эта ось не будет перемещаться? Ответ запишите в ньютонах, с точностью до сотых, без указания единиц измерения. Ускорение свободного падения считать равным 9,80 м/с^2.

ОТВЕТ: 1,59.



Комментарий: Пусть α – угол наклона линии действия силы $\vec{F}$ к горизонтали. Тогда требование отсутствия скольжения куба означает, что сила трения $F_{mp} = F\cos(\alpha)$, а сила нормальной реакции поверхности $N = mg - F\sin(\alpha)$, и при этом $F_{mp} \le \mu N$. Значит, $\dfrac{mg}{F} \ge \dfrac{\cos(\alpha)+\mu\sin(\alpha)}{\mu}$. С другой стороны, в момент начала отрыва куба от поверхности при повороте вокруг ребра, точка приложения силы нормальной реакции смещается на это ребро, и для переворота момент силы $\vec{F}$ относительно ребра должен быть не меньше момента силы тяжести: $F\cdot a\sqrt{2}\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) \ge mg\cdot\dfrac{a}{2}$, и поэтому $\dfrac{mg}{F} \le 2[\cos(\alpha)+\sin(\alpha)]$.

Как видно, при каждом значении α величина $\dfrac{mg}{F}$ должна принадлежать заданному этими неравенствами интервалу значений, а минимальное возможное значение F соответствует максимальному значению $\dfrac{mg}{F}$, достигаемому для $\alpha > 45°$ при совпадении границ интервалов, то есть при значении угла, определяемого из уравнения $2[\cos(\alpha)+\sin(\alpha)] = \dfrac{\cos(\alpha)+\mu\sin(\alpha)}{\mu}$. Значит, $tg(\alpha) = \dfrac{1-2\mu}{\mu}$ (отметим, что во всех вариантах было $\mu < \dfrac{1}{3}$, так что соответствующее $\alpha > 45°$). Подставляя это значение угла в любое из «пограничных» выражений для силы, находим, что (при $\mu < \dfrac{1}{3}$) $F_{\min} = \dfrac{\sqrt{1-4\mu+5\mu^2}}{2(1-\mu)}mg$. При $\mu \ge \dfrac{1}{3}$ ответ был бы другим: $F_{\min} = \dfrac{mg}{2\sqrt{2}}$.

Вопрос 2 (8 баллов):
Над двумя молями одноатомного идеального газа производят последовательно серию из 12 процессов, каждый из которых состоит из изохорного нагревания и изобарного охлаждения. При этом в первом изохорном процессе температура газа увеличивается на 1,2 К, во втором

– на 1,3 К, в третьем – на 1,4 К и так далее. В первом изобарном процессе температура уменьшается на 0,5 К, во втором – на 0,6 К, в третьем – на 0,7 К и так далее. Найдите количество теплоты, сообщенное газу во всех 12 процессах. Ответ запишите в джоулях, с точностью до целого значения, без указания единиц измерения. Универсальная газовая постоянная примерно равна 8,31 Дж/(моль·К).

ОТВЕТ: 0.

Комментарий: Ясно, что в процессах изохорного нагревания газ получает некоторое количество теплоты Q_+, а в процессах изобарного охлаждения – отдает Q_-. Нам известны молярные теплоемкости одноатомного идеального газа в таких процессах, поэтому $Q_+ = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_V$ и $Q_- = \frac{5}{2}\nu R\Delta T_p$. Суммы изменений температур, как видно, являются суммами арифметических прогрессий: $\Delta T_V = (1{,}2 + 1{,}3 + \ldots + 2{,}3)\text{К} = +21\text{К}$ и $\Delta T_p = -(0{,}5 + 0{,}6 + \ldots + 1{,}6)\text{К} = -12{,}6\text{К}$. Нетрудно заметить, что полное количество теплоты, которым газ обменялся с внешними телами $Q = Q_+ + Q_- = \frac{\nu R}{2}(3\Delta T_V + 5\Delta T_p) = 0$.

Вопрос 3 (9 баллов):

В электролитическую ванну с раствором серной кислоты погружают на одинаковую глубину h два длинных и тонких вертикальных стержня на небольшом расстоянии друг от друга (диаметр стержней и расстояние между ними намного меньше h). К стержням подключили источник постоянного напряжения, и за 1 минуту в ванне выделилось 21 мг водорода. Затем стержни погрузили в ванну на глубину $2h$, и теперь при подключении того же источника за одну минуту выделилось 31 мг водорода. Какая масса водорода выделится за минуту в аналогичном опыте, если стержни погрузить на глубину $4h$? Сопротивление стержней и внутреннее сопротивление источника намного меньше сопротивления электролита даже при максимальном погружении. Ответ запишите в мг, с точностью до целого значения, без указания единиц измерения.

ОТВЕТ: 51.

Комментарий: Так как стержни «длинные и тонкие», и к тому же их сопротивление намного меньше сопротивления электролита, то на участках стержней, удаленных от их концов на некоторое расстояние l, намного большее их толщины, но меньшее h, с единицы длины стержня стекает (для стержня, подключенного к положительному полюсу источника) некоторый постоянный ток. Ток, стекающий с участка этого стержня длины l, практически не зависит от глубины погружения. Потому полный ток, текущий от одного стержня к другому через электролит, является линейной функцией глубины погружения x: $I(x) = I_0 + \alpha \cdot x$. Согласно закону Фарадея для электролиза, масса выделившегося водорода пропорциональна протекшему заряду (на временах порядка минуты ток можно считать постоянным), и поэтому и масса линейно связана с глубиной погружения: $m(x) = m_0 + \beta \cdot x$. Значит, для первого опыта $m_1 = m_0 + \beta \cdot h$, а для второго $m_2 = m_0 + \beta \cdot 2h$. Из этих соотношений выражаем $\left\{\begin{matrix} \beta = (m_2 - m_1)/h \\ m_0 = 2m_1 - m_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m(x) = 2m_1 - m_2 + (m_2 - m_1)\frac{x}{h}$. Таким образом, $m(4h) = 3m_2 - 2m_1 = 51\text{мг}$.

Часть II. ***«ИСТОРИИ ФЕДОРА СИМЕОНОВИЧА КИВРИНА».***

ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ.

Внимание! *В задании было указано, что необходимо предоставлять* ***решение*** *каждой задачи части II. Поэтому в работах, в которых представлены* ***только ответы****, выставлялся* **1 балл** *за каждый правильный ответ, оценивание которого было предусмотрено критериями.*

1. («**Темные звезды**», 16 баллов) Однажды, в гостях у Генри Кавендиша, Федор Симеонович прочитал письмо Джона Митчела о «темных звездах» - так Митчел назвал объекты, свет от которых не может дойти до удаленного наблюдателя из-за гравитационного притяжения звезды (нужно отметить, что Митчел использовал закон тяготения Ньютона, механику Ньютона и корпускулярную оптику). Эта идея очень заинтересовала Федора Симеоновича.

1.1. Пользуясь теми же теориями, что и Дж.Митчел, ответьте на вопрос: каким должен быть радиус темной звезды с массой m, чтобы ее не было видно внешнему наблюдателю с расстояния, более чем вдвое превышающего ее радиус? Вычислите этот радиус для массы звезды, равной массе Солнца $m_S \approx 2\cdot 10^{30}$ кг. Скорость света считайте равной $c \approx 3\cdot 10^{8}$ м/с, гравитационная постоянная $G \approx 6{,}7\cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2).

Уже в XX веке он познакомился с решением Карла Шварцшильда в Общей Теории Относительности, описывающим «черные дыры» - объекты, окруженные «горизонтом» событий, из-под которого ничто не может выйти. Однажды коллеги – астрономы рассказали ему о наблюдении необычной звезды, которая вращалась вокруг некоторой точки по окружности радиусом 9 а.е. (1 а.е. – единица измерения расстояний, используемая в астрономии и примерно равная среднему радиусу орбиты Земли) с периодом 10 земных лет, но при этом второго объекта в этой системе не было видно.

1.2. Считая, что вторым объектом в этой системе является темная звезда или черная дыра, определите ее массу.

В другой раз он узнал о наблюдении еще одной «астрофизической черной дыры» (так в физике и астрономии называют реально существующие в космосе объекты, по наблюдаемым проявлениям похожие на шварцшильдовские черные дыры). Астрономам удалось увидеть, как две «блуждающие звезды» прошли мимо этого объекта. Скорость первой относительно объекта на большом расстоянии от него была на 25% больше, чем аналогичная скорость второй, но вектора скоростей обеих звезд в результате прохождения мимо объекта повернулись на один и тот же угол. Минимальное расстояние от траектории первой звезды до объекта было равно 24 а.е., а момент прохождения через точку наибольшего сближения с объектом для второй звезды не удалось зафиксировать из-за пылевого облака, закрывшего часть ее траектории.

1.3. Определите минимальное расстояние от траектории второй звезды до объекта.

Возможное решение:

1.1. В корпускулярной теории света, движение частиц которого подчиняется механике Ньютона, частичка массой δm, стартующая со скоростью c с поверхности сферически симметричной звезды радиуса R и массы m, будет иметь механическую энергию $\delta E = \delta m\cdot\left(\dfrac{c^2}{2} - \dfrac{Gm}{R}\right)$. Она не сможет удалиться далее расстояния $2R$ от центра звезды, если

$\delta E \le -\frac{Gm}{2R}\delta m$. Таким образом, радиус должен удовлетворять ограничению $R \le \frac{Gm}{c^2}$. Для $m = m_S \approx 2\cdot 10^{30}$ кг находим, что максимальный возможный радиус такой темной звезды $R_S = \frac{Gm_S}{c^2} \approx 1{,}5$ км. Ясно, что это значительно меньше радиуса Солнца.

1.2. Видно, что характерные скорости и ускорения движений объектов в этой двойной системе не отличаются радикально по порядку величины от тех, что мы наблюдаем у тел Солнечной Системы, поэтому с хорошей точностью можно использовать законы механики Ньютона. Пусть m – масса наблюдаемой звезды, m_X – масса невидимого компаньона. Если $r = 9$ а.е. – радиус круговой орбиты наблюдаемой звезды, то радиус орбиты невидимого компаньона $R = \frac{m}{m_X} r$, и расстояние между звездами $L = R + r = \frac{m_X + m}{m_X} r$. Уравнение для центростремительной компоненты ускорения наблюдаемой звезды дает: $\omega^2 r = \frac{Gm_X}{L^2} \Rightarrow \frac{m_X^3}{(m_X+m)^2} = \frac{\omega^2 r^3}{G}$. С учетом того, что для Земли на почти круговой орбите вокруг Солнца $\omega_E^2 a = \frac{Gm_S}{a^2} \Rightarrow \omega_E^2 a^3 = Gm_S$, где $a = 1$ а.е., а $\omega_E = \frac{2\pi}{T_E}$, $T_E = 1$ год, находим: $\frac{m_X^3}{(m_X+m)^2} = \left(\frac{r}{a}\right)^3 \left(\frac{T_E}{T}\right)^2 m_S = 7{,}29 m_S$. Как видно, данные астрономов не позволяют установить массу невидимого компаньона однозначно. Можно использовать косвенные соображения. Например, «практически круговые» орбиты чаще всего возникают в ситуации, когда одно из тел в образующейся системе намного массивнее остальных. Если считать, что $m << m_X$, то получается, что $m_X \approx 7{,}29 m_S \approx 14{,}6\cdot 10^{30}$ кг.

Но более правильно в такой ситуации (с «исследовательской» точки зрения) провести анализ возможных значений m_X. Во-первых, можно заметить, что $m_X^3 = 7{,}29 m_S (m_X + m)^2 \ge 7{,}29 m_S m_X^2 \Rightarrow m_X \ge 7{,}29 m_S$. Таким образом, масса невидимого компаньона не менее $7{,}29 m_S$. Во-вторых, масса невидимого компаньона однозначно определяется по массе видимой звезды из полученного уравнения. Например, при $m = m_S$ находим, что $m_X = 9 m_S$, при $m = 10 m_S$ – $m_X \approx 17{,}8 m_S$, при $m = 50 m_S$ – $m_X \approx 38{,}5 m_S$. Для очень больших $m >> 100 m_S$ масса m_X много меньше m и растет пропорционально $m^{2/3}$. В дополнение отметим, что в реальной ситуации масса видимой звезды с хорошей точностью может быть определена по *спектру* ее электромагнитного излучения – спектр очень чувствителен к физическим условиям в звездной фотосфере, которые зависят от массы и возраста звезды.

1.3. Из уравнения движения «блуждающей звезды» в поле тяготения массивного объекта $m\vec{a} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$ ясно, что траектория ее движения не зависит от массы звезды. С другой стороны, эта траектория определяется скоростью на бесконечности v_0, расстоянием наибольшего сближения r_m и величиной GM, характеризующей гравитационное поле. Поэтому угол поворота вектора скорости является однозначной функцией этих величин. Угол – величина безразмерная, а комбинация $GM\cdot(v_0)^x\cdot(r_m)^y$ имеет размерность м$^{3+x+y}$·с$^{-2-x}$. Нетрудно заметить, что единственная безразмерная комбинация ($x=-2, y=-1$) этих величин – это $\frac{GM}{r_m v_0^2}$. Значит, угол поворота вектора относительной скорости зависит от $\frac{GM}{r_m v_0^2}$, и одинаковый угол поворота для двух разных звезд в поле одного объекта возможен, если для их траекторий $r_{m1}v_1^2 = r_{m2}v_2^2$. Следовательно, $r_{m2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 r_{m1} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot 24a = 37{,}5a$. Итак, минимальное расстояние от траектории второй звезды до объекта равнялось 37,5 а.е..

ОТВЕТЫ: радиус указанной темной звезды должен удовлетворять требованию $R \le \frac{Gm}{c^2}$, и для массы, равной массе Солнца, численное значение максимального радиуса $R_S = \frac{Gm_S}{c^2} \approx 1{,}5$ км; масса невидимого компаньона в наблюдаемой двойной системе при с точностью лучше 10% $m_X \approx 15 \cdot 10^{30}$ кг; в общем случае - не менее $7{,}29m_S$, и однозначно определяется по массе видимой звезды m из уравнения $\frac{m_X^3}{(m_X+m)^2} = \left(\frac{r}{a}\right)^3 \left(\frac{T_E}{T}\right)^2 m_S = 7{,}29m_S$; минимальное расстояние от траектории второй звезды до объекта равнялось 37,5 а.е., или примерно 5,6 млрд.км.

Комментарий: Некоторые участники считали, что расстояние в вопросе 1.1 отсчитывалось от поверхности звезды. В этом случае при правильном решении получается, что $\delta m \cdot \left(\frac{c^2}{2} - \frac{Gm}{R}\right) \le -\frac{Gm}{3R}\delta m \Rightarrow R \le \frac{4Gm}{3c^2}$. Тогда $R_S = \frac{4Gm_S}{3c^2} \approx 2$ км. Такие решения тоже засчитывались как правильные. В части 1.3 ряд участников получили правильный ответ из <u>неправильных</u> уравнений (например, считая радиус кривизны траектории в перицентре равным расстоянию до невидимого объекта), или «в один шаг» из правильной, но «взятой в готовом виде» формулы (например, из выражения для угла поворота или эксцентриситета гиперболы через скорость на бесконечности и расстояние от невидимого объекта до перицентра). Решения первого типа считались неправильными, а решения второго типа – неполными (в зависимости от содержания решения за часть 1.3 выставлялось от 2 до 4 баллов), так как подобные решения сложно считать «полными и аргументированными». Аналогично и **в других задачах** использование «готовых формул» без решения, <u>независимо</u> от источника этих формул, не считалось решением.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	**макс.балл**
Получено требование $R \le \frac{Gm}{c^2}$	**2**
Найдено, что $R_S \approx 1{,}5$ км	**2**
Получено уравнение, выражающее массу невидимого компаньона только через массу видимой звезды и известные величины	**3**
Показано, что $m_X \ge 7{,}29m_S$, или получен ответ для $m << m_S$	**1**
Проведен анализ зависимости $m_X(m)$ или найдено правильно хотя бы одно значение m_X для m порядка или много больше m_S	**1**

Доказано (любым способом – анализ размерностей, соображения подобия, решение уравнений движения, через законы сохранения и т.д.), что угол поворота в поле массивного объекта можно выразить как функцию от $\frac{GM}{r_m v_0^2}$	**3**
Выведено соотношение $r_{m1}v_1^2 = r_{m2}v_2^2$	**2**
Получен правильный численный ответ в п.1.3 (37,5 а.е.)	**2**
ВСЕГО	**16**

2. («**Тайная субстанция**», 25 баллов) Один из подчиненных Федора Симеоновича – бакалавр черной магии Магнус Федорович Редькин – на протяжении многих лет пытался найти Белый Тезис, созданный Бен Бецалелем. И однажды Федору Симеоновичу удалось найти в манускрипте XVII века сведения об этом артефакте. Согласно манускрипту, Белый Тезис – это сгусток необычной субстанции массой 10 мин (что в метрической системе мер соответствует примерно 5 кг). В отношении свойств этой субстанции были сообщены следующие сведения (приведены в переводе на современный язык с современными единицами измерения):

- уравнение изотермы в координатах давление-объем $pV^2 = const$;
- уравнение изохоры в координатах давление-температура $\frac{p}{T_0 + T} = const$, где $T_0 = 173$К;
- при постоянных температуре и объеме давление субстанции растет пропорционально квадрату ее массы;
- уравнение адиабаты в координатах плотность-температура является линейной функцией $\rho(T) = \rho_1 + K(T - T_1)$, где коэффициент K не был сообщен.
- Внутренняя энергия массы m субстанции как функция объема и температуры определяется формулой $U(V,T) = \frac{\alpha m^2}{V} + \beta m T^2$, где $\alpha = 10^{-12}$ м^5/(кг·с^2), а $\beta = 10^{-10}$ м^2/(К^2·с^2).

Пользуясь этими сведениями, ответьте на следующие вопросы:

2.1. Чему равен коэффициент K?

2.2. Чему равен радиус Белого Тезиса и давление в его центре в отсутствие внешнего давления в невесомости (то есть когда давление внутри создается гравитационным притяжением самой субстанции) при температуре субстанции T_0. Считайте, что при этих условиях субстанция подчиняется закону всемирного тяготения Ньютона и ньютоновской механике.

Возможное решение:

2.1. Из информации об изотермическом и изохорном процессе ясно, что величина $\frac{p}{T_0 + T}$ для субстанции является функцией массы и объема, а pV^2 – функцией массы и температуры. Таким образом, давление должно выражаться формулой $p = \frac{f(m)}{V^2}(T_0 + T)$.

Тогда, с учетом третьего пункта $p = C\frac{m^2}{V^2}(T_0 + T)$, где $C = const$. Для согласования этой формулы с выражением для внутренней энергии получим уравнение адиабаты для субстанции: при постоянной массе уравнение $\delta Q = pdV + dU = 0$ дает:

$$Cm^2(T_0+T)\frac{dV}{V^2}-\alpha m^2\frac{dV}{V^2}+2\beta mTdT=0\Rightarrow d\rho=-m\frac{dV}{V^2}=\frac{2\beta T}{C(T_0+T)-\alpha}dT\ .$$

Это уравнение линейно в координатах плотность-температура ($d\rho=K\cdot dT$) только если выполняется равенство $C=\frac{\alpha}{T_0}$, причем в этом случае $K=\frac{2\beta}{C}=\frac{2\beta T_0}{\alpha}=34600$кг/(м^3·К).

2.2.. Ясно, что в указанных условиях Белый Тезис станет шаром со сферически-симметричным распределением массы, в котором силы давления уравновешивают гравитационные силы. В этом случае давление убывает с ростом расстояния от центра. Рассмотрим бесконечно тонкий сферический слой субстанции радиусом r и толщиной dr. Ускорение свободного падения можно записать через массу субстанции $M(r)$, сосредоточенную в шаре под этим слоем: $g(r)=\frac{GM(r)}{r^2}$ (здесь можно воспользоваться аналогией с электростатикой, основанной на похожести закона Кулона и закона всемирного тяготения). С другой стороны, условие равновесия слоя определяет изменение давления субстанции: $dp\cdot 4\pi r^2=-\rho\cdot 4\pi r^2 dr\cdot g(r)\Rightarrow\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}=-GM(r)$. Согласно результату первого пункта, давление $p=\alpha\frac{T_0+T}{T_0}\rho^2$. При заданной температуре субстанции $T=T_0$ находим, что $p(\rho)=2\alpha\cdot\rho^2$. Поэтому $4\alpha r^2\frac{d\rho}{dr}=-GM(r)$. Продифференцируем это соотношение, учитывая, что $\frac{dM(r)}{dr}=4\pi r^2\rho$, и получим уравнение, определяющее распределение плотности субстанции: $r\frac{d^2\rho}{dr^2}+2\frac{d\rho}{dr}+\frac{\pi G}{\alpha}r\rho=0$. Можно заметить, что для функции $z(r)\equiv r\cdot\rho(r)$ это уравнение принимает вид уравнения гармонических колебаний $\frac{d^2z}{dr^2}+\frac{\pi G}{\alpha}z=0$. Следовательно, его решение – это комбинация синуса и косинуса, то есть $r\cdot\rho(r)=A\sin(\omega r)+B\cos(\omega r)$, где $\omega\equiv\sqrt{\frac{\pi G}{\alpha}}$. Так как общая масса конечна, то $z(0)=0$, и поэтому $B=0$. Таким образом, $\rho(r)=\frac{A}{r}\sin\left(\sqrt{\frac{\pi G}{\alpha}}r\right)$. Внешняя граница Белого Тезиса в заданных условиях соответствует обращению давления в (а вместе с ним и плотности) в ноль, то есть его радиус R определяется из требования $\sqrt{\frac{\pi G}{\alpha}}R=\pi\Rightarrow R=\sqrt{\frac{\pi\alpha}{G}}\approx 21{,}7$ см. Константа A может быть определена по полной массе Белого Тезиса: $M=4\pi\int_0^R\rho(r)r^2dr=4\pi A\int_0^R\sin\left(\sqrt{\frac{\pi G}{\alpha}}r\right)rdr=\frac{4\pi\alpha}{G}A\Rightarrow A=\frac{GM}{4\pi\alpha}$. Теперь можно найти плотность в центре конфигурации $\rho(0)=\left(\frac{G}{\alpha}\right)^{3/2}\frac{M}{4\sqrt{\pi}}$, и давление в центре Белого Тезиса $p(0)=2\alpha\cdot\rho^2(0)=\frac{G^3M^2}{8\pi\alpha^2}\approx 0{,}3$ мкПа.

ОТВЕТЫ: $K=\frac{2\beta T_0}{\alpha}=34{,}6$ г/(см^3·К); $R=\sqrt{\frac{\pi\alpha}{G}}\approx 22$ см, $p(0)=\frac{G^3M^2}{8\pi\alpha^2}\approx 0{,}3$ мкПа.

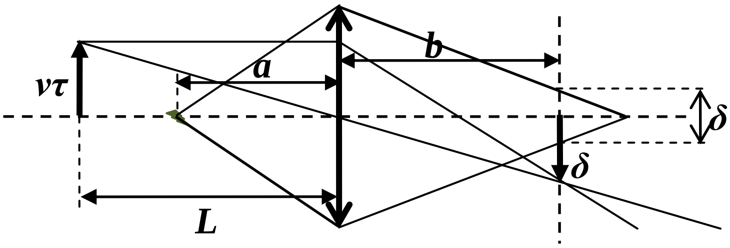
КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	**макс.балл**
Записано уравнение состояния субстанции, эквивалентное $p=\frac{f(m)}{V^2}(T_0+T)$	**1**
Это уравнение приведено к виду $p=C\frac{m^2}{V^2}(T_0+T)$	**1**
Получено уравнение адиабаты в координатах плотность-температура, следующее из уравнения состояния и выражения для внутренней энергии, в дифференциальной или интегральной форме	**3**
Найдено соотношение $C=\frac{\alpha}{T_0}$ (если это соотношение корректно доказано из других соображений – например, из существования энтропии как функции состояния субстанции, то этот пункт засчитывается вместе с предыдущим)	**3**
Получена формула $K=\frac{2\beta T_0}{\alpha}$	**3**
Получено правильное численное значение $K=34{,}6$ г/(см^3·К)	**1**
Записано соотношение для изменения ускорения свободного падения внутри Белого Тезиса, эквивалентное $g(r)=\frac{GM(r)}{r^2}$	**1**
Записано условие равновесия сферического слоя или иное уравнение, эквивалентное $\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}=-GM(r)$	**1**
Явно получено правильное уравнение для функции $\rho(r)$, не содержащее неизвестных величин	**2**
Получено решение вида $\rho(r)=\frac{A}{r}\sin\left(\sqrt{\frac{\pi G}{\alpha}}\,r\right)$	**3**
Найдены правильная формула и численное значение $R=\sqrt{\frac{\pi\alpha}{G}}\approx 21{,}7\,\text{см}$	**2+1=3**
Найдены правильная формула и численное значение $p(0)=\frac{G^3M^2}{8\pi\alpha^2}\approx 0{,}3\,\text{мкПа}$	**2+1=3**
ВСЕГО	**25**

3.(«**Быстрые птицы**», 14 баллов) В погожий весенний день Федор Симеонович отправился в парк фотографировать птиц. Он взял с собой старинный фотоаппарат, в котором использовались фотопластинки, и оборудование для проявления пластинок на месте. В одном месте птицы постоянно летали через ручей, и Федор Симеонович установил аппарат на расстоянии L = 7 м от линии их полетов. Повозившись с настройками, он обнаружил, что все, даже самые быстрые птицы получались на снимках четкими, если время экспозиции пластин не превышало τ = 2 мс. При этом листья деревьев, находящиеся на расстояниях менее l = 4 м от объектива, оказывались размытыми. Диаметр объектива его фотоаппарата равнялся d = 24 мм. С какой скоростью летали самые быстрые птицы в парке?

Возможное решение:

Договоримся, что изображение считается четким, если размер светового пятна на фотопластинке от очень маленького («точечного») элемента объекта не превышает размера зерна фотоэмульсии. Обозначим размер зерна δ. Будем также считать объектив фотоаппарата тонкой линзой (ясно, что она должна быть собирающей), и обозначим расстояние от объектива до фотопластинки во время съемки b. Тогда (см. рисунок) ясно,



что условие четкости изображения движущейся со скоростью птицы – это $\frac{b}{L}v\tau \le \delta$. Поэтому скорость «самых быстрых» птиц $v_m = \frac{L\delta}{b\tau}$. С другой стороны, изображение «малого» элемента листа, находящегося на расстоянии $a \le l$ от объектива, не попадает на фотопластинку, так как оно находится на расстоянии $b' \ne b$. Поэтому размер пятна на фотопластинке от этого элемента $\frac{b'-b}{b'}d \ge \delta$. Значит, при $a = l$ величина b' такова, что $\delta = \frac{b'-b}{b'}d$. Таким образом, $v_m = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right)\frac{Ld}{\tau}$. С учетом формулы тонкой линзы, оптическая сила объектива $D = \frac{1}{L} + \frac{1}{b} = \frac{1}{l} + \frac{1}{b'}$. Из этого соотношения следует, что $\frac{1}{b} - \frac{1}{b'} = \frac{1}{l} - \frac{1}{L}$.

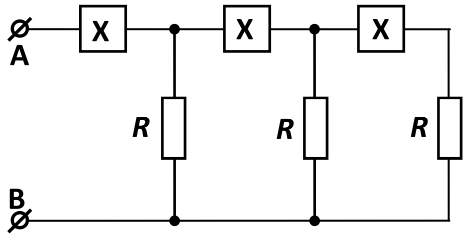
Подставляя этот результат в формулу для скорости, получаем $v_m = \left(\frac{L}{l} - 1\right)\frac{d}{\tau} = 9$м/с.

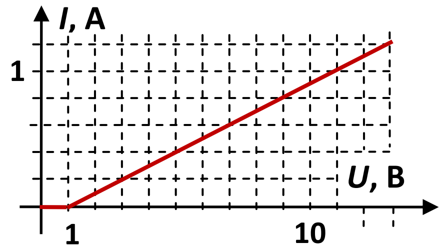
ОТВЕТ: $v_m = \left(\frac{L}{l} - 1\right)\frac{d}{\tau} = 9$м/с.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	**макс.балл**
Корректно сформулировано условие четкости изображения	**1**
Есть правильное построение (или вычисление), позволяющее связать смещение элемента движущегося объекта и размер его изображения	**1**
Записано условие четкости изображения птиц, эквивалентное $\frac{b}{L}v\tau \le \delta$	**2**
Указано (используется в решении), что размытость изображения элементов листьев связано со смещением их изображений от плоскости фотопластинки	**1**
Есть правильное построение (или вычисление), позволяющее связать положение изображения элемента с размытостью пятна от него на фотопластинке	**1**
Указано, что для $a = l$ должно выполнятся соотношение, эквивалентное $\delta = \frac{b'-b}{b'}d$	**2**
Записана формула линзы: в форме $D = \frac{1}{L} + \frac{1}{b}$ и в форме $D = \frac{1}{l} + \frac{1}{b'}$	**1+1=2**
Получен аналитический ответ для скорости $v_m = \left(\frac{L}{l} - 1\right)\frac{d}{\tau}$	**3**
Получен правильный численный ответ для скорости	**1**
ВСЕГО	**14**

4.(«**Конечная цепь**», 20 баллов) Федор Симеонович очень любил давать сотрудникам отдела линейного счастья задания, которые те выполняли с удовольствием. Одному из лаборантов очень нравилось проводить измерения с помощью точных цифровых мультиметров, и Федор Симеонович поручил ему снять вольт-амперную характеристику цепи АВ из трех одинаковых звеньев, содержащих нелинейные элементы X и резисторы с сопротивлением R = 5 Ом (см. рисунок слева). График полученной лаборантом ВАХ показан на рисунке справа. Взглянув на график, Федор Сименович заметил, что следует продолжить измерения – по крайней мере до значения входного напряжения, равного 30 В. Он также сообщил, что ВАХ самого элемента X состоит из прямолинейных отрезков и содержит две точки «излома» на участке от нулевого до максимального разрешенного для X значения напряжения, равного 40 В.

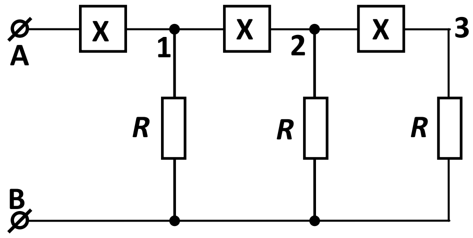


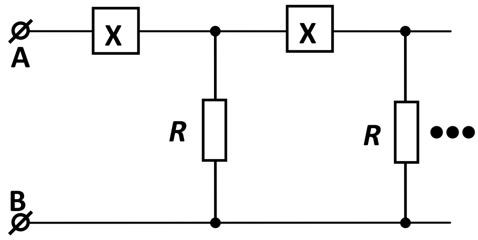


4.1. Укажите координаты точек излома (U,I) на ВАХ элемента X.
4.2. Какова сила тока через элемент X при напряжении, равном 6 В?
4.3. При каком значении входного напряжения лаборант обнаружит вторую точку излома на ВАХ цепи АВ?

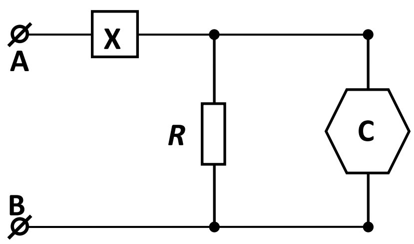
Возможное решение:

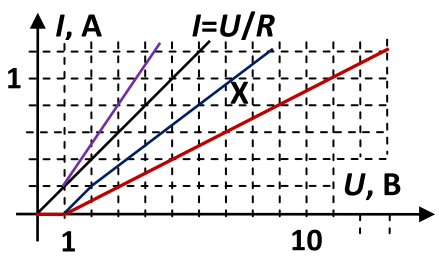
Заметим, что при напряжениях, меньших 1 В, ток через цепь АВ не течет. Так как через резистор ненулевой ток течет при любом ненулевом напряжении, то это свойство цепи связано со свойствами элемента X – именно он имеет некоторое «пороговое» напряжение, ниже которого не пропускает ток. Из этого ясно, что при повышении входного напряжения сначала ток начинает течь только через первое звено X-R, затем через первое и второе, а затем уже – через все три. Поэтому, если рассмотреть «модифицированную» цепь, состоящую из **бесконечного** числа таких звеньев, то на участке значений входного напряжения, при которых в бесконечной цепи ток еще **не затекает** в четвертое звено, ВАХ конечной и бесконечной цепей будут совпадать! С другой стороны, бесконечная цепь при





«отсечении» одного звена не изменяется, поэтому ее схему можно перерисовать в виде,





показанном на рисунке слева (шестиугольником обозначена бесконечная цепь, ВАХ которой при небольших входных напряжениях совпадает с ВАХ, полученной лаборантом). Если на том же графике, на котором построена эта ВАХ, построить ВАХ резистора (это прямая $I = \frac{U}{R}$), то, суммируя значения сил тока через резистор и через цепь при одинаковых значениях напряжений, мы, в соответствии с законами параллельного соединения, получим ВАХ параллельного соединения резистора и всей схемы (ниже $U = 1$В она совпадает с ВАХ резистора, а выше изображена «фиолетовой» прямой на рисунке справа). Но тогда ВАХ элемента X может получена из законов последовательного соединения, то есть путем вычитания из величины напряжения на всей цепи величины напряжения на параллельном соединении резистора и цепи при одинаковых значениях силы тока: ниже $U = 1$В ток через элемент X равен нулю, а при более высоких значениях напряжения ВАХ элемента X дается «синей» ломанной кривой.

Можно «для проверки» посмотреть распределение токов и напряжений, например, при максимальном изученном лаборантом входном напряжении $U_0 = 13$В. Как видно из ВАХ цепи, сила входного тока при этом равна $I_0 = 1{,}2$ А. По ВАХ элемента X находим, что при этом токе напряжение на элементе X в первом звене $U_{X1} = \frac{26}{3}$ В, и поэтому напряжение на резисторе первого звена $U_{R1} = U_0 - U_{X1} = \frac{13}{3}$ В, а ток через него $I_{R1} = \frac{U_{R1}}{R} = \frac{13}{15}$ А. Тогда ток через элемент X второго звена $I_{X2} = I_0 - I_{R1} = \frac{1}{3}$ А, и напряжение на этом элементе $U_{X2} = \frac{26}{9}$ В. Значит, $U_{R2} = U_{R1} - U_{X2} = \frac{13}{9}$ В, а $I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R} = \frac{13}{45}$ А. Повторяя рассуждения еще раз, обнаруживаем, что $I_{X3} = \frac{2}{45}$ А, $U_{X3} = \frac{11}{9}$ В и $U_{R3} = \frac{2}{9}$ В, то есть меньше 1 В, и даже при максимальном использованном лаборантом напряжении ток в бесконечной цепи не затекает дальше третьего звена, то есть ее ВАХ не отличается от ВАХ исследуемой конечной цепи.

Но на самом деле можно было бы обойтись и без этого – согласно информации из условия, на кусочно-линейной ВАХ элемента X есть всего два излома вплоть до максимального значения напряжения, а мы уже нашли оба: первая точка излома имеет координаты $(U_1, I_1) = (1\text{В}, 0\text{А})$, а вторая – координаты $(U_2, I_2) = (2\text{В}, 0{,}2\text{А})$. Поэтому нам известна **вся** ВАХ элемента X! В частности, мы легко находим, что при $U_X = 6$ В сила тока через элемент X равна $I_X = 0{,}8$ А.

Кроме того, поскольку других изломов на ВАХ элемента X нет (а на ВАХ резистора их и вовсе не бывает), то новый излом на ВАХ всей цепи появится в тот момент, когда цепь «вспомнит», что она на самом деле отличается от бесконечной. Это произойдет при значении входного напряжения, при превышении которого в бесконечной цепи появится ток, затекающей в <u>четвертое</u> звено (у настоящей конечной схемы его попросту нет). Значит, при этом значении входного напряжения $U_{R3} = 1$В. Проводя анализ в «обратном» по отношению к примеру выше порядке, находим: так как еще $I_{X4} = 0$, то $I_{X3} = I_{R3} = 0{,}2$ А, и $U_{X3} = 2$ В. Далее: $U_{R2} = U_{R3} + U_{X3} = 3$ В, $I_{R2} = 0{,}6$А, и поэтому $I_{X2} = I_{X3} + I_{R2} = 0{,}8$ А, а $U_{X2} = 6$В. Еще одна «итерация» дает $U_{R1} = U_{R2} + U_{X2} = 9$ В, $I_{R1} = 1{,}8$А, и $I_{X1} = I_{X2} + I_{R1} = 2{,}6$ А. Продолжив ВАХ элемента X до таких величин силы тока, найдем, что оно достигается при $U_{X1} = 18$В. Таким образом, входное напряжение для этого состояния схемы $U = U_{X1} + U_{R1} = 27\text{В}$. Итак, новый излом на ВАХ цепи возникнет при значении входного напряжения 27 В. Можно отметить замечательную интуицию Федора Симеоновича, который сразу предложил снять ВАХ цепи до напряжения 30 В.

ОТВЕТЫ: первая точка излома имеет координаты $(U_1, I_1) = (1\text{В}, 0\text{А})$, а вторая – координаты $(U_2, I_2) = (2\text{В}, 0{,}2\text{А})$; при $U_X = 6\text{В}$ сила тока через элемент Х равна $I_X = 0{,}8\text{А}$; новый излом на ВАХ цепи возникнет при значении входного напряжения $U = 27\text{В}$.

Примечание: Альтернативный (алгебраический) возможный подход состоит в том, чтобы строить ВАХ элемента Х как набор прямых: сначала «нейтральный» участок с нулевым током, который должен продолжаться до первой точки излома – значения $U_1 = 1\text{В}$. Затем для следующего линейного участка уравнение ВАХ задается в виде линейной функции, график которой проходит через точку первого излома, то есть $I = a \cdot (U - U_1)$. Для этого участка <u>вычислением</u> с произвольным a получается уравнение ВАХ цепи выше точки первого излома, и сравнением с наблюдаемой ВАХ определяется a. Далее находится точка, с которой возникает рассогласование с наблюдаемой ВАХ, находится вторая точка излома, и записывается уравнение для нового линейного продолжения. В целом этот метод более громоздкий по вычислениям, однако и здесь решение можно существенно упростить, если заметить, что при небольшом превышении порогового напряжения ненулевой ток есть только в первом звене, а затем уже появляется ток во втором звене и так далее. Отметим, что правильное аналитическое выражение для ВАХ элемента Х имеет вид:

$$I_X = \begin{cases} 0, & U_X \le 1\,\text{В} \\ \dfrac{U_X - 1\,\text{В}}{5\,\text{Ом}}, & 1\,\text{В} < U_X \le 2\,\text{В} \\ \dfrac{3U_X - 2\,\text{В}}{20\,\text{Ом}}, & 2\,\text{В} < U_X \le 40\,\text{В} \end{cases}.$$

ВАХ нашей (конечной!) цепи с такими элементами Х описывается следующими выражениями:

$$I_C = \begin{cases} 0, & U_C \le 1\,\text{В} \\ \dfrac{U_C - 1\,\text{В}}{10\,\text{Ом}}, & 1\,\text{В} < U_C \le 27\,\text{В} \\ \dfrac{273U_C - 260\,\text{В}}{2735\,\text{Ом}}, & 27\,\text{В} < U_C \le U_{\max} \end{cases}.$$

При превышении входного напряжения цепи $U_{\max} = \dfrac{147295}{2457}\text{В} \approx 59{,}95\,\text{В}$ напряжение на элементе Х в первом звене превысит максимальную допустимую величину 40В. Отметим, что в точке второго излома ВАХ цепи $(U_c, I_c) = (27\text{В}, 2{,}6\text{А})$ коэффициент наклона ВАХ уменьшается менее чем на 0,2% - «на глаз» этот излом практически незаметен, но он все же есть. У бесконечной цепи никаких новых изломов ВАХ, кроме излома из-за открытия первого элемента Х, не появилось бы.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	**макс.балл**
Отмечена (используется в решении) необходимость существования ненулевого «напряжения открытия» у элемента Х	**2**

Отмечено (используется в решении), что при низких значениях входного напряжения ненулевой ток сначала появляется только в первом звене, затем уже во втором и в третьем.	**2**
Предложен корректный метод решения: используется переход к бесконечной цепи или используется метод последовательного построения линейных участков ВАХ элемента X.	**3**
Найдено положение первой точки излома на ВАХ элемента X $(U_1, I_1) = (1\text{В}, 0\text{А})$	**2***
Найдено положение второй точки излома на ВАХ элемента X $(U_2, I_2) = (2\text{В}, 0{,}2\text{А})$	**3***
Правильно найдено (построением или вычислением) продолжение ВАХ элемента X выше второй точки излома	**3**
Правильно найдено значение силы тока через элемент X при $U_X = 6\,\text{В}$	**2***
Правильно найдено значение входного напряжения, при котором возникает еще один излом на ВАХ цепи	**3***
ВСЕГО	**20**

*за отмеченные пункты частичные баллы не ставятся!