Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 10–11 классы. Заключительный этап 2020/2021 учебного года.

Задачи, решения, критерии оценки

Полное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов. За неполное решение в некоторых задачах (не во всех!) ставились промежуточные баллы: 5, 10 или 15. Максимальная сумма баллов за 5 задач равна 100.

1. Натуральные числа, начиная с 20, выписали в одну строку: 20212223… Какая цифра стоит в получившейся последовательности цифр на 2021 месте?

Ответ: 7. **Решение.** Цифры чисел с 20 по 99 занимают в этом ряду первые $80 \cdot 2 = 160$ мест. Осталось 2021 – 160 = 1861 места. Цифры чисел от 100 до 719 занимают следующие $(719-99) \cdot 3 = 1860$ мест. Значит, на 2021 месте стоит первая цифра числа 720, то есть цифра 7.

Критерии. Полный балл ставился только при наличии правильного решения и правильного ответа. Другие баллы (кроме 20 и 0) в этой задаче не ставились.

2. Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение

$$|x| - \arcsin x + b \cdot (\arccos x + |x| - 1) + a = 0$$

при любом значении *b* имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $\frac{\pi}{2} - 1$. **Решение.** При $b = -1$ уравнение приводится в виду

$|x| - \arcsin x - \arccos x - |x| + 1 + a = 0$, что при $x \in [-1;1]$ равносильно $1 + a - \frac{\pi}{2} = 0$.

Таким образом, при $b = -1$ решение существует только при $a = \frac{\pi}{2} - 1$.

С другой стороны, при $a = \frac{\pi}{2} - 1$ уравнение $|x| - \arcsin x + b \cdot (\arccos x + |x| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$ имеет корень $x = 1$ при любом значении *b*.

Критерии. В задаче требуется получить необходимое условие $a=\frac{\pi}{2}-1$ и затем доказать его достаточность. Только в этом случае решение является правильным.

Было очень много неправильных решений, в которых использовался неверный логический ход: вместо заданного в условии задачи «имеется решение при любом b», считалось, что «имеется *одно и то же* решение при любом b». Это другая, гораздо более простая задача, хотя ответ в ней и совпадает с нужным ответом.

3. Сколько корней имеет уравнение

$$2^{\lg(x^2-3)}=\lg 2^{x^2-2}?$$

Ответ: 4. **Решение.** Уравнение преобразуется к виду

$$t^{\alpha}=\alpha(t+1),\quad \alpha=\lg 2\in(0,1),\quad t=x^2-3>0,$$

причём:

1) левая часть уравнения – степенная функция, выпуклая вверх (так как $\alpha\in(0,1)$), определенная при $t\geq 0$;

2) правая часть уравнения – линейная функция с положительным угловым коэффициентом;

3) при $t=0$ значение левой части меньше, чем значение правой части;

при $t=1$ значение левой части, наоборот, больше значения правой, так как

$$1^{\alpha}=\lg 10>\lg 4=\alpha\cdot(1+1);$$

при достаточно больших значениях t правая часть уравнения будет больше левой, так как после деления их на t левая будет стремиться к 0, а правая к $\alpha>0$.

Поэтому, так как функция выпуклая, то графики этих функций пересекаются ровно в двух точках (одна между 0 и 1, другая правее 1).

Каждое из этих двух положительных значений t порождает по два корня x исходного уравнения. Таким образом, всего корней 4.

Критерии. Типичный недостаток многих решений – ошибки и погрешности в обосновании количества пересечений двух кривых. Рассуждения типа «из графика видно, что…» или «сравнение производных показывает, что…» не являются доказательствами.

4. Решите систему

$$\begin{cases} 2x-3y+\dfrac{1}{xy}=6, \\ 3z-6x+\dfrac{1}{xz}=2, \\ 6y-2z+\dfrac{1}{yz}=3. \end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=1$ и $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{3}$, $z=-1$. **Решение.** Умножив первое уравнение на $(2x-3y)$, второе – на $(3x-6x)$, третье – на $(6y-2z)$ и сложив, получаем уравнение-следствие:

$$(2x-3y)^2+(3z-6x)^2+(6y-2z)^2+\frac{2x-3y}{xy}+\frac{3z-6x}{xz}+\frac{6y-2z}{yz}=6(2x-3y)+2(3z-6x)+3(6y-2z)$$

$$\Leftrightarrow\ (2x-3y)^2+(3z-6x)^2+(6y-2z)^2=0\ \Leftrightarrow\ 2x=3y=z.$$

Подстановка $2x=3y=z$ в систему приводит к ответу: $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=1$ и $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{3}$, $z=-1$.

У задачи имеются и другие способы решения. Одно из них следующее. Так как $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$, то можно преобразовать левые части уравнений:

$$\begin{cases} 2x-3y+\dfrac{z}{xyz}=6, \\ 3z-6x+\dfrac{y}{xyz}=2, \\ 6y-2z+\dfrac{x}{xyz}=3. \end{cases}$$

Введем обозначение $a=\dfrac{1}{xyz}$, тогда получаем линейную систему

$$\begin{cases} 2x-3y+az=6, \\ -6x+ay+3z=2, \\ ax+6y-2z=3. \end{cases}$$

Первое уравнение умножим на 3 и прибавим ко второму, а также второе уравнение умножим на a ($a\neq 0$) и прибавим к умноженному на 6 третьему.

Получим новую равносильную систему

$$\begin{cases} 2x-3y+az=6, \\ (a-9)y+3(a+1)z=20, \\ (a^2+36)y+3(a-4)z=2a+18. \end{cases}$$

Выразив из последнего уравнения y и подставив его во второе уравнение, получим $z=\frac{6}{a}$.

После этого находятся $y=\frac{2}{a}$, $x=\frac{3}{a}$.

Так как у нас $a=\frac{1}{xyz}$, то $a=\frac{a^3}{3\cdot 2\cdot 6}$, откуда $a=\pm 6$.

Поэтому получается две тройки решений: $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=1$ и $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{3}$, $z=-1$.

Критерии. Было очень много правильных ответов, полученных подбором. Но если не доказано, что других корней нет, то задачу нельзя считать решенной. Это оценивалось, максимум, в 5 баллов.

Также очень часто за чередой каких-то преобразований делались ни на чем не основанные выводы: «очевидно, что $z = 2x$» и т. п. В этих случаях оценка также не превышала 5 баллов.

Большинство правильных решений было той или иной вариацией второго из указанных выше способов. Идея первого способа решения встретилась только в нескольких работах (но почти во всех этих решениях, к сожалению, были те или иные недочеты).

5. Бумажный квадрат площади 17 согнули по прямой, проходящей через его центр, после чего соприкасающиеся части склеили. Найдите максимально возможную площадь получившейся бумажной фигуры.

Ответ: $17\left(2-\sqrt{2}\right)$. **Решение.** Обозначим сторону квадрата через a. Пусть прямая отсекает от стороны квадрата AD отрезок $AP=x<\frac{a}{2}$ (рис. 1).

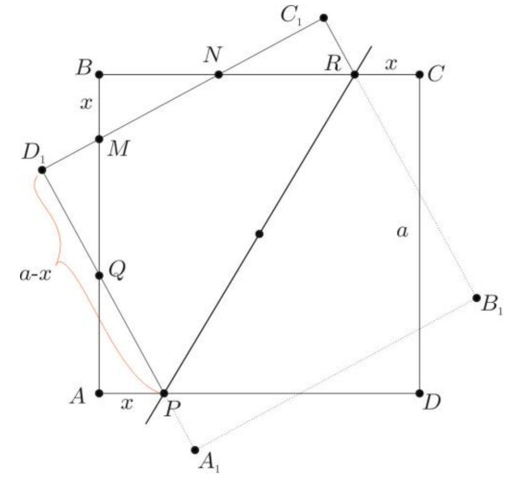

Рис. 1

Получившаяся конфигурация симметрична относительно прямой *PR*. С другой стороны, квадрат $A_1B_1C_1D_1$ получен из квадрата ABCD путем поворота относительно центра квадрата. Тогда $x = AP = PA_1 = C_1R = RC = BM = MD_1$. Поэтому прямоугольные треугольники AQP, MBN, NC_1R, QD_1M равны.

Таким образом, площадь получившейся фигуры равна сумме площадей прямоугольной трапеции PD_1C_1R и двух равных прямоугольных треугольников AQP и MBN.

Площадь трапеции равна $\frac{a^2}{2}$. Значит, нам нужно найти максимальную площадь прямоугольного треугольника AQP, периметр которого равен $AP + AQ + QP$ $= BM + AQ + QM = AB = a$. Но максимальная площадь прямоугольного треугольника с заданным периметром будет у равнобедренного треугольника.

Это необходимо доказать. Например, обозначив катеты треугольника *a* и *b*, а гипотенузу *c*, запишем периметр *P* = *a* + *b* + *c*. Используя неравенство Коши,

$P = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \geq 2\sqrt{ab} + \sqrt{2ab} = \sqrt{ab}\left(2 + \sqrt{2}\right)$, получаем, что $S = \frac{ab}{2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{P}{2+\sqrt{2}}\right)^2$,

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда *a* = *b*.

Можно также сделать этот вывод из чисто геометрических соображений: если в прямой угол *ABC* вписать окружность радиуса $\frac{P}{2}$, то эта окружность будет вневписанной для всех прямоугольных треугольников с периметром *P* и катетами *BX* и *BY*, расположенными на сторонах угла. Так как периметр задан, то наибольшая площадь будет у треугольника с наибольшим радиусом вписанной окружности. А этот радиус будет максимальным, когда вписанная окружность касается вневписанной (если радиус будет больше, то эти две окружности пересекутся, что невозможно), то есть когда треугольник равнобедренный.

Итак, $\angle QPA = 45°$, $\angle RPD = \angle QPR = \dfrac{180° - 45°}{2} = 67{,}5°$. Тогда $a = AB = 2x + x\sqrt{2}$, откуда

$x = \dfrac{a}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}$, и площадь ΔQPA равна $\dfrac{x^2}{2} = \dfrac{a^2\left(4+2-4\sqrt{2}\right)}{8} = \dfrac{a^2\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4}$.

Значит, искомая площадь есть $\dfrac{a^2}{2} + 2\cdot\dfrac{a^2\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4} = \dfrac{a^2\left(1+3-2\sqrt{2}\right)}{2} = a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$.

Здесь возможны и другие способы решения. Например, алгебраическое решение. Пусть сторона квадрата равна a, и прямая отсекает от стороны квадрата AD отрезок $AP = x < \dfrac{a}{2}$. Найдём AQ. Обозначим $\angle RPS = \angle RPQ = \alpha$, $\angle QPA = \beta$. Поскольку из треугольника PRS (здесь S это проекция точки R на основание AD) находим

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{a-2x}$, то $\operatorname{tg}(2\alpha) = \dfrac{a(a-2x)}{2x(x-a)}$ и $AQ = x\cdot\operatorname{tg}\beta = x\operatorname{tg}(-2\alpha) = \dfrac{a(a-2x)}{2(a-x)}$.

Следовательно катеты прямоугольных треугольников равны x и $\dfrac{a(a-2x)}{2(a-x)}$. Откуда искомая площадь равна $\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{ax(a-2x)}{2(a-x)}$. С помощью производной можно получить, что максимум функции $f(x) = \dfrac{x(a-2x)}{(a-x)}$ достигается при $x = \dfrac{a(2-\sqrt{2})}{2}$, что соответствует углу $\beta = \dfrac{\pi}{4}$, $2\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$, $\alpha = \dfrac{3\pi}{8}$.

Критерии. Здесь полный балл ставился только в случае полностью правильно обоснованного нахождения максимума и правильного ответа.