ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2022 года

БИЛЕТ № 03 (10-11 классы): возможные решения и критерии

Критерии оценивания:

Для вопросов:

Есть отдельные правильные соображения – **1 балл.**

Ответ в целом правилен, но содержит существенные неточности, или существенно неполон, или отсутствует обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **2 балла.**

Ответ правилен, но присутствуют мелкие неточности, или ответ недостаточно полон, или отсутствует достаточное обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **3 балла.**

Ответ полностью правильный, но недостаточно обоснованный (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **4 балла.**

Правильный, полный и обоснованный ответ – **5 баллов (максимальная оценка).**

Для задач:

Есть отдельные правильные соображения – **1-2 балла.**

Есть часть необходимых для решения соображений, решение не закончено или содержит серьезные ошибки – **3-4 балла.**

Присутствует большая часть необходимых для решения соображений, правильно записана часть необходимых соотношений, решение не закончено или содержит ошибки – **5-7 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны почти все необходимые для решения исходные уравнения, но решение не закончено или содержит ошибки – **8-10 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит ошибки – **11-14 баллов.**

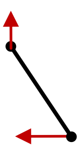
Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит одну-две мелкие неточности, не позволившие получить правильный ответ, или правильное решение с недостаточным обоснованием существенных использованных результатов – **15-17 баллов.**

Правильное обоснованное решение с верным аналитическим ответом, но мелкой неточностью при получении численного ответа, либо правильное решение с правильными ответами с недостаточным обоснованием одного из использованных результатов (из числа не ключевых для решения, но необходимых) – **18-19 баллов.**

Полное, правильное, обоснованное решение с правильными ответами – **20 баллов (максимальная оценка).**

Максимальная оценка за работу: 100 баллов.

Задание 1:



Вопрос: Гантель из двух маленьких шариков, соединенных прямым жестким стержнем длиной $L = 60$ см, скользит по ровной поверхности. В некоторый момент времени один из шариков движется со скоростью $v = 1{,}5$ м/с под углом 60° к стержню, а скорость другого направлена под углом 30° к стержню. Найти угловую скорость вращения гантели в этот момент времени.

Задача: Кот Леопольд добрался до середины длинной лестницы, один из концов которой опирался о горизонтальный пол, а другой – о стену, составляющую с полом прямой двугранный угол, и остановился передохнуть. В этот момент мыши потащили нижний конец лестницы от стены с постоянным ускорением a_0. Найти скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ кота Леопольда в момент времени $t=\sqrt{\dfrac{L}{2a_0}}$ (время отсчитывается от начала движения лестницы, L – длина лестницы), когда лестница проходила положение, в котором она составляла угол $\alpha = 45°$ с полом.

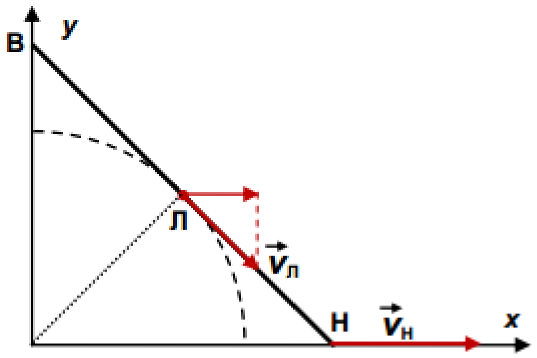
Ответ на вопрос: Описанная гантель является твердым телом, совершающим плоскопараллельное движение. Проекции скоростей двух точек твердого тела на соединяющую их прямую обязательно должны быть одинаковы, поэтому для шариков А ($v_A = v$) и В: $v_A\cos(60°) = v_B\cos(30°) \Rightarrow v_B = v/\sqrt{3}$. Ясно, что за малый интервал времени все точки такого тела должны поворачиваться на один и тот же угол, поэтому угловую скорость твердого тела можно считать характеристикой, относящейся ко всему телу. Скорости А и В можно представить как сумму скоростей поступательного движения ($\vec{v}_{пост}$ одинакова для всех точек тела) и вращательного движения: $\vec{v}_A = \vec{v}_{пост} + \vec{v}_{Aвр}$ и $\vec{v}_B = \vec{v}_{пост} + \vec{v}_{Bвр}$, и поэтому $|\vec{v}_A - \vec{v}_B| = |\vec{v}_{Aвр} - \vec{v}_{Bвр}|$. Модуль каждой из вращательных скоростей равен произведению величины угловой скорости на радиус, а укол между векторами вращательных скоростей φ равен углу между радиусами. Поэтому

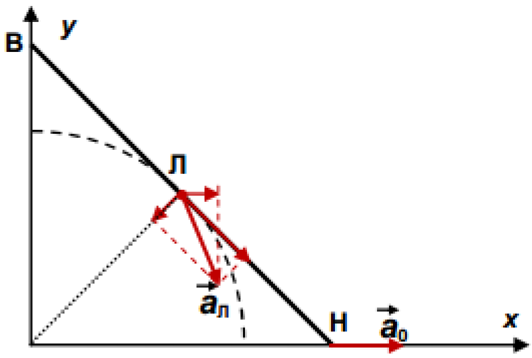
$$|\vec{v}_{Aвр} - \vec{v}_{Bвр}| = \sqrt{v_{Aвр}^2 + v_{Bвр}^2 - 2v_{Aвр}v_{Bвр}\cos(\varphi)} = \omega\sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_Ar_B\cos(\varphi)} = \omega l_{AB} = \omega L.$$

Таким образом, $\omega = \dfrac{|\vec{v}_A - \vec{v}_B|}{L}$. В нашем случае для шариков, скорости которых взаимно перпендикулярны, $\omega = \dfrac{\sqrt{v_A^2 + v_B^2}}{L} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{v}{L} \approx 2{,}9$ рад/с.

Примечание: У твердого тела существует мгновенный центр (мгновенная ось) вращения. При плоском движении его можно найти как точку пересечения перпендикуляров к скоростям двух точек. Поэтому МЦВ гантели находится на расстоянии $r_A = L\sin(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}L$ от шарика А. Значит, угловая скорость вращения гантели $\omega = \dfrac{v_A}{r_A} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{v}{L} \approx 2{,}9$ рад/с. Такой метод обоснования ответа в данном вопросе также допустим.

Решение задачи: Поскольку Леопольд (точка Л) находится на середине лестницы, то его координата в проекции на горизонтальную ось x он всегда равна половине координаты нижнего конца (Н), который движется с постоянным ускорением от нулевой начальной скорости. Поэтому проекции на эту ось его скорости и ускорения известны: $v_{Лx} = \dfrac{1}{2}v_H = \dfrac{a_0}{2}t$, $a_{Лx} = \dfrac{1}{2}a_H \equiv \dfrac{a_0}{2}$. С другой стороны, в процессе движения расстояние между Л и вершиной угла неизменно и равно $\dfrac{L}{2}$, то есть Леопольд движется по окружности (см. рисунок), и его





скорость направлена по касательной к этой окружности. В указанный момент времени $v_{Лx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_0 L}{2}}$, вектор скорости Л направлен под углом $\alpha = 45°$ к горизонтали (вниз), и поэтому $|\vec{v}_Л| = \sqrt{2}\, v_{Лx} = \frac{1}{2}\sqrt{a_0 L}$.

Ускорение Леопольда можно разложить в сумму касательного и центростремительного ускорений, причем величина центростремительного ускорения $a_n = \frac{v_Л^2}{L/2} = \frac{a_0}{2}$. Значит, проекция на ось x касательного ускорения $a_{\tau x} = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2\sqrt{2}}a_0 = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}a_0$. Следовательно, $a_\tau = \sqrt{2}a_{\tau x} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}a_0$, и $|\vec{a}_Л| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = a_0\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$. Направление вектора ускорения кота Леопольда можно задать величиной угла его наклона к вертикали: $\sin(\beta) = \frac{a_{Лx}}{|\vec{a}_Л|} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$.

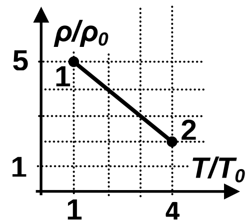
Некоторые участники могут даже заметить (из геометрии или тригонометрии), что это в точности угол $\beta = \frac{\pi}{8}\, рад = 22{,}5°$.

Ответ: $|\vec{v}_Л| = \frac{1}{2}\sqrt{a_0 L}$, эта скорость направлена вдоль лестницы (вниз), $|\vec{a}_Л| = a_0\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$, ускорение направлено под углом $\beta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right) = \frac{\pi}{8}\, рад = 22{,}5°$ к вертикали (вправо-вниз по рисунку).

Задание 2:

Вопрос: Температура с точки зрения молекулярно-кинетической теории. Абсолютная шкала температур.

Задача: Постоянное количество гелия участвует в процессе, диаграмма которого в координатах плотность газа – температура изображается участком прямой (см. рисунок). Во сколько раз максимальное давление гелия в этом процессе больше минимального? Координаты точки 1: (1;5), точки 2: (4;2).



Ответ на вопрос: Исходно температура определялась эмпирически как «мера нагретости» тела. Для измерения температуры тела оно приводится в тепловое равновесие с термометром – стандартным телом с индикацией температуры, проградурованным в соответствии с некоторой температурной шкалой по двум «реперным» точкам. Например, для градуировки термометра по шкале Цельсия температура плавления льда при нормальном атмосферном давлении принимается за 0°C, а температура кипения воды при нормальном атмосферном давлении принимается за 100°C. Между этими точками шкала разделяется на градусы равномерно, и от них в обе стороны распространяется с таким же шагом. В рамках МКТ прекращение (в среднем) обмена энергий между молекулами тела и термометра при соударениях означает, что средние кинетические энергии молекул совпадают. Поэтому температура тела в любой разумной шкале должна быть монотонной функцией от средней кинетической энергии его молекул $t = f(\overline{E}_K)$. Значит, и сама $\overline{E}_K$ может рассматриваться как температура, измеренная по некоторой шкале (такую температуру называли «термодинамической»). При использовании газовых термометров было обнаружено, что изменение объема газа с хорошей точностью является линейной функцией его температуры по шкале Цельсия, причем для разных количеств разных газов при экстраполяции графиков в область «очень низких» температур температура обращения объема в ноль оказывается примерно одинаковой – около

$t_0 = -273°C$. Эта температура была названа «абсолютным нулем», и была введена в использование абсолютная шкала температур (шкала Кельвина), в которой начало отсчета $T \equiv 0$ К совмещалось с абсолютным нулем, а один градус этой шкалы приравнен к градусу шкалы Цельсия. С точки зрения МКТ абсолютный ноль интерпретируется как температура, при которой прекращается тепловое движение молекул. Изучение свойств газов и развитие статистических методов позволило установить, что термодинамическая и абсолютная температура для любого вещества пропорциональны друг другу: в соответствии с тепловой теоремой Больцмана, в состоянии теплового равновесия при абсолютной температуре T в молекулярной системе на каждую степень свободы молекулы в среднем приходится энергия, равная $\frac{kT}{2}$, где постоянная Больцмана k выражается через универсальную газовую постоянную и число Авогадро $k = \frac{R}{N_A}$. Сейчас известно, что молекулы являются квантовыми объектами – их движение не описывается корректно законами механики Ньютона, и на самом деле состояние покоя для них невозможно. Поэтому состояние вещества с температурой, равной абсолютному нулю, определенное как состояние с неподвижными молекулами, принципиально невозможно.

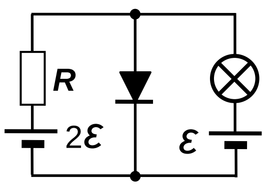
Решение задачи: Используя для гелия приближение идеального газа, можно выразить его давление через плотность и температуру: $pV = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{\mu} = \frac{R\rho_0 T_0}{\mu}\frac{\rho}{\rho_0}\frac{T}{T_0}$. Из вида диаграммы (с учетом информации из условия) можно установить, что ее уравнение – это $\frac{\rho}{\rho_0} = 6 - \frac{T}{T_0}$. Значит, зависимость давления гелия от его температуры в данном процессе описывается выражением $p = \frac{R\rho_0 T_0}{\mu}\frac{T}{T_0}\left(6 - \frac{T}{T_0}\right)$. Ясно, что это квадратичная зависимость (график – парабола ветвями вниз), и ее максимум лежит посередине между корнями, то есть в точке $\frac{T}{T_0} = 3$. Значит, максимальное значение давления в этом процессе, равное $p_{\max} = 9\frac{R\rho_0 T_0}{\mu}$, достигается внутри интервала изменения температуры. Ясно (при удалении в обе стороны от этой точки давление падает), что минимальное значение достигается на одной из границ интервала. Сравнивая $p_1 = 5\frac{R\rho_0 T_0}{\mu}$ и $p_2 = 8\frac{R\rho_0 T_0}{\mu}$, находим, что $p_{\min} = p_1 = 5\frac{R\rho_0 T_0}{\mu}$. Таким образом, $\frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \frac{9}{5} = 1{,}8$.

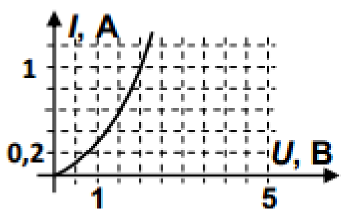
Ответ: $\frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \frac{9}{5} = 1{,}8$.

Задание 3:

Вопрос: Какой будет сила тока, текущего через диод, ВАХ (вольт-амперная характеристика) которого изображена в задаче на рисунке справа, если его подключить к источнику с ЭДС 4 В и внутренним сопротивлением 4 Ом?

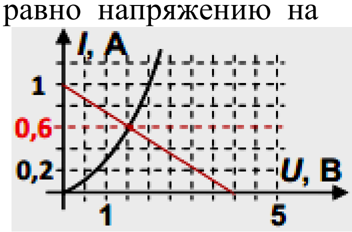
Задача: На рисунке слева показана схема с диодом, ВАХ которого в открытом состоянии



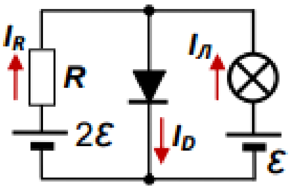


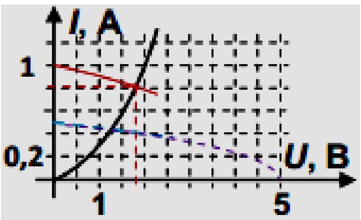
изображена на рисунке справа. У лампы ВАХ описывается выражением $I = I_0 \cdot \sqrt{\frac{U}{\mathcal{E}}}$, где $I_0 = 0{,}5$ А. Внутренние сопротивления обоих источников пренебрежимо малы, величина $\mathcal{E} = 5\,\text{В}$, сопротивление резистора $R = 20\,\text{Ом}$. Найдите мощность, потребляемую диодом.

Ответ на вопрос: Напряжение на диоде при таком подключении равно напряжению на источнике, то есть $U_D = \mathcal{E} - Ir$. Следовательно, ток через диод и напряжение на нем определяются пересечением графика ВАХ диода с «нагрузочной прямой» источника, определяемой выражением $I = \dfrac{\mathcal{E} - U_D}{r}$. Выполнив построение, находим, что $I_D \approx 0{,}6\,\text{А}$.



Решение задачи: Пусть U – напряжение на диоде. Положительные направления токов в схеме выберем так, как показано на рисунке слева. Зависимость силы тока через диод от напряжения на нем задается некоторой функцией, график которой – это вольтамперная характеристика. Обозначим ее $I_D = f(U)$. Тогда напряжение на лампе $U_Л = \mathcal{E} - U$, и поэтому $I_Л = I_0 \cdot \sqrt{1 - \dfrac{U}{\mathcal{E}}}$.





Кроме того, по закону Ома для участка цепи с ЭДС $U = 2\mathcal{E} - I_R R \Rightarrow I_R = \dfrac{2\mathcal{E} - U}{R}$. Учитывая, что по закону непрерывности тока $I_D = I_Л + I_R$, получим уравнение для определения U:

$f(U) = \dfrac{2\mathcal{E} - U}{R} + I_0 \cdot \sqrt{1 - \dfrac{U}{\mathcal{E}}}$. Так как функция f задана нам графически, то и решать это уравнение нужно графически. Для этого построим график функции из правой части уравнения (пунктиром показаны графики прямой и параболы, построенные для обоих слагаемых в этой части, красной линией – требуемый график). Затем найдем точку пересечения этого графика с графиком $I = f(U)$ (см. рисунок справа). Как видно, $U \approx 1{,}77\,\text{В}$ и $I_D \approx 0{,}81\,\text{А}$. Следовательно, мощность, потребляемая диодом в этой схеме $P_D = UI_D \approx 1{,}43\,\text{Вт}$.

Ответ: $P_D \approx (1{,}43 \pm 0{,}02)\,\text{Вт}$ (зачетный диапазон для численного ответа: от 1,38 Вт до 1,48 Вт, и для частичного зачета – от 1,34 Вт до 1,53 Вт).

Комментарий: Конечно, графическое решение по «нарисованному» графику предполагает некоторый разброс ответов. Но в действительности для нахождения корня уравнения с хорошей точностью достаточно было нанести на график три точки для правой части уравнения в окрестности корня с «удобными» для расчета числами, например, при $U = 1\,\text{В}$ ($I \approx 0{,}9\,\text{А}$ с высокой точностью и считается без калькулятора), $U = 1{,}8\,\text{В}$ ($I = 0{,}81\,\text{А}$, считается без калькулятора, причем эта точка на графике лежит очень близко «справа» от ВАХ диода и сама по себе уже попадает в «узкий» зачетный диапазон - $P_D = 1{,}458\,\text{Вт}$, так что можно считать это значение гарантированным ограничением «сверху» на значение мощности!) и $U = 2{,}5\,\text{В}$ ($I \approx 0{,}73\,\text{А}$ с высокой точностью и считается без калькулятора всяким, кто помнит значение $\sqrt{2}$ или $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$), провести через эти три точки кривую и посмотреть пересечение с ВАХ диода – все, кто так делал во время «тестирования», получали (не зная ответа) ответ в диапазоне от 1,40 Вт до 1,45 Вт.

PS: ВАХ диода – не парабола. По построению это участок дуги эллипса. Но для решения это неважно. Аккуратная аппроксимация нарисованной кривой параболой по трем точкам приводит к ответам 1,45-1,46 Вт, но заметно усложняет расчеты. Аппроксимация параболой по двум точкам не вполне корректна.

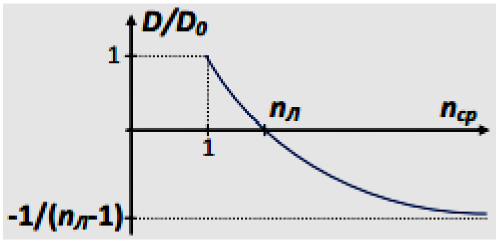
Задание 4:

Вопрос: Как изменится (по сравнению со значением в воздухе) оптическая сила тонкой линзы, если погрузить ее в прозрачную жидкость, показатель преломления которой больше, чем у воздуха?

Задача: Тонкая плосковыпуклая линза немного погружена в воду своей горизонтальной плоской стороной (выпуклая поверхность линзы находится в воздухе). На линзу падает сверху узкий вертикальный пучок света, ось которого проходит точно через вершину выпуклой поверхности. Этот пучок фокусируется в воде на глубине $h = 20$ см. Оптическая сила линзы в воздухе $D = 7$ дптр. Найти показатель преломления воды.

Ответ на вопрос: В рамках приближения тонкой линзы оптическая сила линзы, помещенной в однородную среду, определяется формулой $D = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$, где $n = \frac{n_Л}{n_{ср}}$ – показатель преломления вещества линзы относительно окружающей среды, а радиусы поверхностей линзы $R_{1,2}$ считаются положительными для выпуклой поверхности и отрицательными для вогнутой*. Показатель преломления воздуха можно считать равным 1, так что отношение оптической силы линзы в среде к ее оптической силе в воздухе D_0 равно $\frac{D}{D_0} = \frac{n_Л - n_{ср}}{n_{ср}(n_Л - 1)}$.

Как видно, при $1 < n_{ср} < n_Л$ оптическая сила линзы убывает по модулю, сохраняя тот же знак, что и в воздухе, при $n_{ср} = n_Л$ оптическая сила обращается в ноль, а при $n_{ср} > n_Л$ оптическая сила меняет знак (то есть собирающая линза превращается в рассеивающую и наоборот), а по модулю растет, и для $n_{ср} >> n_Л$ оптическая сила $D \approx -\frac{D_0}{n_Л - 1}$. Можно описать все эти изменения с помощью графика (см. рисунок).



***Ответ не обязательно обосновывать с помощью этой формулы.** Достаточно указать, что оптическая сила тонкой линзы линейно зависит от показателя преломления ее вещества относительно среды (это можно легко обосновать, если сослаться на закон преломления и использование параксиального приближения, хотя само обоснование не является необходимым для участника) и обращается в ноль при совпадении его с 1. Ясно, что это приводит к выводу, что $D = C\cdot(n-1)$, где C зависит только от геометрических параметров линзы, и этого достаточно для построения ответа.

Решение задачи: Из условия ясно, что ось пучка совпадает с главной оптической осью линзы и пучок является параксиальным (угол падения крайнего луча на выпуклую поверхность линзы, как и угол преломления его для плоской поверхности, малы). Преломление луча на выпуклой поверхности и ход луча внутри линзы не зависит от того, погружена плоская сторона в воду или нет, поэтому крайний луч в обоих случаях выйдет из линзы в одной и той же точке (обозначим расстояние от этой точки до оси r) и попадет в фокус линзы, то есть в воздухе он пересечет оптическую ось на расстоянии $F = 1/D$ от линзы, а в воде – на расстоянии h. Поэтому тангенс угла преломления этого луча для плоской поверхности равен $tg(\beta) = \frac{r}{F} = Dr$ в воздухе и $tg(\beta') = \frac{r}{h}$ в воде. Для малых углов ($r << F$) тангенсы примерно равны самим углам в радианной мере, как и синусы, поэтому $\frac{tg(\beta')}{tg(\beta)} = \frac{1}{Dh} \approx \frac{\sin(\beta')}{\sin(\beta)}$. С другой стороны, по закону преломления: $\sin(\beta') = \frac{n_Л}{n}\sin(\alpha)$, $\sin(\beta) = n_Л \sin(\alpha)$, где $n_Л$ - показатель преломления материала линзы, n- воды, а α- одинаковый в обоих случаях угол падения крайнего луча на плоскую поверхность (показатель преломления воздуха мы приняли равным 1). Следовательно, $n \approx Dh = 1{,}4$.

Ответ: $n \approx Dh = 1{,}4$.