Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2021/2022 учебного года для 9 класса

1. Работники должны были вскопать несколько одинаковых грядок. В первый день работники вскопали 10 грядок, причем каждый вскопал одинаковое количество (не обязательно целое число грядок). На следующий день некоторые работники заболели COVID-19 и на работу вышло только 7 человек. Пришедшие работали половину рабочего дня с такой же производительностью, как и в первый день, и доделали оставшуюся работу.

Сколько всего грядок было на подсобном участке?

Ответ: 11.

Решение: Пусть *n* - число работников в первый день, *m* - число грядок, *p* - производительность одного работника, измеренная в грядках/день. Из первого условия $p \cdot n = 10$, из второго - $7 \cdot p \cdot \frac{1}{2} = m - 10$. Выразим *p* из первого уравнения и подставим во второе: $\frac{35}{n} = m - 10$, следовательно, *n* является делителем 35. Но, поскольку $n > 7$, то единственный вариант $n = 35$, откуда $m = 11$.

2. Будем обозначать $\overline{abc}$ трехзначные числа, записанные цифрами a, b, c. Сколько существует трехзначных чисел, таких, что разность $\overline{abc} - \overline{acb}$ делится на 72 без остатка?

Ответ:126.

Решение: $\overline{abc} - \overline{acb} = 100a + 10b + c - (100a + 10c + b) = 9(b - c)$. Это число кратно 72, если $(b - c)$ кратно 8. Имеем 10 вариантов, если $b = c$, два варианта для $b - c = 8$ и два варианта для $b - c = -8$. Итого 14 комбинаций b, c умножаем на 9 вариантов a (число не может начинаться с нуля).

3. Найдите все пары натуральных чисел (x, y), для которых выполнено равенство

$$(x + y) \cdot (x + y + 1) + y = 2022.$$

Ответ: (2;42).

Решение: Если $x + y \geq 45$, то левая часть больше $45 \cdot 46 = 2070$ и равенство невозможно.

Если $x + y \leq 43$, то $(x + y) \cdot (x + y + 1) \leq 43 \cdot 44 = 1892$, поэтому $y \geq 2022 - 1892 = 130$, что невозможно.

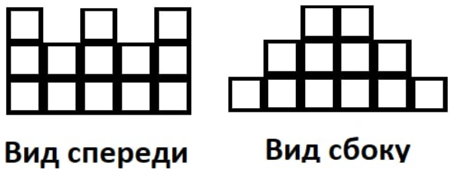
Остается вариант $x + y = 44$, при подстановке получим $1980 + y = 2022$, откуда $y = 42, x = 2$.

Альтернативное решение: Запишем цепочку неравенств

$$(x + y) \cdot (x + y + 1) < (x + y) \cdot (x + y + 1) + y = 2022 < (x + y) \cdot (x + y + 2)$$

и сделаем замену $x + y = t$, тогда $t^2 + t < 2022$ и $2022 < t^2 + 2t$. Решим эти неравенства, единственное общее решение в натуральных числах $t = 44$.

4. Петя строит замок из кубиков. В какой-то момент он изобразил недостроенный замок в трех проекциях: вид спереди, вид сбоку и вид сверху. Какое наименьшее количество кубиков может быть изображено на виде сверху?



Ответ: 7.

5. Учитель выписал на доске квадратное уравнение

$$x^2 + ax + 2022 = 0.$$

Андрей подставил вместо *a* по очереди все целые числа от 0 до 99 и решил все из получившихся 100 уравнений. Найдите сумму всех получившихся у Андрея действительных корней этих уравнений. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: -945.

Решение. Так как дискриминант уравнения, равный $a^2 - 4 \cdot 2022$, неотрицателен при $|a| \geq 2\sqrt{2022} > 2 \cdot 44{,}5 = 89$, то уравнение имеет 2 корня при всех $a \geq 90$, а при $a \in [0; 89]$ действительных корней не имеет. Так как сумма двух корней по теореме Виета равна $-a$, то сумма всех действительных корней равна $-(90 + 91 + 92 + \cdots + 99) = -\frac{90+99}{2} \cdot 10 = -945$.

6. К середине XXII века человечество освоило 100 обитаемых планет в других звездных системах . От каждой планеты расходится 40 гиперпространственных порталов, и к каждой планете ведёт 40 порталов от других планет. Все порталы строго односторонние, т.е. если есть портал, ведущий из *A* в *B*, то нет портала, ведущего из *B* в *A*. Мистер Риггз хочет добраться с Галатеи-37 на Пандору за наименьшее число гиперпространственных прыжков. Сколько прыжков ему может потребоваться (укажите все варианты)?

Ответ: 1, 2 или 3.

Решение: Докажем, что кратчайший маршрут потребует не более 3 прыжков. Пусть нет прямого маршрута с Галатеи на Пандору. Тогда разобьем планеты на 3 множества:

А - планеты, на которые ведут порталы с Галатеи 37 (40 штук);

Б - Планеты, с которых ведут порталы на Пандору и сама Пандора (41 штука);

В - все остальные .

Если множества А и Б имеют пересечение, то существует маршрут длины 2. Пусть не пересекаются, тогда В состоит из 19 планет.

С планет множества А выходит 40*40=1600 порталов. На планеты множества А ведут не более $40 * \frac{39}{2} = 780$ из них. А на планеты множества В ведут не более $40 * 19 = 760$. Всего получаем $780 + 760 = 1540 < 1600$, следовательно, существуют порталы, ведущие на планеты из множества Б. Тогда найдется маршрут длины 2 или 3.