Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2021/2022 учебного года для 5-6 класс

1. На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Однажды они собирали бананы и кокосы. Оказалось, что количество собранных бананов и количество собранных кокосов у всех разное. Каждый житель острова высказал два утверждения:

   1) "Нет шести жителей, которые собрали бананов больше, чем я",

   2) "Хотя бы у семи жителей больше кокосов, чем у меня".

Могло ли это быть и, если да, сколько и каких жителей могло быть на острове? Укажите все возможные ответы.

Ответ: 13 жителей: 6 рыцарей, 7 лжецов

Решение:

1) Если рыцарей больше 6, то рыцарь с наименьшим числом бананов солгал в первом утверждении, значит, рыцарей не больше 6. Если предположить, что их строго меньше 6, то среди 6 человек, собравших наибольшее количество бананов, будет лжец, для которого первое утверждение окажется истинным - такого быть не может. Значит, рыцарей ровно 6.

2)Если лжецов больше 7, то для лжеца с наименьшим количеством кокосов второе утверждение окажется истинным, чего быть не может. Значит, лжецов не больше 7, но строго меньше 7 их тоже быть не может, поскольку тогда среди 7 человек, собравших наибольшее число кокосов, будет рыцарь, для которого второе утверждение будет ложным. Значит, лжецов ровно 7.

3)Пример: 6 рыцарей и 7 лжецов: любой рыцарь собрал больше бананов, чем любой лжец, а каждый лжец собрал кокосов больше, чем любой рыцарь, все условия выполняются.

2. Назовем дату "палиндромом" если она слева направо и справа налево читается одинаково (точки не учитываются) . Например, дата 22.02.2022 является палиндромом. Когда наступит ближайшая следующая дата-палиндром?

Ответ 03.02.2030

Решение: Рассматриваем год (он однозначно задает палиндром). Проверим 2023 - не подходит (не бывает 32-го числа). 2024…2029 пропускаем, поскольку первая цифра числа не может быть больше трех. 2030-й подходит.

3. Коля делал домашнюю работу: за 2 часа он успел сделать половину заданий по математике, 3/4 заданий по физике и все задания по химии.

А когда он полностью закончил работу, то обнаружил, что на задания по химии ушло 25% от общего времени. Известно, что если бы он делал только физику, то сделал бы все задания по ней за час.

За какое время Коля сделал все задания?

Ответ: 2ч. 48мин.

Решение:

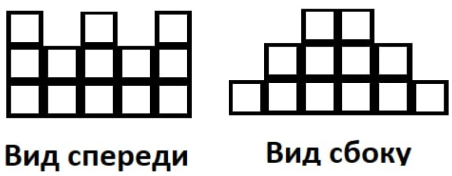
Если бы он сделал половину заданий по каждому из предметов, то на химию ушло бы 25% от этого (половинного) времени. Оставшуюся половину заданий по химии он бы делал еще 25% от этого времени, т.е. от общего времени ушло (100%+25%).2 = 62.5%. В итоге он потратил бы 1 час 45 мин на 62.5% задания (т.к. на ¼ задания по физике ушло 15 мин). Находим общее время из пропорции $\frac{\text{общее время}}{100} = \frac{105\text{мин}}{62.5}$, общее время = 168 мин.

4. Будем обозначать $\overline{abc}$ трехзначные числа, записанные цифрами a, b, c. Сколько существует трехзначных чисел, таких, что разность $\overline{abc} - \overline{acb}$ делится на 72 без остатка?

Ответ:126.

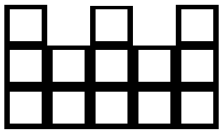
Решение: $\overline{abc} - \overline{acb} = 100a + 10b + c - (100a + 10c + b) = 9(b - c)$. Это число кратно 72, если $(b - c)$ кратно 8. Имеем 10 вариантов, если $b = c$, два варианта для $b - c = 8$ и два варианта для $b - c = -8$. Итого 14 комбинаций b, c умножаем на 9 вариантов a (число не может начинаться с нуля).

5. Петя строит замок из кубиков. В какой-то момент он изобразил недостроенный замок в трех проекциях: вид спереди, вид сбоку и вид сверху. Какое наименьшее количество кубиков может быть изображено на виде сверху?

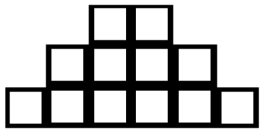


Ответ: 7.

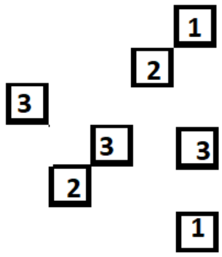
Решение: В конструкции должно быть не менее трех столбиков высоты 3, не менее двух высоты 2 и не менее двух высоты 1. Поэтому на виде сверху будет изображено не менее 7 кубиков. На рис. показано, что случай, когда их ровно 7, возможен.



Вид спереди



Вид сбоку



Вид сверху (цифра=высота столбики)

6. К середине XXII века человечество освоило 100 обитаемых планет в других звездных системах . От каждой планеты расходится 40 гиперпространственных порталов, и к каждой планете ведёт 40 порталов от других планет. Все порталы строго односторонние, т.е. если есть портал, ведущий из *A* в *B*, то нет портала, ведущего из *B* в *A*. Мистер Риггз хочет добраться с Галатеи-37 на Пандору за наименьшее число гиперпространственных прыжков. Сколько прыжков ему может потребоваться (укажите все варианты)?

Ответ: 1, 2 или 3.

Решение: Докажем, что кратчайший маршрут потребует не более 3 прыжков. Пусть нет прямого маршрута с Галатеи на Пандору. Тогда разобьем планеты на 3 множества:

А - планеты, на которые ведут порталы с Галатеи 37 (40 штук);

Б - Планеты, с которых ведут порталы на Пандору и сама Пандора (41 штука);

В - все остальные (включая Галатею) .

Если множества А и Б имеют пересечение, то существует маршрут длины 1 или 2. Пусть не пересекаются, тогда В состоит из 19 планет.

С планет множества А выходит 40*40=1600 порталов. В планеты множества А ведут не более $40 * \frac{39}{2} = 780$ из них. А в планеты множества В ведут не более $40 * 19 = 760$ из них. Всего получаем $780 + 760 = 1540 < 1600$, следовательно, существуют порталы, ведущие из А в Б. Тогда найдется маршрут длины 2 или 3.