*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*

# Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2021/2022 учебного года для 7-8 класса

1. На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Однажды они собирали бананы и кокосы. Оказалось, что количество собранных бананов и количество собранных кокосов у всех разное. Каждый житель острова высказал два утверждения:

   1) "Нет шести жителей, которые собрали бананов больше, чем я",

   2) "Хотя бы у семи жителей больше кокосов, чем у меня".

Могло ли это быть и, если да, сколько и каких жителей могло быть на острове? Укажите все возможные ответы.

**Ответ**: 13 жителей: 6 рыцарей, 7 лжецов

**Решение**:

1) Если рыцарей больше 6, то рыцарь с наименьшим числом бананов солгал в первом утверждении, значит, рыцарей не больше 6. Если предположить, что их строго меньше 6, то среди 6 человек, собравших наибольшее количество бананов, будет лжец, для которого первое утверждение окажется истинным - такого быть не может. Значит, рыцарей ровно 6.

2)Если лжецов больше 7, то для лжеца с наименьшим количеством кокосов второе утверждение окажется истинным, чего быть не может. Значит, лжецов не больше 7, но строго меньше 7 их тоже быть не может, поскольку тогда среди 7 человек, собравших наибольшее число кокосов, будет рыцарь, для которого второе утверждение будет ложным. Значит, лжецов ровно 7.

3)Пример: 6 рыцарей и 7 лжецов: любой рыцарь собрал больше бананов, чем любой лжец, а каждый лжец собрал кокосов больше, чем любой рыцарь, все условия выполняются.

2. Работники должны были вскопать несколько одинаковых грядок. В первый день работники вскопали 10 грядок, причем каждый вскопал одинаковое количество (не обязательно целое число) грядок. На следующий день некоторые работники заболели COVID-19 и на работу вышло только 7 человек. Пришедшие работали половину рабочего дня с такой же производительностью, как и в первый день, и доделали оставшуюся работу.

Сколько всего грядок было на подсобном участке?

**Ответ**: 11.

**Решение**: Пусть $n$ - число работников в первый день, $m$ - число грядок, $p$ - производительность одного работника, измеренная в грядках/день. Из первого условия $p \cdot n = 10$, из второго - $7 \cdot p \cdot$

$\frac{1}{2} = m - 10$. Выразим $p$ из первого уравнения и подставим во второе: $\frac{35}{n} = m - 10$, следовательно, $n$ является делителем 35. Но, поскольку $n > 7$, то единственный вариант $n = 35$, откуда $m = 11$.

3. Будем обозначать $\overline{abc}$ трехзначные числа, записанные цифрами $a, b, c$. Сколько существует трехзначных чисел, таких, что разность $\overline{abc} - \overline{acb}$ делится на 72 без остатка?

**Ответ**:126.

**Решение**: $\overline{abc} - \overline{acb} = 100a + 10b + c - (100a + 10c + b) = 9(b - c)$. Это число кратно 72, если $(b - c)$ кратно 8. Имеем 10 вариантов, если $b = c$, два варианта для $b - c = 8$ и два варианта для $b - c = -8$. Итого 14 комбинаций $b, c$ умножаем на 9 вариантов $a$ (число не может начинаться с нуля).

4. Найдите все пары натуральных чисел $(x, y)$, для которых выполнено равенство

$$(x + y) \cdot (x + y + 1) + 2y = 100.$$

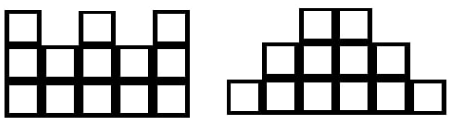
**Ответ**: (4;5).

**Решение**: Если $x + y \geq 10$, то левая часть больше 110 и равенство невозможно.

Если $x + y \leq 8$, то $(x + y) \cdot (x + y + 1) \leq 8 \cdot 9 = 72$, поэтому $2y \geq 100 - 72 = 28$, что невозможно.

Остается вариант $x + y = 9$, при подстановке получим $90 + 2y = 100$, откуда $y = 5, x = 4$.

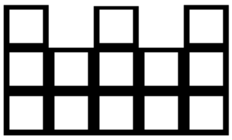
5. Петя строит замок из кубиков. В какой-то момент он изобразил недостроенный замок в трех проекциях: вид спереди, вид сбоку и вид сверху. Какое наименьшее количество кубиков может быть изображено на виде сверху?



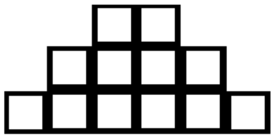
**Вид спереди** **Вид сбоку**

**Ответ**: 7.

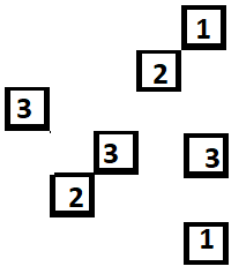
**Решение**: В конструкции должно быть не менее трех столбиков высоты 3, не менее двух высоты 2 и не менее двух высоты 1. Поэтому на виде сверху будет изображено не менее 7 кубиков. На рис. показано, что случай, когда их ровно 7, возможен.



**Вид спереди**



**Вид сбоку**




**Вид сверху (цифра=высота столбики)**

6. К середине XXII века человечество освоило 100 обитаемых планет в других звездных системах . От каждой планеты расходится 40 гиперпространственных порталов, и к каждой планете ведёт 40 порталов от других планет. Все порталы строго односторонние, т.е. если есть портал, ведущий из $A$ в $B$, то нет портала, ведущего из $B$ в $A$. Мистер Риггз хочет добраться с Галатеи-37 на Пандору за наименьшее число гиперпространственных прыжков. Сколько прыжков ему может потребоваться (укажите все варианты)?

**Ответ**: 1, 2 или 3.

**Решение**: Докажем, что кратчайший маршрут потребует не более 3 прыжков. Пусть нет прямого маршрута с Галатеи на Пандору. Тогда разобьем планеты на 3 множества:

А - планеты, на которые ведут порталы с Галатеи 37 (40 штук);

Б - Планеты, с которых ведут порталы на Пандору и сама Пандора (41 штука);

В - все остальные(включая Галатею) .

Если множества А и Б имеют пересечение, то существует маршрут длины 2. Пусть не пересекаются, тогда В состоит из 19 планет.

С планет множества А выходит 40*40=1600 порталов. В планеты множества А ведут не более $40 * \frac{39}{2} = 780$ из них. А в планеты множества В ведут не более $40 * 19 = 760$. Всего получаем $780 + 760 = 1540 < 1600$, следовательно, существуют порталы, ведущие из А в Б. Тогда найдется маршрут длины 2 или 3.