Отборочный этап олимпиады «Покори Воробьёвы горы!» по математике длился 24 часа. Он состоял из блиц-тура (6 задач, ответы к которым нужно отправить в течение 3 часов) и творческой части (3 задачи, полное решение которых нужно отправить в течение оставшегося времени).

Отборочный этап. Блиц-тур

Каждый участник блиц-тура получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Приводим типичный набор из шести задач блиц-тура.

1. Решите неравенство $(x-2)\cdot\sqrt{\frac{2x-2}{x-2}} \leqslant x+2$.

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих этому неравенству и не превосходящих по абсолютной величине 12.

Ответ: -25.

Решение. При $x>2$ левая и правая части неравенства положительны, и поэтому исходное неравенство равносильно неравенству

$$(x-2)^2\cdot\frac{2\,(x-1)}{x-2} \leqslant (x+2)^2 \Longleftrightarrow 2\,(x-2)\,(x-1) \leqslant x^2+4x+4$$

$x^2-10x \leqslant 0$ $x\in[0;10]$. Значит, $x\in(2;10]$.

При $x\in(1;2]$ неравенство не определено. При $x\in[-2;1]$ неравенство выполнено (левая его часть отрицательна, а правая неотрицательна).

Наконец, при $x<-2$ левая и правая части неравенства отрицательны, и поэтому исходное неравенство равносильно неравенству

$$(x-2)^2\cdot\frac{2\,(x-1)}{x-2} \geqslant (x+2)^2 \Longleftrightarrow x^2-10x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x\in(-\infty;0]\cup[10;\ +\infty).$$

Значит, $x\in(-\infty;\ -2)$.

Таким образом, $x\in(-\infty;1]\cup(2;10]$. В интервал $[-12;12]$ входят целые числа -12, -11, -10, ..., -1, 0, 1, 3, 4, …, 10. Их сумма равна $-12-11-2=-25$.

2. Решите уравнение $\sin 3x+\sin x=4\,\sin^3 x$. В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку $\left[-\frac{35\pi}{6};-\frac{11\pi}{2}\right]$, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

Ответ: $-18,06$.

Решение. Переходя от суммы синусов к произведению, получаем $2\sin 2x\cos x=4\sin^3 x$, откуда $\sin x=0$ или $\sin^2 x=\cos^2 x$, то есть $x=\pi k$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $k,n\in\mathbb{Z}$. В заданный интервал $\left[\frac{\pi}{6}-6\pi;\frac{\pi}{2}-6\pi\right]$ попадает одно значение $x=\frac{\pi}{4}-6\pi=-\frac{23}{4}\pi\approx-18,06$.

Можно было решить задачу иначе, с помощью формулы синуса тройного угла.

3. Из точки M, лежащей внутри треугольник ABC, проведены перпендикуляры MD, ME, MF на стороны BC, AC, AB соответственно. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника DEF, если известно, что $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $MD=k$, $MF=m$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

$a=8$, $b=7$, $c=6$, $k=3$, $m=1$.

Ответ: 6.

Решение. Введем обозначение $l = ME$, $S_1 = S_{\triangle MFD}$, $S_2 = S_{\triangle MDE}$, $S_3 = S_{\triangle MEF}$, $S = S_{\triangle ABC}$. Из равенства $S = \frac{1}{2}(mc + ka + lb)$ найдем

$$l = \frac{2S - mc - ka}{b}.$$

Справедливо

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\frac{1}{2} \cdot mk \cdot \sin(\pi - \beta)}{\frac{1}{2} \cdot ac \cdot \sin\beta} = \frac{mk}{ac}, \quad \frac{S_2}{S} = \frac{lk}{ab}, \quad \frac{S_3}{S} = \frac{lm}{bc}.$$

Сложив почленно все равенства, получим

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{mk}{ac} + \frac{lk}{ab} + \frac{lm}{bc} = \frac{mk}{ac} + \left(\frac{k}{a} + \frac{m}{c}\right) \cdot \frac{2S - mc - ka}{b^2}.$$

Таким образом, ответ:

$$\left(\frac{mk}{ac} + \left(\frac{k}{a} + \frac{m}{c}\right) \cdot \frac{2S - mc - ka}{b^2}\right)^{-1},$$

где $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$. Подстановка числовых данных приводит к выкладкам, из которых получается иррациональное число, ближайшее целое есть 6.

4. Решите систему

$$\begin{cases} 3\left(x^4 + y^4\right) = 17\left(x^3 y + x y^3\right), \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k + y_k$ для каждого решения $(x_k,\ y_k)$ системы и найдите среди них максимальное. В ответе укажите найденное максимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 2,83.

Решение. Замена $a = x^2 + y^2$, $b = xy$ сводит систему к следующей:

$$\begin{cases} 3\left(a^2 - 2b^2\right) = 17ab, \\ a = 6. \end{cases}$$

Отсюда $b^2 + 17b - 18 = 0$, и b равно 1 или -18.

Если $a = 6$, $b = 1$, то $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 8, \\ (x-y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+y| = 2\sqrt{2}, \\ |x-y| = 2. \end{cases}$

Если $a = 6$, $b = -18$, то $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ xy = -18. \end{cases}$ Здесь решений нет.

Максимальное значение выражения $x + y$ равно $2\sqrt{2} \approx 2,83$.

5. Два школьника катаются на коньках с постоянными скоростями по замкнутому кругу беговой дорожки ледового стадиона. Если они бегут в разных направлениях, то их встречи происходят в четыре раза чаще, чем происходят обгоны в случае, когда они бегут в одном направлении. Скорость одного из школьников равна 6 м/сек. Найдите наименьшую возможную скорость другого школьника (в метрах в секунду).

Ответ: 3,6.

Решение. При движении навстречу время между встречами равно $t_1 = \frac{L}{V_1 + V_2}$, при попутном движении время между обгонами: $t_2 = \frac{L}{V_1 - V_2}$ (здесь L – длина одного круга, V_1, V_2 – скорости). По условию $\frac{t_2}{t_1} = 4$, поэтому $\frac{V_1 + V_2}{V_1 - V_2} = 4$, откуда $\frac{V_2}{V_1} = \frac{3}{5}$.

Так как неизвестно, скорость кого из школьников дана, то или $\frac{6}{V} = \frac{3}{5}$ (тогда $V = 10$ м/сек), или $\frac{V}{6} = \frac{3}{5}$ (тогда $V = 3,6$ м/сек). Наименьшее значение скорости равно 3,6.

6. Найдите сумму всех целых значений a, не превосходящих по абсолютной величине 20, при каждом из которых неравенство

$$x^2 + (a+1)\,x - 6a^2 + 3a < 0$$

выполняется для всех значений $x \in [1;5]$.

Ответ: -5.

Решение. По обратной теореме Виета квадратичная функция $f(x) = x^2 + (a+1)\,x - 6a^2 + 3a$ имеет корни $-3a$ и $2a-1$. Так как ветви этой квадратичной функции направлены вверх, то условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда весь отрезок $[1;5]$ целиком находится между корнями уравнения. Значит,

$$\left[\begin{array}{l} -3a < 1 < 5 < 2a-1, \\ 2a-1 < 1 < 5 < -3a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} a > 3, \\ a < -\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Поэтому искомая сумма есть $-20 - 19 - \cdots - 2 + 4 + \cdots + 20 = -3 - 2 = -5$.

Набор творческих задач.

I. Найдите сумму

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + 59 \cdot 61.$$

Ответ: 37790.

Решение. В общем виде:

$$\begin{gathered} 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2n-1) \cdot (2n+1) = \\ = (2-1)\,(2+1) + (4-1)\,(4+1) + \cdots + (2n-1)\,(2n+1) = \\ = 2^2 - 1 + 4^2 - 1 + \cdots + (2n)^2 - 1 = \\ = 4\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) - n = \\ = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - n = \frac{n\,(2\,(n+1)\,(2n+1) - 3)}{3}. \end{gathered}$$

В нашем случае при $n = 30$ получаем $\frac{30(2 \cdot 31 \cdot 61 - 3)}{3} = 10 \cdot (62 \cdot 61 - 3) = 37790$.

□

Варианты.

1.1. Найдите сумму

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + 59 \cdot 61.$$

Ответ: 37790.

1.2. Найдите сумму

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + 69 \cdot 71.$$

Ответ: 59605.

1.3. Найдите сумму

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + 79 \cdot 81.$$

Ответ: 88520.

1.4. Найдите сумму

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + 89 \cdot 91.$$

Ответ: 125535.

1.5. Найдите сумму

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + 73 \cdot 75.$$

Ответ: 70263.

1.6. Найдите сумму

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + 83 \cdot 85.$$

Ответ: 102298.

1.7. Найдите сумму

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + 93 \cdot 95.$$

Ответ: 142833.

1.8. Найдите сумму

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + 71 \cdot 73.$$

Ответ: 64788.

1.9. Найдите сумму

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + 81 \cdot 83.$$

Ответ: 95243.

1.10. Найдите сумму

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + 91 \cdot 93.$$

Ответ: 133998.

1.11. Найдите сумму

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + 65 \cdot 67.$$

Ответ: 50083.

1.12. Найдите сумму

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + 75 \cdot 77.$$

Ответ: 76038.

1.13. Найдите сумму

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + 85 \cdot 87.$$

Ответ: 109693.

1.14. Найдите сумму

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + 95 \cdot 97.$$

Ответ: 152048.

II. Точки A, B и C принадлежит множествам, заданным на координатной плоскости Oxy уравнениями $y - 2x - 1 = 0$, $y - 7 + 3x = 0$ и $y - 1 = 0$ соответственно. Точка D принадлежит множеству, заданному на координатной плоскости Oxy неравенством

$$(y - 2x - 1)\,(y - 7 + 3x)\,(y - 1) > 0.$$

Найдите минимально возможное значение $AD^2 + BD^2 + CD^2$.

Решение. **1.** Первые три множества – прямые линии (см. рисунок 1). Четвертое множество закрашено на рисунке, оно состоит из четырех областей: центральная область, ограниченная данными прямыми, и три полубесконечные области, каждая из которых ограничена двумя прямыми.

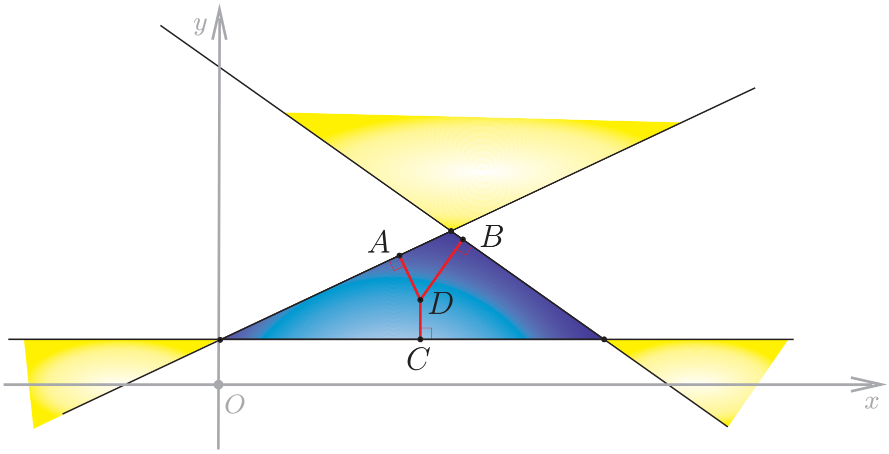

Рис. 1:

2. Рассмотрим представленную на рисунке ситуацию, когда точка D находится внутри центрального треугольника. Пусть стороны треугольника равны a, b, c. Обозначим $AD = x$, $BD = y$, $CD = z$.

Тогда мы можем найти площадь треугольника S (в общем случае – по формуле Герона, а в данном случае, учитывая, что одна из сторон параллельна оси, как полупроизведение основания на высоту). С другой стороны, площадь равна $\frac{ax+by+cz}{2}$.

Таким образом, $2S = ax + by + cz$. Далее можно сделать оценку с помощью неравенства Коши-Буняковского-Шварца:

$$4S^2 = (ax + by + cz)^2 \leqslant \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

Отсюда $x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}$. Это и есть минимальное значение. Оно достигается при $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Можно доказать, что в этом случае точка D находится внутри центрального треугольника.

3. Отметим, что минимум не может достигаться, если точка D находится не в центральном треугольнике, а в одной из трех полубесконечных областей. Если предположить обратное, то можно поставить в соответствие этой точке какую-то точку внутри центрального треугольника, для которой сумма квадратов будет меньше.

По другому объяснить факт о том, что минимум не может достигаться, если точка D находится не в центральном треугольнике, а в одной из трех полубесконечных областей можно так: *Площадь треугольника будет равна (например, когда мы находимся в желтой области напротив стороны c) $(ax + by - cz)/2$, оценка на сумму квадратов получится ровно такая же по неравенству Коши-Буняковского-Шварца выше, но достижима она только если x, y одного знака, а z — другого, что невозможно.*

4. Таким образом, минимальное значение равно $\frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}$. При данных числовых данных получим последовательно:

a. координаты точек пересечения прямых: $\left(\frac{6}{5}; \frac{17}{5}\right)$, $(0;1)$, $(2;1)$;

b. длины сторон треугольника: $a = \frac{6\sqrt{5}}{5}$; $b = \frac{4\sqrt{10}}{5}$; $c = 2$;

c. площадь треугольника: $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{17}{5} - 1\right) = \frac{12}{5}$.

d. Тогда искомый минимум равен $\frac{4 \cdot 144}{25 \cdot \left(\frac{36}{5} + \frac{32}{5} + 4\right)} = \frac{72}{55} \approx 1,31$.

5. Заметим, что задача поиска минимума суммы квадратов расстояний до трех сторон треугольника от точки внутри треугольника – классическая задача планиметрии. Точка D, в которой достигается минимум, называется точкой Лемуана.

Ответ: $1,31$.

$\square$

2-1. Точки A, B и C принадлежит множествам, заданным на координатной плоскости Oxy уравнениями $y - 2x - 1 = 0$, $y - 7 + 3x = 0$ и $y - 1 = 0$ соответственно. Точка D принадлежит множеству, заданному на координатной плоскости Oxy неравенством

$$(y - 2x - 1)\,(y - 7 + 3x)\,(y - 1) > 0.$$

Найдите минимально возможное значение $AD^2 + BD^2 + CD^2$.
Ответ: 1,31.

2-2. Точки A, B и C принадлежит множествам, заданным на координатной плоскости Oxy уравнениями $y - 3x - 1 = 0$, $y - 5 + 2x = 0$ и $y - 1 = 0$ соответственно. Точка D принадлежит множеству, заданному на координатной плоскости Oxy неравенством

$$(y - 3x - 1)\,(y - 5 + 2x)\,(y - 1) > 0.$$

Найдите минимально возможное значение $AD^2 + BD^2 + CD^2$.
Ответ: 1,31.

2-3. Точки A, B и C принадлежит множествам, заданным на координатной плоскости Oxy уравнениями $y - 2x - 1 = 0$, $y - 9 + 4x = 0$ и $y - 1 = 0$ соответственно. Точка D принадлежит множеству, заданному на координатной плоскости Oxy неравенством

$$(y - 2x - 1)\,(y - 9 + 4x)\,(y - 1) > 0.$$

Найдите минимально возможное значение $AD^2 + BD^2 + CD^2$.
Ответ: 1,39.

2-4. Точки A, B и C принадлежит множествам, заданным на координатной плоскости Oxy уравнениями $y - 4x - 1 = 0$, $y - 5 + 2x = 0$ и $y - 1 = 0$ соответственно. Точка D принадлежит множеству, заданному на координатной плоскости Oxy неравенством

$$(y - 4x - 1)\,(y - 5 + 2x)\,(y - 1) > 0.$$

Найдите минимально возможное значение $AD^2 + BD^2 + CD^2$.
Ответ: 1,39.

2-5. Точки A, B и C принадлежит множествам, заданным на координатной плоскости Oxy уравнениями $y - 2x - 1 = 0$, $y - 13 + 3x = 0$ и $y - 1 = 0$ соответственно. Точка D принадлежит множеству, заданному на координатной плоскости Oxy неравенством

$$(y - 2x - 1)\,(y - 13 + 3x)\,(y - 1) > 0.$$

Найдите минимально возможное значение $AD^2 + BD^2 + CD^2$.
Ответ: 5,24.

2-6. Точки A, B и C принадлежит множествам, заданным на координатной плоскости Oxy уравнениями $y-3x-1=0$, $y-9+2x=0$ и $y-1=0$ соответственно. Точка D принадлежит множеству, заданному на координатной плоскости Oxy неравенством

$$(y-3x-1)\,(y-9+2x)\,(y-1)>0.$$

Найдите минимально возможное значение $AD^2+BD^2+CD^2$.
Ответ: 5,24.

2-7. Точки A, B и C принадлежит множествам, заданным на координатной плоскости Oxy уравнениями $y-2x-1=0$, $y-17+4x=0$ и $y-1=0$ соответственно. Точка D принадлежит множеству, заданному на координатной плоскости Oxy неравенством

$$(y-2x-1)\,(y-17+4x)\,(y-1)>0.$$

Найдите минимально возможное значение $AD^2+BD^2+CD^2$.
Ответ: 5,57.

2-8. Точки A, B и C принадлежит множествам, заданным на координатной плоскости Oxy уравнениями $y-4x-1=0$, $y-9+2x=0$ и $y-1=0$ соответственно. Точка D принадлежит множеству, заданному на координатной плоскости Oxy неравенством

$$(y-4x-1)\,(y-9+2x)\,(y-1)>0.$$

Найдите минимально возможное значение $AD^2+BD^2+CD^2$.
Ответ: 5,57.

III. Заданы натуральные числа $a>1$ и $b>1$. Рекуррентно определяется последовательность: $x_0=0$, $x_1=1$,

$$x_{2k}=a\cdot x_{2k-1}-x_{2k-2},\quad x_{2k+1}=b\cdot x_{2k}-x_{2k-1}. \tag{1}$$

Найти НОД (x_m,x_s), где НОД (a,b) это наибольший общий делитель a и b.

Общий ответ: НОД $(x_p,x_q)=x_{\text{НОД}\,(p,q)}$, поэтому, например, НОД $(x_{2023},x_{2527})=x_7$, так как $2023=7\cdot17^2$, $2527=7\cdot19^2$.

Решение. **1.** Получим рекуррентную формулу:

$$x_{k+2}=(ab-2)x_k-x_{k-2}.$$

Действительно, из формул (1) имеем:

$$x_{2k}=a\cdot x_{2k-1}-x_{2k-2}=a\cdot(b\cdot x_{2k-2}-x_{2k-3})-x_{2k-2}=(ab-1)x_{2k-2}-a\cdot x_{2k-3}.$$

С другой стороны, $a\cdot x_{2k-3}=x_{2k-2}+x_{2k-4}$, откуда

$$x_{2k}=(ab-2)x_{2k-2}-x_{2k-4}.$$

Аналогично,

$$x_{2k+1}=b\cdot x_{2k}-x_{2k-1}=b(a\cdot x_{2k-1}-x_{2k-2})-x_{2k-1}=(ab-1)x_{2k-1}-b\cdot x_{2k-2}.$$

Учитывая, что $b\cdot x_{2k-2}=x_{2k-1}+x_{2k-3}$, получаем искомое соотношение и для нечетных индексов:

$$x_{2k+1}=(ab-2)x_{2k-1}-x_{2k-3}.$$

2. Докажем, при помощи индукции по n рекуррентную формулу

$$a \cdot x_{k+2n} = x_{2n+2} \cdot x_k - x_{2n} \cdot x_{k-2}$$

Доказательство.

a. При $n = 0$ база индукции верна: $a \cdot x_k = x_2 \cdot x_k$, так как $x_2 = a$.

b. Пусть формула

$$a \cdot x_{k+2j} = x_{2n+2} \cdot x_k - x_{2j} \cdot x_{k-2}$$

справедлива при всех $j \leqslant n$.

c. При $j = n + 1$ получаем

$$a \cdot x_{k+2n+2} = a \cdot x_{(k+2)+2n} = x_{2n+2} \cdot x_{k+2} - x_{2n} \cdot x_k.$$

Подставляя в эту формулу

$$x_{2n+2} = \frac{x_{2n+4} + x_{2n}}{ab - 2}, \qquad x_{k+2} = (ab - 2)x_k - x_{k-2},$$

получаем

$$a \cdot x_{k+2n+2} = a \cdot x_{(k+2)+2n} = x_{2n+4} \cdot x_k - x_{2n} \cdot x_{k-2},$$

что совпадает с доказываемой формулой для $j = n + 1$.

3. Тогда

$$\begin{aligned} \text{НОД}\,(x_{k+2}, x_k) = \text{НОД}\,((ab-2)x_k - x_{k-2}, x_k) = \text{НОД}\,(x_k, x_{k-2}) = \ldots = \\ = \text{НОД}\,(x_2, x_0) = a \text{ для четного } k, \\ = \text{НОД}\,(x_3, x_1) = 1 \text{ для нечетного } k. \end{aligned}$$

Для чисел одной четности $p < q$ положим $n = \frac{q-p}{2}$. Тогда

$$a\,x_q = a\,x_{p+2n} = x_{2n+2}\,x_p - x_{2n}\,x_{p-2}$$

и поэтому $(x_q, x_p) = (x_{q-p}, x_p)$ (учитывая что для четных k, x_k делится на a, а для нечетных — не делится).

Откуда $(x_q, x_p) = x_{(q,p)}$ только для чётных чисел p и q. Но сейчас докажем, что это верно и для чисел p и q — разной чётности.

4a. Пусть теперь p — нечетное число. Докажем, что x_{2p} нацело делится на x_p. Действительно,

$$ax_{2p+1} = x_{p+3}x_p - x_{p+1}x_{p-2}$$

и

$$ax_{2p+1} = a(bx_{2p} - x_{2p-1}) = abx_{2p} - x_{p+1}x_p + x_{p-1}x_{p-2}.$$

Поэтому

$$abx_{2p} = (x_{p+3} + x_{p+1})x_p - (x_{p+1} + x_{p-1})x_{p-2} = ax_{p+2}x_p - ax_p x_{p-2}.$$

Учитывая, что $bx_{2k} = x_{2k+1} + x_{2k-1}$, получаем, что

$$bx_{2p} = (x_{p+2} - x_{p-2})x_p = ((x_{p+2} + x_p) - (x_{p-2} + x_p))x_p = b(x_{p+1} - x_{p-1})x_p,$$

а поэтому $x_p \mid x_{2p}$.

4b. Пусть p и k — нечетные числа. Из равенства $ax_{(k+1)p} = x_{(k-1)p+2}x_{2p} - x_{2p-2}x_{(k-1)p}$ и индукции вытекает, что $x_{(k+1)p}$ нацело делится на x_{2p}. Получаем

$$(ax_{kp}, x_{2p}) = (x_{(k-1)p+2}x_p - x_{(k-1)p}x_{p-2}, x_{2p}) = (x_{(k-1)p+2}x_p, x_{2p}).$$

Учитывая, что $(x_{(k-1)p+2}, x_{2p}) = x_2 = a$, получаем $(x_{kp}, x_{2p}) = x_p$.

4c. Наконец, пусть p и q числа разной четности, а именно p — нечетное, q — четное. Пусть $d = (p, q)$ и $k = p/(p, q)$. По доказанному имеем $(x_{2p}, x_q) = x_{2d}$. Используя то, что x_{2p} нацело делится на x_p, получаем $(x_p, x_q) = (x_p, x_{2p}, x_q) = (x_p, x_{2d}) = (x_{kd}, x_{2d}) = x_d$.

Откуда $(x_q, x_p) = x_{(q,p)}$ уже для произвольных чисел p и q.

Ответ:

$\square$

3.1. Последовательность целых чисел задана рекуррентно: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$,

$$x_{2k} = 2 \cdot x_{2k-1} - x_{2k-2}, \quad x_{2k+1} = 3 \cdot x_{2k} - x_{2k-1}.$$

Найти НОД (x_{1428}, x_{1716}), где НОД (a, b) это наибольший общий делитель a и b.
Ответ: 1560

3.2. Последовательность целых чисел задана рекуррентно: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$,

$$x_{2k} = 2 \cdot x_{2k-1} - x_{2k-2}, \quad x_{2k+1} = 3 \cdot x_{2k} - x_{2k-1}.$$

Найти НОД (x_{1694}, x_{1274}), где НОД (a, b) это наибольший общий делитель a и b.
Ответ: 5822

3.3. Последовательность целых чисел задана рекуррентно: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$,

$$x_{2k} = 3 \cdot x_{2k-1} - x_{2k-2}, \quad x_{2k+1} = 2 \cdot x_{2k} - x_{2k-1}.$$

Найти НОД (x_{1672}, x_{1768}), где НОД (a, b) это наибольший общий делитель a и b.
Ответ: 168

3.4. Последовательность целых чисел задана рекуррентно: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$,

$$x_{2k} = 3 \cdot x_{2k-1} - x_{2k-2}, \quad x_{2k+1} = 2 \cdot x_{2k} - x_{2k-1}.$$

Найти НОД (x_{1092}, x_{3876}), где НОД (a, b) это наибольший общий делитель a и b.
Ответ: 2340

3.5. Последовательность целых чисел задана рекуррентно: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$,

$$x_{2k} = 3 \cdot x_{2k-1} - x_{2k-2}, \quad x_{2k+1} = 4 \cdot x_{2k} - x_{2k-1}.$$

Найти НОД (x_{1734}, x_{2166}), где НОД (a, b) это наибольший общий делитель a и b.
Ответ: 297

3.6. Последовательность целых чисел задана рекуррентно: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$,

$$x_{2k} = 3 \cdot x_{2k-1} - x_{2k-2}, \quad x_{2k+1} = 4 \cdot x_{2k} - x_{2k-1}.$$

Найти НОД (x_{1352}, x_{2312}), где НОД (a, b) это наибольший общий делитель a и b.
Ответ: 2940

3.7. Последовательность целых чисел задана рекуррентно: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$,

$$x_{2k} = 4 \cdot x_{2k-1} - x_{2k-2}, \quad x_{2k+1} = 3 \cdot x_{2k} - x_{2k-1}.$$

Найти НОД (x_{616}, x_{936}), где НОД (a, b) это наибольший общий делитель a и b.
Ответ: 3920

3.8. Последовательность целых чисел задана рекуррентно: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$,

$$x_{2k} = 2 \cdot x_{2k-1} - x_{2k-2}, \quad x_{2k+1} = 5 \cdot x_{2k} - x_{2k-1}.$$

Найти НОД (x_{616}, x_{936}), где НОД (a, b) это наибольший общий делитель a и b.
Ответ: 992

3.9. Последовательность целых чисел задана рекуррентно: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$,

$$x_{2k} = 5 \cdot x_{2k-1} - x_{2k-2}, \quad x_{2k+1} = 2 \cdot x_{2k} - x_{2k-1}.$$

Найти НОД (x_{1496}, x_{1456}), где НОД (a, b) это наибольший общий делитель a и b.
Ответ: 2480

3.10. Последовательность целых чисел задана рекуррентно: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$,

$$x_{2k} = 2 \cdot x_{2k-1} - x_{2k-2}, \quad x_{2k+1} = 7 \cdot x_{2k} - x_{2k-1}.$$

Найти НОД (x_{1122}, x_{1596}), где НОД (a, b) это наибольший общий делитель a и b.
Ответ: 286
