Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заочного этапа 2022/2023 учебного года для 10 класса

1. Магистр Рассеянных наук забыл пин-код от своего телефона. Он помнит, что пин-код был составлен из 6 различных цифр, идущих по возрастанию, причем первая цифра была 1. А еще он помнит, что это 6-значное число является точным квадратом (квадратом целого числа). Помогите магистру вспомнить пин-код.

Ответ: 134689
Решение: Обозначим $\overline{XYZ}^2 = \overline{1bcdef}$, где $1 < b < c < d < e < f$ (разные буквы, вообще говоря, могут означать одинаковые цифры). Заметим, что 123456 не является точным квадратом, поэтому $f \geq 7$. Но квадрат не может оканчиваться на 7 или 8, следовательно $f = 9$, $a\ Z = 3$ или 7.
Пусть $\overline{YZ} = 10q \pm 3$, тогда $\overline{YZ} = 100q^2 \pm 60q + 9$, т.е. $e \equiv \pm 6q\ (mod\ 10)$. Поскольку $e > 5$, то e=6 или 8. Проверяем, что числа 123469, 123569, 124569, 124569, 134569 не являются точными квадратами, поэтому $e = 8$.

Заметим, что $400^2 = 160000$, но b не может быть больше 6, поэтому $X < 4$. С другой стороны $300^2 = 90000$ - 5 значное число, значит $X \geq 3$. Следовательно, $X = 3$.
Кроме того, $340^2 = 115600 < 120000$, следовательно, $Y \geq 4$.

Будем решать $\overline{3YZ}^2 = \overline{1bcd89}$. Рассмотрим случаи:

- Случай $\mathrm{Z} = 3$: Тогда $\ldots 60Y + 9 = \cdots 89$, следовательно, $Y = 8$. ($Y = 3 < 4$ отбрасываем), проверяем$383^2 = 146689$ - не подходит (цифра 6 повторяется).
- Случай $\mathrm{Z} = 7$: Тогда $\ldots 140Y + 49 = \cdots 89$, следовательно, $Y = 6$ ($Y = 1 < 4$ отбрасываем). Находим $367^2 = 134689$- получили ответ.

2. Федя внутри треугольник отметил n точек (точки лежат в треугольнике не попадая на его стороны). Затем он образовал множество A состоящее из n отмеченных точек и трёх точек-вершин исходного треугольника. После он соединил некоторые пары точек из множества A отрезками, которые могут пересекаться только в концах этих отрезков. По этим отрезкам Федя провел разрезы, в результате треугольник распался на 2023 маленьких треугольника. Найдите минимально возможное количество точек, которые отметил Федя.

Ответ: *n*=1011
Решение. Сумма углов маленьких треугольников равна 2023*180.
С другой стороны, вокруг каждой внутренней точки в исходном треугольнике сумма углов равна 360, к ним надо добавить 180 - углы исходного треугольника. Получаем уравнение 360n+180 = 2023*180,откуда *n*=1011.

Альтернативное решение - ф-ла Эйлера $\mathrm{В} - \mathrm{Р} + \Gamma = 2$, где В=n+3, Г=2024, а Р можно найти так - каждый треугольник дает 3 ребра, но внутренние считают по 2 раза, т.е. 3*2023 = 3+(Р-3)*2, откуда Р=3036.

3. Дан многочлен 3-ей степени $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$, принимающий значения $P(-2023) = P(0) = P(2023) = 2024$. Найдите численное значение выражения

$$P(-2024)+P(-2023)+P(-2022)+P(-2021)+\ldots+P(-1)+P(0)+P(1)+\ldots+$$
$$+P(2022)+P(2023)+P(2024).$$

Ответ: 8195176
Решение. График симметричен относительно точки (0,2024). Действительно, рассмотрим многочлен $Q(x) = P(x) - 2024$. Поскольку он обращается в ноль в точках 0,2023, -2023, то $Q(x) = ax(x-2023)(x+2023)$. Следовательно $P(x) = ax(x-2023)(x+2023) + 2024$. Откуда $\mathrm{P}(2024) + \mathrm{P}(-2024) = \mathrm{P}(2023) + \mathrm{P}(-2023) = \cdots = \mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(-1) \ = \ a * 2024 * (4047) + 2024 - a * 2024 * (4047) + 2024 = 4048$.

4. Найдите сумму

$$1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+\ldots+63\cdot65.$$

Ответ: 45728
Решение. В общем виде: $1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+\ldots+(2n-1)\cdot(2n+1)=$

$$=(2-1)(2+1)+(4-1)(4+1)+\ldots+(2n-1)(2n+1)=$$

$$=2^2-1+4^2-1+\ldots+(2n)^2-1=$$

$$=4\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)-n=$$

$$=\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}-n=\frac{n\left(2(n+1)(2n+1)-3\right)}{3}.$$

В нашем случае при *n* = 32 получаем 45728 .

5. Точки A, B и C принадлежит множествам, заданным на координатной плоскости Oxy уравнениями $y-2x-1=0$, $y-7+3x=0$ и $y-1=0$ соответственно. Точка D принадлежит множеству, заданному на координатной плоскости Oxy неравенством

$$(y-2x-1)(y-7+3x)(y-1)>0.$$

Найдите минимально возможное значение $AD^2+BD^2+CD^2$.

Решение.

Первые три множества – прямые линии (см. рисунок 1). Четвертое множество закрашено на рисунке, оно состоит из четырех областей: центральная область, ограниченная данными прямыми, и три полубесконечные области, каждая из которых ограничена двумя прямыми.

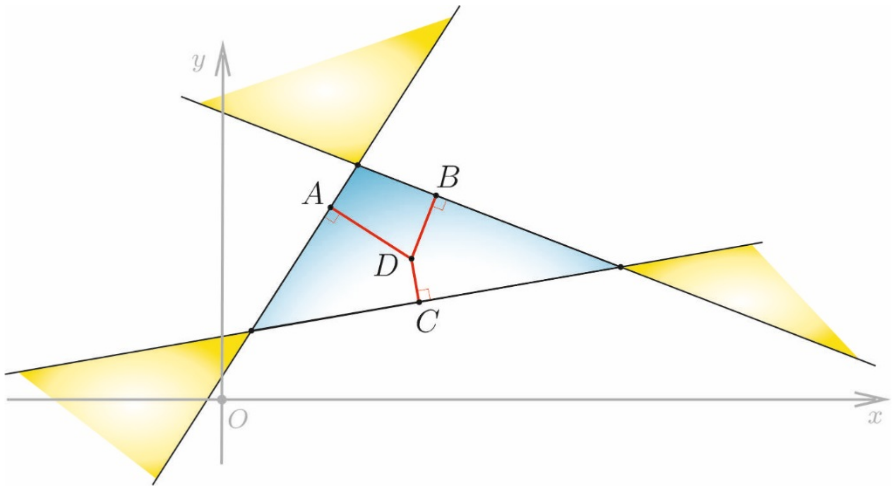

Figure 1:

Рассмотрим представленную на рисунке ситуацию, когда точка *D* находится внутри центрального треугольника. Пусть стороны треугольника равны *a*, *b*, *c*. Обозначим *AD* = *x*, *BD* = *y*, *CD* = *z*.

Тогда мы можем найти площадь треугольника *S* (в общем случае – по формуле Герона, а в данном случае, учитывая, что одна из сторон параллельна оси, как полупроизведение основания на высоту). С другой стороны, площадь равна $\frac{ax+by+cz}{2}$.

Таким образом, $2S = ax+by+cz$. Далее можно сделать оценку с помощью неравенства Коши-Буняковского-Шварца:

$$4S^2 = (ax+by+cz)^2 \leqslant (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2).$$

Отсюда $x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}$. Это и есть минимальное значение. Оно достигается при $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. Можно доказать, что в этом случае точка *D* находится внутри центрального треугольника.

Отметим, что минимум не может достигаться, если точка *D* находится не в центральном треугольнике, а в одной из трех полубесконечных областей. Если предположить обратное, то можно поставить в соответствие этой точке какую-то точку внутри центрального треугольника, для которой сумма квадратов будет меньше.

Таким образом, минимальное значение равно $\frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}$. При данных числовых данных получим последовательно:

координаты точек пересечения прямых: $\left(\frac{6}{5};\frac{17}{5}\right)$, $(0;1)$, $(2;1)$;

длины сторон треугольника: $a=\frac{6\sqrt{5}}{5}$; $b=\frac{4\sqrt{10}}{5}$; $c=2$;

площадь треугольника: $S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(\frac{17}{5}-1\right)=\frac{12}{5}.$

Тогда искомый минимум равен $\dfrac{4\cdot 144}{25\cdot\left(\frac{36}{5}+\frac{32}{5}+4\right)}=\frac{72}{55}\approx 1,31.$

Заметим, что задача поиска минимума суммы квадратов расстояний до трех сторон треугольника от точки внутри треугольника – классическая задача планиметрии. Точка *D*, в которой достигается минимум, называется точкой Лемуана.

Ответ: $1,31$.

6. Последовательность целых чисел задана рекуррентно: $x_0=0$, $x_1=1$,

$$x_{2k}=7^6\cdot x_{2k-1}-x_{2k-2},\quad x_{2k+1}=2013!\cdot x_{2k}-x_{2k-1}.$$

Найти $\text{НОД}(x_{2023!},x_{2+2023!})$, где $\text{НОД}(a,b)$ это наибольший общий делитель a и b. Здесь n! - произведение всех натуральных чисел от 1 до n. Например, $2!=1\cdot 2=2,\ 5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120.$

Ответ: 117649.

Решение. Рассмотрим общий случай: Заданы натуральные числа $a>1$ и $b>1$. Рекуррентно определяется последовательность: $x_0=0$, $x_1=1$,

$$x_{2k}=a\cdot x_{2k-1}-x_{2k-2},\quad x_{2k+1}=b\cdot x_{2k}-x_{2k-1}. \qquad (1)$$

Найти $\text{НОД}(x_{2023},x_{2527})$, где $\text{НОД}(a,b)$ это наибольший общий делитель a и b.

Получим рекуррентную формулу:

$$x_{k+2}=(ab-2)x_k-x_{k-2}.$$

Действительно, из формул (1) имеем:

$$x_{2k}=a\cdot x_{2k-1}-x_{2k-2}=a\cdot(b\cdot x_{2k-2}-x_{2k-3})-x_{2k-2}=(ab-1)x_{2k-2}-a\cdot x_{2k-3}.$$

С другой стороны, $a \cdot x_{2k-3} = x_{2k-2} + x_{2k-4}$, откуда

$$x_{2k} = (ab-2)x_{2k-2} - x_{2k-4}.$$

Аналогично,

$$x_{2k+1} = b \cdot x_{2k} - x_{2k-1} = b(a \cdot x_{2k-1} - x_{2k-2}) - x_{2k-1} = (ab-1)x_{2k-1} - b \cdot x_{2k-2}.$$

Учитывая, что $b \cdot x_{2k-2} = x_{2k-1} + x_{2k-3}$, получаем искомое соотношение и для нечетных индексов:

$$x_{2k+1} = (ab-2)x_{2k-1} - x_{2k-3}.$$

Тогда

$$\text{НОД}(x_{k+2}, x_k) = \text{НОД}((ab-2)x_k - x_{k-2}, x_k) = \text{НОД}(x_k, x_{k-2}) = \ldots =$$

$$= \text{НОД}(x_2, x_0) = a \textit{ для чётного } k,$$

$$= \text{НОД}(x_3, x_1) = 1 \textit{ для нечётного } k.$$

Для нашего примера $\text{НОД}(x_{2023!}, x_{2+2023!}) = 7^6$. Откуда приходим к ответу: **7^6=117649.**