Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заочного этапа 2022/2023 учебного года для 7–8 класса

1. В $7^А$ классе учится 20 человек, и все они очень любят многопользовательские компьютерные игры. Каждый из учащихся играет в одну или две таких игры. При этом для любых 2 учащихся найдется общая игра (в которую играют оба). Найдите наибольшее N, такое, что гарантированно найдется игра, в которую играют не менее N учащихся.

Ответ: 14.
Решение: Покажем, что ситуация с 14 учащимися возможна. Разобьем на 3 группы: 7+7+6 человек, пусть первая группа играет в игры A и B, вторая B и C, третья A и C. Все условия соблюдены.
Предположим, что возможна ситуация, когда в каждую из игр играет не более 13 человек. Выберем самую популярную из игр (ту, в которую играет больше всего), обозначим ее А. Участников не более 13, поэтому найдется человек, который в нее не играет. Обозначим его x и рассмотрим x в паре с каждым из участников игры А. Должна найтись общая игра с каждым из 13, причем она не может совпадать с А. Кроме того, это не может быть одна и та же игра для всех 13 пар (иначе получится, что в нее играют 14 человек). Значит это 2 игры (больше 2 быть не может по условию), обозначим их B и C. Рассмотрим теперь школьника $y \neq x$ из тех, кто не играет в игру А. По условию, он должен иметь общую игру с теми, кто играет в А и B, но это не может быть игра А, следовательно он играет в B. Аналогично можно показать, что он играет в C. Таким образом, все остальные играют в B и C, таким образом, все играют в игры A, B, C и других игр нет. Обозначим |A| - количество людей, играющих в А и аналогично $|B|, |C|$. Получаем $|A| + |B| + |C| = 40$, (каждого школьника посчитали 2 раза), что невозможно, если $|A| \leq 13, |B| \leq 13, |C| \leq 13$.

2. Будем записывать числа с помощью единиц. Разрешается использовать числа вида 11..1, арифметические операции (+, -, *, /), возведение в степень (^) и скобки. Например, число 1024 можно записать как $(1+1)^{11-1}$.
Запишите число $N = \underbrace{11\ldots1}_{111\text{ единиц}}$ так, используя не более 11 единиц (и не используя другие цифры).
В ответе укажите полученное выражение, записав его в одну строку, или 0, если этого сделать нельзя. Например, $(1+1)^{11-1}$ запишется как (1+1)^(11-1), а выражение $\frac{11-11+11}{1^{11}\cdot1+1}$ надо записать в виде: (11-11+11)/(1^(11)*1+1). В строке не должно быть пробелов и лишних скобок!

Ответ: можно, например $\frac{(11-1)^{111}-1}{11-1-1}$.

3. Магистр Рассеянных наук забыл пин-код от своего телефона. Он помнит, что пин-код был составлен из 6 различных цифр, идущих по возрастанию, причем первая цифра была 1. А еще он помнит, что это 6-значное число является точным квадратом (квадратом целого числа). Помогите магистру вспомнить пин-код.
Ответ: 134689

Решение: Обозначим $\overline{XYZ}^2 = \overline{1bcdef}$, где $1 < b < c < d < e < f$ (разные буквы, вообще говоря, могут означать одинаковые цифры). Заметим, что 123456 не является точным квадратом, поэтому $f \geq 7$. Но квадрат не может оканчиваться на 7 или 8, следовательно $f = 9$, а $Z = 3$ или 7.

Пусть $\overline{YZ} = 10q \pm 3$, тогда $\overline{YZ}^2 = 100q^2 \pm 60q + 9$. Т.е. цифра e, число десятков, определяется только через q и значение $\pm$, а именно: если q=0, то e=0. Если q=1, то либо e = 6 (когда стоит плюс), либо e= 4 (когда стоит минус). Если q=2, то либо e=2 (+), либо e=8 (-), и так далее. (Примечание для старших: $e \equiv \pm 6q \ (mod\ 10)$.) Поскольку $e > 5$, то e=6 или 8. Проверяем, что числа 123469, 123569, 124569, 124569, 134569 не являются точными квадратами, поэтому $e = 8$.

Заметим, что $400^2 = 160000$, но b не может быть больше 6, поэтому $X < 4$. С другой стороны $300^2 = 90000$ - 5 значное число, значит $X \geq 3$. Следовательно, $X = 3$.
Кроме того, $340^2 = 115600 < 120000$, следовательно, $Y \geq 4$.

Будем решать $\overline{3YZ}^2 = \overline{1bcd89}$. Рассмотрим случаи:

- Случай $\mathrm{Z} = 3$: Тогда $\ldots 60Y + 9 = \cdots 89$, следовательно, $Y = 8$. ($Y = 3 < 4$ отбрасываем) , проверяем$383^2 = 146689$ - не подходит (цифра 6 повторяется).
- Случай $\mathrm{Z} = 7$: Тогда $\ldots 140Y + 49 = \cdots 89$, следовательно, $Y = 6$ $(Y = 1 < 4$ отбрасываем$)$. Находим $367^2 = 134689$- получили ответ.

4. Петя и Вася играют в интересную игру. В начале игры у каждого по 18 карт. Петя и Вася ходят по очереди (Петя ходит первым), каждым ходом один отдает другому некоторое количество карт, причем количества переданных карт не могут повторяться — если кто-то, скажем, передал 3 карты, то дальше по 3 карты передавать никому нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход по правилам. Есть ли у кого-либо из игроков выигрышная стратегия (способ всегда выигрывать)? Если у Пети, то в ответе укажите 1, если у Васи, то в ответе укажите 2, а если такой стратегии нет, то в ответе укажите 3.

Ответ:2
Решение Стратегия Васи - давать минимально допустимое кол-во карт. Покажем, что при такой стратегии у Васи будет всегда ответный ход.
Заметим, что Петя на каждом ходу, начиная со второго, отдает, по крайней мере, на 1 больше, чем дал ему Вася на предыдущем ходу. Если на первом ходу Петя дал x карт, то после *n*+1-го хода Пети (и *n* ходов Васи) у Васи будет не менее 18+x+n карт. Предположим, что Вася не может сделать ход, значит ходы, 1,2,…,18+x+n уже были сделаны, т.е. было сделано $n + (n+1) \geq 18 + x + n$ ходов. Поскольку $x \geq 1$, то $n \geq 18$. Получается, что было ≥ 18 ходов Васи и ≥ 19 ходов Пети, но в диапазоне 1 … 36 (всего у игроков 36 карт) нельзя выбрать 37 различных чисел. Противоречие.

5. Алиса внутри треугольника отметила n точек (точки лежат в треугольнике не попадая на его стороны). Затем она образовала множество A состоящее из n отмеченных точек и трёх точек-вершин исходного треугольника. После она соединила некоторые пары точек из множества A отрезками, которые могут пересекаться только в концах этих отрезков. По этим отрезкам Алиса провела разрезы, в результате треугольник распался на 2023 маленьких треугольника. Найдите минимально возможное количество точек, которые отметила Алиса.

Ответ: *n*=1011
Решение. Сумма углов маленьких треугольников равна 2023*180.
С другой стороны, вокруг каждой внутренней точки в исходном треугольнике сумма углов равна 360, к ним надо добавить 180 - углы исходного треугольника.
Получаем уравнение 360n+180 = 2023*180,откуда *n*=1011.

Альтернативное решение - ф-ла Эйлера $\mathrm{В} - \mathrm{Р} + \Gamma = 2$, где В=n+3, Г=2024, а Р можно найти так - каждый треугольник дает 3 ребра, но внутренние считают по 2 раза, т.е. 3*2023 = 3+(Р-3)*2, откуда Р=3036.

6. Дан многочлен 3-ей степени $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$, принимающий значения $P(-2023) = P(0) = P(2023) = 2024$. Найдите численное значение выражения P(2024)+P(-2024).

Ответ: 4048.
Решение: График симметричен относительно точки (0,2024), поэтому сумма равна 4048. Действительно, рассмотрим многочлен $Q(x) = P(x) - 2024$. Поскольку он обращается в ноль в точках 0,2023, -2023, то $Q(x) = ax(x - 2023)(x + 2023)$. Следовательно, $P(x) = ax(x - 2023)(x + 2023) + 2024$. Откуда $\mathrm{P}(2024) + \mathrm{P}(-2024) = a * 2024 * (4047) + 2024 - a * 2024 * (4047) + 2024 = 4048$.