Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заочного этапа 2022/2023 учебного года для 9 класса

1. Будем записывать числа с помощью единиц. Разрешается использовать числа вида 11..1, арифметические операции (+, -, *, /), возведение в степень (^) и скобки. Например, число 1024 можно записать как $(1+1)^{11-1}$.
Запишите число $N = \underbrace{11\ldots1}_{111\text{ единиц}}$ так, используя не более 11 единиц (и не используя другие цифры).
В ответе укажите полученное выражение, записав его в одну строку, или 0, если этого сделать нельзя. Например, $(1+1)^{11-1}$ запишется как (1+1)^(11-1), а выражение $\frac{11-11+11}{1^{11}\cdot 1+1}$ надо записать в виде: (11-11+11)/(1^(11)*1+1). В строке не должно быть пробелов и лишних скобок!

Ответ: ((11-1)^(111)-1)/(11-1-1)
Решение: можно, например $\frac{(11-1)^{111}-1}{11-1-1}$.

2. Магистр Рассеянных наук забыл пин-код от своего телефона. Он помнит, что пин-код был составлен из 6 различных цифр, идущих по возрастанию, причем первая цифра была 1. А еще он помнит, что это 6-значное число является точным квадратом (квадратом целого числа). Помогите магистру вспомнить пин-код.

Ответ: 134689
Решение: Обозначим $\overline{XYZ}^2 = \overline{1bcdef}$, где $1 < b < c < d < e < f$ (разные буквы, вообще говоря, могут означать одинаковые цифры). Заметим, что 123456 не является точным квадратом, поэтому $f \geq 7$. Но квадрат не может оканчиваться на 7 или 8, следовательно $f = 9$, а $Z = 3$ или 7.
Пусть $\overline{YZ} = 10q \pm 3$, тогда $\overline{YZ} = 100q^2 \pm 60q + 9$, т.е. $e \equiv \pm 6q \ (mod\ 10)$. Поскольку $e > 5$, то e=6 или 8. Проверяем, что числа 123469, 123569, 124569, 124569, 134569 не являются точными квадратами, поэтому $e = 8$.

Заметим, что $400^2 = 160000$, но b не может быть больше 6, поэтому $X < 4$. С другой стороны $300^2 = 90000$ - 5 значное число, значит $X \geq 3$. Следовательно, $X = 3$.
Кроме того, $340^2 = 115600 < 120000$, следовательно, $Y \geq 4$.

Будем решать $\overline{3YZ}^2 = \overline{1bcd89}$. Рассмотрим случаи:

- Случай $\mathrm{Z} = 3$: Тогда $\ldots 60Y + 9 = \cdots 89$, следовательно, $Y = 8$. ($Y = 3 < 4$ отбрасываем) , проверяем$383^2 = 146689$ - не подходит (цифра 6 повторяется).
- Случай $\mathrm{Z} = 7$: Тогда $\ldots 140Y + 49 = \cdots 89$, следовательно, $Y = 6$ ($Y = 1 < 4$ отбрасываем). Находим $367^2 = 134689$- получили ответ.

3. Петя и Вася играют в интересную игру. В начале игры у каждого по 18 карт. Петя и Вася ходят по очереди (Петя ходит первым), каждым ходом один отдает другому некоторое количество карт, причем количества переданных карт не могут повторяться — если кто-то, скажем, передал 3 карты, то дальше по 3 карты передавать никому нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход по правилам. Есть ли у кого-либо из игроков выигрышная стратегия (способ всегда выигрывать)? Если у Пети, то в ответе укажите 1, если у Васи, то в ответе укажите 2, а если такой стратегии нет, то в ответе укажите 3.

Ответ:2
Решение Стратегия Васи - давать минимально допустимое кол-во карт. Покажем, что при такой стратегии у Васи будет всегда ответный ход.
Заметим, что Петя на каждом ходу, начиная со второго, отдает, по крайней мере, на 1 больше, чем дал ему Вася на предыдущем ходу. Если на первом ходу Петя дал x карт, то после *n*+1-го хода Пети (и *n* ходов Васи) у Васи будет не менее 18+x+n карт. Предположим, что Вася не может сделать ход, значит ходы, 1,2,…,18+x+n уже были сделаны, т.е. было сделано $n+(n+1) \geq 18+x+n$ ходов. Поскольку $x \geq 1$, то $n \geq 18$. Получается, что было ≥ 18 ходов Васи и ≥ 19 ходов Пети, но в диапазоне $1 \dots 36$ (всего у игроков 36 карт) нельзя выбрать 37 различных чисел. Противоречие.

4. Алиса внутри треугольника отметила n точек (точки лежат в треугольнике не попадая на его стороны). Затем она образовала множество A состоящее из n отмеченных точек и трёх точек-вершин исходного треугольника. После она соединила некоторые пары точек из множества A отрезками, которые могут пересекаться только в концах этих отрезков. По этим отрезкам Алиса провела разрезы, в результате треугольник распался на 2023 маленьких треугольника. Найдите минимально возможное количество точек, которые отметила Алиса.

Ответ: 1011
Решение. Сумма углов маленьких треугольников равна 2023*180.
С другой стороны, вокруг каждой внутренней точки в исходном треугольнике сумма углов равна 360, к ним надо добавить 180 - углы исходного треугольника.
Получаем уравнение 360n+180 = 2023*180,откуда *n*=1011.

Альтернативное решение - ф-ла Эйлера $\mathrm{В}-\mathrm{Р}+\Gamma=2$, где В=n+3, Г=2024, а Р можно найти так - каждый треугольник дает 3 ребра, но внутренние считают по 2 раза, т.е. 3*2023 = 3+(Р-3)*2, откуда Р=3036.

5. Дан многочлен 3-ей степени $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d, a \neq 0$, принимающий значения $P(-2023)=P(0)=P(2023)=2024$. Найдите численное значение выражения

P(-2022)+P(-2021)+...+P(-1)+P(0)+P(1)+...+P(2022)

Ответ: 8187080
Решение. График симметричен относительно точки (0,2024). Действительно, рассмотрим многочлен $Q(x)=P(x)-2024$. Поскольку он обращается в ноль в точках 0,2023, -2023, то $Q(x)=ax(x-2023)(x+2023)$. Следовательно $P(x)=ax(x-2023)(x+2023)+2024$. Откуда $\mathrm{P}(2022)+\mathrm{P}(-2022)=\mathrm{P}(2021)+\mathrm{P}(-2021)=\cdots=\mathrm{P}(1)+\mathrm{P}(-1) = a*2024*(4047)+2024-a*2024*(4047)+2024=4048$.

6. В равносторонний треугольнике ABC вписан другой равносторонний треугольник EFG так, что вершины E,F,G лежат соответственно на сторонах AB, BC и CD. Известно, что сумма площадей всех шести равносторонних треугольников AEE_1, E_2EB, BFF_1, F_2FC, FGG_1, G_2GA, построенных на сторонах AE, EB, BF, FC, FG, GA, равна 3. Найдите наименьшее возможное при этих условиях значение площади треугольника EFG. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: $0,5$.

Решение. Легко доказать, что все синии и все красные треугольники на картинке равны. Для определённости будем считать, что $AE \geqslant EB$, обозначим через $k = AE / EB$. Обозначим за S площадь равностороннего треугольника со стороной EB Тогда

$$S_{ABC}=(k+1)^2S,\quad S_{AEE_1}=k^2S,\quad S_{AEG}=S_{EBF}=S_{FCG}=kS.$$

Также справедливо

$$S_{EFG}=S_{ABC}-3\cdot S_{AEE_1}=(k^2-k+1)S.$$

По условию сумма площадей всех синих и красных треугольников равна 3. Поэтому

$$S_{AEE_1}+S_{EBE_2}=(k^2+1)S=3/3=1.$$

Следовательно,

$$S_{EFG}=\frac{k^2-k+1}{k^2+1}=1-\frac{k}{k+1}\geqslant 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Здесь мы использовали неравенство Коши: $2k\leqslant k^2+1$, которое достигается на $k=1$.