

# ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ.

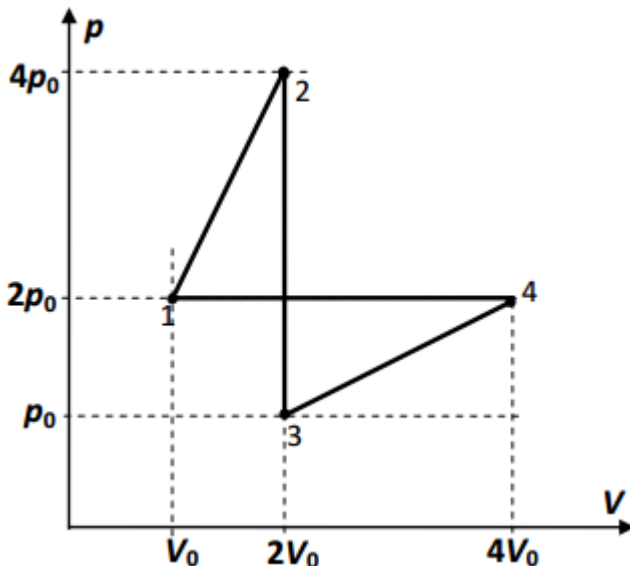
2022/23 учебный год, ЗАДАНИЕ ЗАОЧНОГО ТУРА. 11 классы.

Задание отборочного тура состояло из двух частей. В части I предлагалось три вопроса, ответ к которым (без решения) нужно было загрузить в специальную форму на сайте олимпиады. Вопросы у участников различались числовыми данными, выбираемыми автоматически из широкого диапазона значений. В части II (творческой) предлагалось 4 одинаковых для всех участников задачи, к которым требовалось загрузить ответы и решения, причем оценка определялась по результатам проверки решений.

## Часть I (проверяются ответы), пример варианта:

### Вопрос 1 (7 баллов):

Над постоянным количеством идеального газа произвели процесс 1-2-3-4-1, диаграмма которого показана на рисунке в координатах давление-объем. Вычислите количество теплоты, которым газ в этом процессе обменялся с окружающими телами, если  $p_0 = 50$  кПа, а  $V_0 = 3$  л. Ответ запишите в Дж, с учетом знака ( $Q > 0$  соответствует получению газом теплоты), без указания единиц измерения.



Ответ: 0.

*Комментарий:* Согласно I Началу термодинамики,  $Q = A + \Delta U$ . В циклическом процессе  $\Delta U = 0$ , так что полученное газом тепло равно совершенной им работе, а она численно равна площади контура процесса в координатах давление-объем с учетом направления обхода. Здесь контур состоит из двух частей равной площади с противоположным направлением обхода, так что  $Q = A = 0$ .

### Вопрос 2 (9 баллов):

На двух одинаковых легких пружинах жесткостью  $k = 300$  Н/м симметрично подвешена длинная однородная доска массы 2 кг. Точно над центром масс доски на ней лежит маленький по размерам груз массой  $m = 1$  кг. Найдите максимальную возможную амплитуду вертикальных гармонических колебаний этой системы в отсутствие сил сопротивления воздуха. Ускорение свободного падения считать равным  $10$  м/с<sup>2</sup>. Ответ запишите в см, с точностью до целого значения, без указания единиц измерения.

Ответ: 5.

**Комментарий:** Так как пружины подчиняются закону Гука (задано  $k$ ), колебания вертикальны и сопротивления воздуха нет, то причиной нарушения гармоничности колебаний может быть только отрыв груза от доски (у груза появляется негармоническая фаза свободного падения). Отрыв произойдет, если доска будет двигаться вниз с ускорением, превышающим ускорение свободного падения  $g$ . Таким образом, условие гармоничности движения – это ограничение на амплитуду колебаний ускорения  $a_m \leq g$ . С другой стороны, при гармонических колебаниях  $a_m = \omega^2 x_m$ , а квадрат циклической частоты колебаний доски с грузом на паре пружин  $\omega^2 = \frac{2k}{M+m}$ . Таким образом,  $x_m \leq \frac{(M+m)g}{2k}$ , и максимальная возможная амплитуда вертикальных гармонических колебаний описанной системы  $(x_m)_{\max} = \frac{(M+m)g}{2k} \approx 5 \text{ см.}$

**Вопрос 3 (9 баллов):**

В некоторой области пространства откачан воздух и размещена отрицательно заряженная частая сетка, создающее в этой области почти однородное электрическое поле с напряженностью 1000 В/м. Кроме того, в этой области создано магнитное поле с индукцией 2 Тл, причем линии индукции параллельны силовым линиям электрического поля. Из одной из ячеек сетки ионная пушка выстреливает ион с удельным зарядом  $+6 \cdot 10^6$  Кл/кг со скоростью 1 км/с под углом  $20^\circ$  к плоскости сетки. На каком расстоянии от точки вылета будет находиться ион в тот момент, когда он впервые вновь окажется в площади сетки? вновь Ответ запишите в мкм с точностью до десятых, без указания единиц измерения.

**Ответ: 99,0.**

**Комментарий:** Ион после выстрела движется под действием силы  $\vec{F}_E = q\vec{E}$ , действующей со стороны электрического поля и силы Лоренца  $\vec{F}_B = q[\vec{v} \times \vec{B}]$ , причем первая всегда направлена перпендикулярно сетке (ион притягивается к сетке), а вторая – в плоскости сетки. Поэтому движения иона вдоль оси  $z$ , направленной перпендикулярно сетке в направлении выстрела, и в проекции на плоскость сетки  $xy$ , происходят независимо: движение по  $z$  – равноускоренное ( $z(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{qE}{2m}t^2$ ), а движение в проекции на плоскость  $xy$  – ларморовское вращение по окружности радиусом  $R = \frac{mv_0 \cos(\alpha)}{qB}$  с угловой

скоростью  $\omega = \frac{qB}{m}$ . Значит, возвращение иона в плоскость сетки произойдет за время

$t = \frac{2mv_0 \sin(\alpha)}{qE}$ , и угол поворота его проекции по ларморовской окружности

$\varphi = \omega t = \frac{2Bv_0 \sin(\alpha)}{E}$ . Расстояние иона от точки вылета в этот момент равно длине хорды ларморовской окружности, соответствующей этому углу поворота:

$$l = 2R \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{2mv_0 \cos(\alpha)}{qB} \sin\left(\frac{Bv_0 \sin(\alpha)}{E}\right) \approx 99,0 \text{ мкм.}$$

**Часть II. «РАЗРАБОТКИ ТЕХНИКА ХАРЛАНА» (проверяются решения).**

1. («Неожиданный подарок», 16 баллов) Как-то, еще во время учебы, Эндрю было очень важно покинуть школу на некоторое время. Но в это время он должен был выполнять лабораторную работу по изучению эффекта застоя (состоящего в превышении на величину  $\Delta F$  максимальной величины силы трения покоя над силой трения скольжения). В работе требовалось изучить движение бруска массой  $m = 410,0$  г. Из теоретического введения было известно, что величина силы трения бруска практически перестает зависеть от его скорости  $v$  относительно поверхности только при превышении некоторой величины скорости  $v_0$  (именно эта неизменная величина и считается величиной силой трения скольжения для этого бруска). При  $v < v_0$  сила трения убывает линейно с ростом скорости. В эксперименте нужно было слегка подтолкнуть брусок и затем тянуть его по горизонтальной поверхности, прикрепив к легкой практически нерастяжимой нити, поддерживая силу натяжения нити неизменной и с высокой точностью равной максимальной величине силы трения покоя. Затем на основе наблюдения за изменением скорости и ускорения бруска нужно было определить  $v_0$  и  $\Delta F$ . Измерения требовались очень аккуратные и занимали немало времени, но, придя в лабораторию, Эндрю обнаружил пакет с запиской и микрочипом. Из записки он узнал, что наблюдения уже выполнил он сам в другой реальности, а на микрочипе есть оцифрованное видео движения бруска. Также было сообщено, что сила сопротивления воздуха для бруска с достаточной точностью пропорциональна его скорости. В таблицах приведены данные с микрочипа, которые использовал студент Харлан – зависимости от времени скорости центра масс бруска (за все время наблюдений) и его ускорения (на наиболее важном интервале времени). Определите по этим данным  $v_0$ ,  $\Delta F$  и коэффициент пропорциональности  $\alpha$  между действующей на брусок силой сопротивления воздуха и его скоростью (движения воздуха при съемках видео отсутствовали).

$t, \text{ с}$	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	10,00	12,00	14,00	16,00
$v, \text{ м/с}$	0,200	0,205	0,351	0,600	0,871	1,060	1,192	1,285	1,349	1,426	1,464	1,482	1,491

$t, \text{ с}$	2,50	2,60	2,70	2,80	2,90	3,00	3,10	3,20	3,30	3,40	3,50
$\alpha, \text{ м/с}^2$	0,246	0,260	0,274	0,289	0,305	0,322	0,311	0,300	0,289	0,279	0,269

Проверьте, насколько точны Ваши выводы на примере определения  $v_0$ .

**ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:**

Движение бруска нужно разбить на две фазы: при скорости менее  $v_0$  для описания величины силы трения можно, в соответствии с условием, использовать выражение  $F_{mp}(v) = \mu mg + \Delta F(1 - v/v_0)$ , а при  $v > v_0$  сила трения постоянна:  $F_{mp}(v) = \mu mg$ . Запишем уравнение движения в первой фазе с учетом силы сопротивления воздуха:

$$m \frac{dv}{dt} = F - F_{mp}(v) - \alpha v = \left( \frac{\Delta F}{v_0} - \alpha \right) v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \beta v.$$

Как видно, производная функции пропорциональна самой функции с коэффициентом  $\beta = \frac{1}{m} \left( \frac{\Delta F}{v_0} - \alpha \right)$  и ясно, что это экспоненциальная функция. Обозначив малую начальную скорость бруска после того, как его «слегка подтолкнули»  $v(0) = u$ , находим, что при скорости изменяется по закону  $v(t) = u \cdot e^{\beta t}$ . Ускорение на этой стадии тоже растет

экспоненциально, причем  $\frac{a(t)}{v(t)} = const = \beta$ . Из таблицы видно, что ускорение растет до момента времени  $t_0 \approx 3$  с, и отношение скорости и ускорения в этой точке дает оценку для  $\beta$ :  $\beta = \frac{1}{m} \left( \frac{\Delta F}{v_0} - \alpha \right) \approx \frac{a(t_0)}{v(t_0)} \approx 0,537 \text{ с}^{-1}$ . Таким образом,  $\frac{\Delta F}{v_0} - \alpha = m\beta \approx 0,220 \text{ кг/с}$ , а также  $v_0 \approx v(t_0) \approx 0,60 \text{ м/с}$ .

На второй фазе

$$m \frac{dv}{dt} = F - F_{mp}(v) - \alpha v = \Delta F - \alpha v.$$

Как видно, скорость продолжает расти, пока  $v < \frac{\Delta F}{\alpha}$ , а ускорение уже убывает, что соответствует данным наблюдений. Поскольку у нас есть только одна «общая» точка зависимостей скорости и ускорения от времени, мы не можем из данных найти коэффициенты линейной связи ускорения и скорости, и нам лучше обратить внимание, что на «больших» временная скорость бруска должна стремиться к установившемуся значению  $\bar{v} = \frac{\Delta F}{\alpha}$ . Из таблицы видно, что скорость действительно приближается к значению  $\bar{v} \approx 1,5 \text{ м/с}$ . Из двух полученных уравнений находим, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta F = \alpha \bar{v} \\ \frac{\Delta F}{v_0} - \alpha \approx 0,220 \text{ кг/с} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \approx 0,147 \text{ кг/с} \\ \Delta F \approx 0,220 \text{ Н} \end{array} \right.$$

Проведем оценку точности результатов. Для этого отметим, что, если в уравнении движения на второй фазе использовать подстановку  $v(t) = \bar{v} + \tilde{v}(t)$ , то оно превратится в уравнение  $\frac{d\tilde{v}}{dt} = -\frac{\alpha}{m} \tilde{v}$ . Это означает, что мы снова мы получаем уравнение для экспоненциальной функции, так что  $v(t) = \bar{v} + C \cdot e^{-\alpha t/m}$ . С учетом условия  $v(t_0) = v_0$  приходим к закону изменения скорости на второй стадии в виде  $v(t) = \bar{v} + (v_0 - \bar{v}) \cdot e^{\alpha(t_0-t)/m} \approx 1,5 \text{ м/с} - 0,9 \text{ м/с} \cdot \exp[(3\text{с} - t)/2,795\text{с}]$ . Сравним полученную зависимость с экспериментальными данными:

$t, \text{ с}$	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	10,00	12,00	14,00	16,00
$v_{теор}, \text{ м/с}$	0,871	1,060	1,192	1,285	1,350	1,426	1,464	1,482	1,491

Эти значения отличаются от экспериментальных не более чем на единицу последнего разряда (да и то только в одной точке!), так что на самом деле нам необычайно повезло: точность результата не менее точности данных, а на большую точность рассчитывать было нельзя.

**ОТВЕТЫ:**  $v_0 \approx 0,60 \text{ м/с}$ ,  $\Delta F \approx 0,220 \text{ Н}$ ,  $\alpha \approx 0,147 \text{ кг/с}$ , точность не ниже точности данных.

#### КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс.балл
Используется правильное описание силы трения на обеих фазах движения	<b>1+1=2</b>
Правильно решено уравнение движения на первой фазе	<b>4</b>
Указан момент времени $t_0 \approx 3$ с	<b>1</b>
Правильно найдено $v_0 \approx 0,60 \text{ м/с}$	<b>2</b>
Получена верная связь $\Delta F$ и $\alpha$	<b>1</b>

Указано на существование на второй фазе установившегося режима	<b>1</b>
Получено второе (независимое) соотношение для $\Delta F$ и $\alpha$	<b>1</b>
Правильно найдены $\Delta F$ и $\alpha$	<b>1+1=2</b>
Проведен разумный анализ точности результата (само проведение + правильный вывод)	<b>1+1=2</b>
<b>ВСЕГО</b>	<b>16</b>

**Примечание:** На самом деле самый простой и естественный путь восстановления нужных величин по зависимостям скорости и ускорения от времени в этой модели – изучение зависимости  $a(v)$ , которая должна быть линейна для обеих фаз движения:

$$a(v) = \begin{cases} \frac{1}{m} \left( \frac{\Delta F}{v_0} - \alpha \right) v, & v \leq v_0 \\ \frac{\Delta F}{m} - \frac{\alpha}{m} v, & v > v_0 \end{cases}.$$

Поэтому анализ графика  $a(v)$  позволяет найти все, что нужно относительно просто и без интегрирования уравнений движения. Но в данном случае проблема в том, что при высокой точности данных у нас есть всего одна общая точка в данных по  $v(t)$  и  $a(t)$ ! Получение новых точек интерполяцией (в промежуточных точках) и экстраполяцией (в точках за пределами интервала, где есть данные по ускорению) существенно снижает точность результатов. В этом убедились участники, действовавшие по «простой» схеме. Как видно из предлагаемого решения, мы все же можем добиться, чтобы уровень точности результатов соответствовал точности данных, но в этом случае нам необходимо использовать знание вида «теоретических» зависимостей  $v(t)$  и  $a(t)$ . Таким образом, в решениях этого типа нельзя было полноценно использовать точность имеющихся данных, и поэтому максимальная оценка по этому типу решений составляла 9 баллов.

2. («База Вечности», 25 баллов) Во время подготовки одного из вмешательств Вечным понадобилось создать скрытую базу на одной из экзопланет. Эта планета оказалась очень оригинальна – она большей частью (кроме каменно-металлического ядра) состоит из воды. Собственное солнце очень слабо обогревает планету, но распад радиоактивных материалов в ядре поддерживает достаточно высокую температуру ее жидкой поверхности:  $T_s \approx 400\text{K}$ . Радиус этой поверхности равен  $R \approx 3931\text{км}$ , а ускорение свободного падения вблизи поверхности океана  $g \approx 1,65\text{м/с}^2$ . Отметим, что в глубинах океана из-за высокого давления вода становится твердой, и как раз внутри слоя льда, вблизи его поверхности, и была оборудована база. Определите радиус и температуру внешней поверхности ледяного слоя на этой планете. При решении Вы можете использовать следующие данные и приближения:

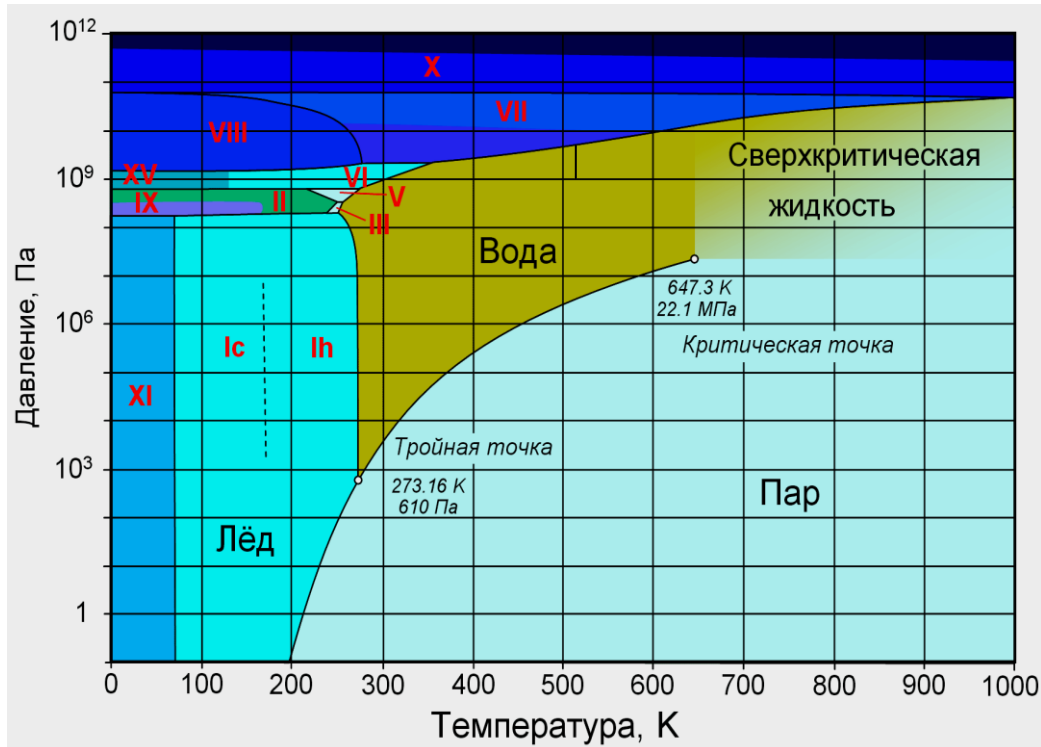
- Плотность жидкой воды в океане изменяется, но в расчетах считайте, что эта плотность постоянна и равна  $\rho \approx 925\text{ кг/м}^3$ ;
- Плотность модификации льда, из которой состоит ледовый слой на этой планете, тоже можно считать примерно постоянной и равной  $\rho_1 \approx 1480\text{ кг/м}^3$ ;
- Средняя плотность вещества ядра планеты равна  $\rho_2 \approx 8880\text{ кг/м}^3$ ;
- Мощность тепла, выделяемого в ядре планеты, можно считать постоянной и равной  $P \approx 1850\text{ МВт}$ .
- Согласно закону Фурье, количество теплоты, протекающее при теплообмене в единицу времени через единицу площади поверхности слоя вещества, пропорциональна разности

температур по разные стороны от слоя и обратно пропорциональна толщине слоя:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t \cdot \Delta S} \equiv \frac{\Delta P}{\Delta S} = \kappa \frac{\Delta T}{l}. \text{ Для воды в океане нашей планеты коэффициент теплопроводности}$$

можно считать равным  $\kappa \approx 0,749 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ;

- Фазовая диаграмма воды представлена на рисунке ниже\* (римскими цифрами обозначены различные модификации льда).



Можно ли по данным задачи определить радиус ядра планеты? Если да, то найдите его.

\*изображение из открытых источников.

### ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Важно сразу обратить внимание, что в стационарном режиме с постоянной мощностью тепловыделения в ядре планеты количество теплоты, протекающее при теплообмене в единицу времени через поверхность любой сферы в толще океана постоянно. В соответствии с законом Фурье это означает, что для любого радиуса  $r$ , отвечающего слою жидкой воды

$$P = -\kappa \frac{dT}{dr} \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{P}{4\pi\kappa r^2} = \frac{d(P/4\pi\kappa r)}{dr} \Rightarrow T(r) = C_1 + \frac{P}{4\pi\kappa r}.$$

С учетом условия  $T(R) = T_s$  получаем зависимость температуры от расстояния до центра

$$\text{планеты в жидкой воде: } T(r) = T_s + \frac{P}{4\pi\kappa} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

Затем рассмотрим механическое равновесие слоя жидкой воды толщиной  $dr$ . Разность сил давления по разные стороны от этого слоя уравнивает силу тяжести, то есть  $[p(r) - p(r + dr)] \cdot 4\pi r^2 = \rho \cdot 4\pi r^2 dr \cdot g(r)$ . Используя теорему Гаусса по аналогии с электростатикой, находим, что ускорение свободного падения на расстоянии  $r$  от центра планеты определяется массой вещества, находящегося внутри поверхности этого радиуса:  $4\pi r^2 \cdot g(r) = 4\pi GM(r)$ . Масса планеты находится из условия  $GM = R^2 \cdot g$ , а при погружении в океан  $M(r)$  уменьшается на массу слоя воды выше этого радиуса, так что в

жидкой воде  $GM(r) = GM - G \frac{4\pi}{3} \rho (R^3 - r^3)$ . Значит,  $g(r) = \frac{R^2}{r^2} \left( g - \frac{4\pi G \rho R}{3} \right) + \frac{4\pi G \rho}{3} r$ .

Таким образом, зависимость давления воды от радиуса определяется из уравнения

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho R^2}{r^2} \left( g - \frac{4\pi G \rho R}{3} \right) - \frac{4\pi G \rho^2}{3} r \Rightarrow p(r) = C_2 + \frac{\rho R^2}{r} \left( g - \frac{4\pi G \rho R}{3} \right) - \frac{2\pi G \rho^2}{3} r^2.$$

Давление на поверхности океана соответствует давлению насыщенного пара  $p_s$  при температуре  $T_s$ , и в результате  $p(r) = p_s + \rho R(2\pi G \rho - g) + \frac{\rho R^2}{r} \left( g - \frac{4\pi G \rho R}{3} \right) - \frac{2\pi G \rho^2}{3} r^2$  (в принципе  $p_s \approx 0,25$  МПа можно пренебречь – это не скажется на результате). Зависимости  $T(r)$  и  $p(r)$  определяют связь температуры и давления при каждом значении  $r$ , и по фазовой диаграмме мы можем найти точку пересечения кривой  $p_{eq}(T)$  с кривой фазового равновесия «вода-лед VII». В логарифмическом масштабе в нужном диапазоне кривая фазового равновесия выглядит почти как прямая, и ее можно, например, аппроксимировать выражением  $p_{eq}(T) \approx 10^9 \text{ Па} \cdot 10^y$ , где  $y = \frac{0,17 \cdot (T/1\text{К}) - 42}{63}$ . Вычисления (с большим «запасом» по количеству значащих цифр) вблизи точки пересечения дают:

$r$ , км	3931	2200	2100	<b>2062,4</b>	2000
$T(r)$ , К	400	439,34	443,60	<b>445,30</b>	448,28
$p(r)$ , ГПа	0,00025	3,082	3,330	<b>3,427</b>	3,595
$p_{eq}$ , ГПа	2,586	3,303	3,391	<b>3,427</b>	3,491

Конечно, реальная точность снятия данных с приведенной диаграммы намного ниже, так что разумными ответами на поставленные вопросы можно считать следующие: радиус внешней поверхности ледяного слоя  $r_{\text{Л}} \approx (2060 \pm 100)$  км, ее температура  $T_{\text{Л}} \approx (445 \pm 5)$  К.

Для определения радиуса ядра планеты  $r_2$  можно воспользоваться значением массы планеты и известными значениями плотностей веществ:

$$M = \frac{g R^2}{G} = \frac{4\pi}{3} [\rho_2 \cdot r_2^3 + \rho_1 (r_{\text{Л}}^3 - r_2^3) + \rho (R^3 - r_{\text{Л}}^3)] = \frac{4\pi \rho R^3}{3} \left[ \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho} x^3 + \frac{\rho_1 - \rho}{\rho} \left( \frac{r_{\text{Л}}}{R} \right)^3 + 1 \right],$$

где  $x \equiv \frac{r_2}{R}$ . Следовательно,  $x^3 = \frac{\rho}{\rho_2 - \rho_1} \left[ \frac{3g}{4\pi G \rho R} - 1 - \frac{\rho_1 - \rho}{\rho} \left( \frac{r_{\text{Л}}}{R} \right)^3 \right]$ . Вычисления приводят

к результату  $x \approx 0,4065$ , то есть  $r_2 \approx 1600$  км.

**ОТВЕТЫ:**  $r_{\text{Л}} \approx (2060 \pm 100)$  км,  $T_{\text{Л}} \approx (445 \pm 5)$  К,  $r_2 \approx (1600 \pm 100)$  км.

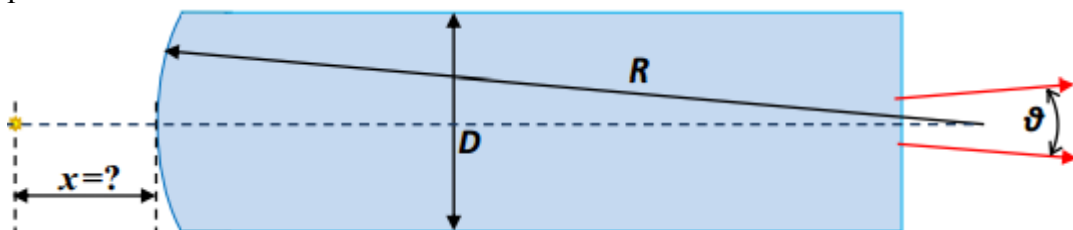
#### КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс.балл
Используется правильное уравнение постоянства потока тепла	<b>1</b>
Получена правильная зависимость $T(r) = T_s + \frac{P}{4\pi k} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$	<b>4</b>
Используется правильное выражение для массы планеты через данные задачи	<b>1</b>
Записана правильная зависимость $g(r)$	<b>2</b>
Записано правильное уравнение, эквивалентное $\frac{dp}{dr} = -\rho \cdot g(r)$	<b>1</b>

Выполнено интегрирование и получена правильная зависимость давления от радиуса, эквивалентная	<b>3</b>
$p(r) = p_s + \rho R(2\pi G\rho - g) + \frac{\rho R^2}{r} \left( g - \frac{4\pi G\rho R}{3} \right) - \frac{2\pi G\rho^2}{3} r^2$	
Предложена корректная процедура (аналитическая или графическая) сравнения значений давления и температуры с равновесными на границе раздела «вода-лед VII»	<b>3</b>
Ответ для радиуса поверхности льда $r_{\text{л}} \approx (2060 \pm 100)$ км*	<b>3</b>
Ответ для температуры поверхности льда $T_{\text{л}} \approx (445 \pm 10)$ К*	<b>2</b>
Записано правильное уравнение для нахождения радиуса ядра	<b>2</b>
Ответ для радиуса ядра планеты $r_2 \approx (1600 \pm 100)$ км*	<b>2</b>
Есть оценка точности большей части результатов (наличие)	<b>1</b>
<b>ВСЕГО</b>	<b>25</b>

\*Ответы засчитываются, только если они получены корректным образом. При попадании ответа не в заданный, а только в «удвоенный по ширине» интервал, за него выставляется **1 балл**.

3. («Очень толстая линза», 18 баллов) В одной из установок Харлана использовался пучок параллельных лучей с очень маленькой расходимостью – максимальный угол между двумя лучами в этом пучке не должен был превышать  $\vartheta_{\text{max}} = 0,1^\circ$ . Для создания такого пучка использовались яркий монохроматический сферический источник света с диаметром  $d = 4$  мкм и *коллиматор* – цилиндр диаметром  $D = 10$  см из стекла с показателем преломления  $n = 2$ , один торец которого тщательно отшлифован в форме сферической поверхности радиусом  $R = 50$  см, центр кривизны которой лежит на оси цилиндра (см. рисунок). На каком расстоянии  $x$  от вершины этой поверхности нужно разместить источник, чтобы его лучи, прошедшие через коллиматор, образовали пучок с требуемыми характеристиками?



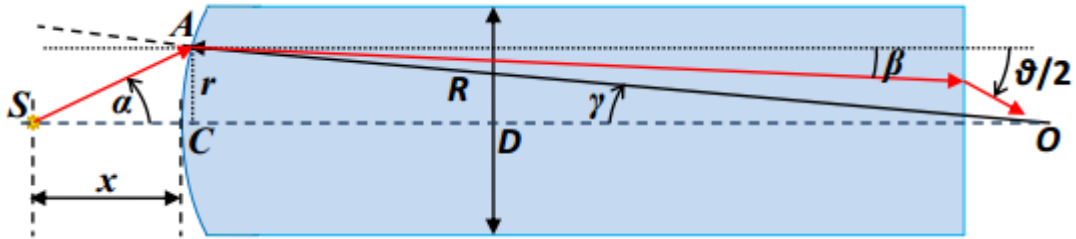
**Указание:** Учтите, что при  $\alpha \ll 1$  справедливы приближенные равенства  $\sin(\alpha) \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$  и

$$\text{tg}(\alpha) \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3} \text{ с ошибкой менее } \frac{\alpha^5}{5}.$$

#### **ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:**

Сразу отметим, что размеры источника крайне малы и их влиянием на ход лучей можно пренебрегать ( $\frac{d}{D} = 4 \cdot 10^{-5}$ , и даже для «крайних» лучей влияние размеров источника на угол наклона луча к оси менее  $0,001^\circ$ ). Введем обозначения: пусть  $\alpha$  – угол наклона к оси системы луча от источника, падающего на сферическую поверхность в точке А на расстоянии  $r$  от оси.





Угол отклонения преломленного луча от оси обозначим  $\beta$ , а угол между осью системы и радиусом сферической поверхности, проведенным в точку A, назовем  $\gamma$ . В качестве переменной, описывающей положение точки A, будем использовать  $y \equiv \sin(\gamma) = \frac{r}{R}$ . Как

видно, область изменения этой переменной  $0 \leq y \leq \frac{D}{2R} = 0,1 \ll 1$ . Закон преломления луча в

точке A дает связь углов  $\beta$  и  $\alpha$ :

$$\sin(\alpha + \gamma) = n \cdot \sin(\gamma - \beta) \Rightarrow \sin(\alpha) \sqrt{1 - y^2} + y \cos(\alpha) = 2y \cos(\beta) - 2 \sin(\beta) \sqrt{1 - y^2}. \quad (3.1)$$

Искомое расстояние  $x$  связано с углом  $\alpha$ :

$$x = r \cdot \text{ctg}(\alpha) - R[1 - \cos(\gamma)] = R[y \cdot \text{ctg}(\alpha) - 1 + \sqrt{1 - y^2}]. \quad (3.2)$$

Отметим, что отражение лучей от боковой цилиндрической поверхности коллиматора не изменяет модуля  $\beta$ , и к тому же для получающихся углов здесь происходит полное внутреннее отражение, так что и на яркость лучей эти отражения не влияют. В дальнейшем мы не будем обращать на них внимания. Так как ограничение на угол  $\vartheta = \arcsin[n \cdot \sin(\beta)]$  очень жесткое, то и углы  $\beta$  должны быть крайне малы, и с высокой точностью можно считать, что  $\frac{\vartheta}{2} = n |\beta| \Rightarrow |\beta| \leq \frac{\vartheta_{\max}}{4} = 0,025^\circ \approx 0,00044$ . Однако аналитически выразить  $\beta$  через и из полученных трансцендентных уравнений не получится. Поэтому тут возможны как минимум три пути:

I. Выразить  $\beta(x, y)$  из (3.1) и (3.2), пользуясь малостью  $y$ . При этом сразу необходимо понять, что слагаемые порядка  $y^3 \leq 10^{-3}$  существенны в требуемом масштабе точности вычислений, и их необходимо сохранять (пренебрегать мы можем только слагаемыми порядка  $y^5 \leq 10^{-5}$  и меньше). В этом случае из (3.2) с учетом  $1 - \sqrt{1 - y^2} \approx \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{8}$  находим:

$$\text{tg}(\alpha) \approx \frac{y}{z + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{8}}, \quad \text{где } z \equiv \frac{x}{R}. \quad \text{Записав } \alpha \approx a_1 y + a_3 y^3, \text{ и используя разложение для}$$

тангенса, находим, приравнивая слагаемые с одинаковой степенью:  $a_1 = \frac{1}{z}$  и  $a_3 = -\frac{3z + 2}{6z^3}$ .

Таким образом, с точностью до поправок порядка  $y^5$  угол  $\alpha \approx \frac{y}{z} - \frac{3z + 2}{6z^3} y^3$ . Аналогично в

(3.1) записываем  $\beta \approx b_1 y + b_3 y^3$ , и снова используем разложения для синуса и косинуса

$$(\cos(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\text{tg}(\alpha)} \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}): b_1 = \frac{z - 1}{2z} \text{ и } b_3 = + \frac{7z^3 + 9z^2 + 21z + 11}{48z^3}. \quad \text{Таким образом,}$$

$$\beta(y, z) \approx \frac{z - 1}{2z} y + \frac{7z^3 + 9z^2 + 21z + 11}{48z^3} y^3.$$

Мы обнаружили, что в порядке  $y^1$  при  $z=1$  (то есть для случая  $x=R$ , когда источник располагается в фокусе сферической поверхности, рассчитанном в параксиальном приближении – например, по формуле оптической силы тонкой линзы) мы получаем, что все лучи в коллиматоре идут параллельно оси. Однако при учете поправок порядка  $y^3$  для луча с максимальным отклонением ( $y=0,1$ ) от оси  $\beta(0,1,1) \approx 0,001 > 0,00044$ . Это означает, что при таком положении источника пучок имеет слишком большую расходимость! Как видно, на самом деле лучше взять  $z$  немного меньше 1, и в этом случае  $\beta_{\max}$  будет меньше. Например, можно выбрать его так, чтобы при  $y=0,1$  угол отклонения  $\beta$  обращался в ноль (это соответствует  $z \approx 0,980$  или  $x \approx 490$  мм), и этот выбор отвечает  $\beta_{\max} \approx 0,00041$ , то есть пучок удовлетворяет введенным требованиям. Более подробное исследование показывает, что пучок удовлетворяет требованиям при  $0,979 \leq z \leq 0,988$  (то есть  $489,5 \text{ мм} \leq x \leq 494 \text{ мм}$ ), а наименьшая расходимость пучка достигается при  $z \approx 0,984$  ( $x \approx 492$  мм).

II. Можно догадаться, что наиболее критичная область – область углов, близких к максимальному отклонению ( $y \approx 0,1$ ), и можно выбирать положение источника таким образом, чтобы  $\beta=0$  при определенном значении  $y$ , например – именно при  $y=0,1$ . Такой подбор можно осуществить непосредственно на базе формул (3.1) и (3.2): положив в (3.1)  $\beta=0$ , находим, что  $\sin(\alpha)\sqrt{1-y^2} + y\cos(\alpha) = 2y \Rightarrow \alpha = \arcsin[2\sin(\gamma)] - \gamma$ . Подставив это

значение в (3.2), находим, что  $x = R \left[ \frac{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-4y^2} + 2y^2}{2\sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-4y^2}} - 1 + \sqrt{1-y^2} \right]$ . Тогда для  $y=0,1$

получается  $x \approx 0,97985 \cdot R \approx 489,9$  мм. Как видно, этот метод дает разумный результат и намного проще по расчетам, но он менее строг: отсутствие аналитической формулы для  $\beta$  не позволяет провести анализ угла отклонения на максимум, и мы опираемся на «догадку» о том, что нужно минимизировать отклонение «крайних» преломленных лучей от оси.

III. Можно модифицировать «второй» метод, проведя численный анализ значений угла отклонения на максимум во всем возможном интервале точек падения (на основе формул (3.1) и (3.2) или в рамках корректного эквивалентного подхода). В этом случае – при четком объяснении процедуры и представлении результатов расчета для разных значений  $x$  и разных точек падения – такой метод решения становится строгим, и он засчитывался наравне с «первым».

**ОТВЕТ:**  $x \approx (492 \pm 2)$  мм.

#### КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс.балл
Указано (используется в решении), что размерами источника можно пренебречь	1
Указано (используется в решении), что отражения от боковой поверхности не влияют на результат	1
Правильно записан закон преломления на сферической поверхности (3.1)	3
Правильно записано уравнение, эквивалентное (3.2)	2
Обосновано, что в разложении по малому параметру нужно учитывать слагаемые с относительной величиной до $10^{-3}$ / Объяснено, что нужно минимизировать отклонение «крайних» лучей от оси	2 / 1*

Получено выражение для $\beta(y, z)$ в нужном порядке / найдено выражение для $x$ , при котором крайний луч не отклоняется	4 / 3*
Ответ для $x$ в виде диапазона $(492 \pm 2)$ мм / ответ в виде числа в диапазоне $(492 \pm 3)$ мм / только в диапазоне $(492 \pm 5)$ мм	3/2/1
Проведен анализ отклонения на максимум для всех точек падения	2*
<b>ВСЕГО</b>	<b>18</b>

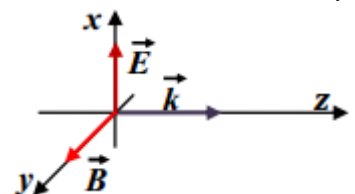
\*При решении «вторым» методом вообще без анализа отклонений на максимум во всем возможном интервале точек падения максимальная оценка равна **15 баллам**, если также нет объяснения, почему выбран крайний луч, то **14 баллам**.

**Примечание:** Как видно из приведенного решения, использование формулы тонкой линзы или «формулы шлифовальщика» при заданном требовании к *коллинеарности* (малой расходимости) пучка является слишком грубым, так как при их выводе в выражениях для синусов и тангенсов углов пренебрегают упомянутыми в условии кубическими поправками. Поэтому практически любое решение на основе этих формул оказывается по сути неверным. Кроме того, ясно, что в рамках параксиального приближения корректные вычисления обязательно должны привести нас к ответу  $x = 500$  мм. В ходе проверки жюри обнаружило много (более 100) работ с решениями, приводящими к ответу  $x \geq 504$  мм (или аналогичному со «сдвигом» запятой). Жюри просит участников в будущем быть более внимательными. Эти решения не только получены в рамках некорректного для данной задачи приближения с помощью вычислений, содержащих неточности, но и имеют физически бессмысленный ответ (из него, например, следует, что для лучи от удаленного ( $x \rightarrow \infty$ ) источника, находящегося на главной оптической оси линзы, после прохождения линзы идут практически параллельно этой оси, а это очевидно не так!). Поэтому такие решения считались полностью неправильными.

4. («Квантовая криптография», 16 баллов) Для передачи секретной информации руководству Вечности Эндрю Харлан использовал кодировку данных с помощью поляризационных состояний фотонов. Важной составляющей его установки было устройство, испускающее фотоны в заданном состоянии поляризации. Для его тестирования техник установил устройство так, что оно испускало фотоны в направлении оси  $z$ , и поставил на оси пучка детектор, регистрирующий фотоны, поляризованные вдоль оси  $x$ . Оказалось, что из серий по 1000 испущенных фотонов детектор в среднем регистрирует 800 фотонов. Затем Харлан изменил настройку детектора так, что теперь он должен был регистрировать фотоны, поляризованные линейно вдоль биссектрисы между осями  $x$  и  $y$ . Теперь детектор в среднем «замечал» 612 фотонов из 1000. Наконец, детектор был перенастроен на регистрацию фотонов с правой круговой поляризацией. Предполагая, что устройство на самом деле всегда испускает фотоны в одном и том же состоянии поляризации, предскажите, какое количество фотонов из серии в 1000 фотонов в среднем будет регистрировать детектор.

**Указание:** Перед решением задачи прочитайте справочный текст, посвященный *методу комплексных амплитуд* и *поляризациям фотонов*:

В *классической* волновой теории света для описания электромагнитной волны мы должны указать ее частоту  $\nu$  (длину волны  $\lambda$ ) и направление ее распространения (например, направив по нему вектор  $\vec{n}$  с единичной длиной). Эту информацию можно



объединить в одном объекте, если ввести волновой вектор  $\vec{k} \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} = \frac{2\pi}{c} v \vec{n}$  (где  $c$  – скорость света). Но при каждом значении  $\vec{k}$  у такой волны возможны две независимых *поляризации*. Они соответствуют двум возможным взаимно перпендикулярным направлениям, в которых происходят колебания вектора  $\vec{E}$  напряженности электрического поля в волне (они всегда происходят в плоскости, перпендикулярной  $\vec{k}$ ). Например, если  $\vec{k}$  направлен вдоль оси  $z$ , то две возможных поляризации соответствуют колебаниям вдоль осей  $x$  и  $y$ , которые можно задавать единичными векторами  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_y$ . Для примера на рисунке показано положение векторов  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в волне, поляризованной вдоль оси  $x$ .

Конечно, у волны могут быть и другие состояния поляризации, но их можно получить при помощи наложения (*суперпозиции*) базисных состояний. Отметим, что при составлении суперпозиции мы можем строить не только другие *линейные* поляризации (для них вектор  $\vec{E}$  в волне направлен вдоль оси, отличающейся от  $x$  и  $y$ , а проекции  $\vec{E}$  на базисные оси имеют разные значения, но колеблются *синфазно*). Путем суперпозиции можно получить также *круговые* или *эллиптические* поляризации, при которых проекции вектора  $\vec{E}$  на базисные оси совершают колебания со сдвигом по фазе относительно друг друга. Для описания таких колебаний можно использовать *метод комплексных амплитуд*.

Комплексные числа записываются в виде  $z = x + iy$ , в котором специальное число  $i \equiv \sqrt{-1}$  называют «мнимой единицей», а  $x$  и  $y$  – два вещественных числа, называемых вещественной и мнимой частью комплексного числа  $z$ :  $x = \text{Re}(z)$ ,  $y = \text{Im}(z)$ . Использование комплексных чисел позволяет расширить описание решений алгебраических уравнений (например, ясно, что с их помощью можно записывать корни квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом). Комплексные числа можно перемножать и делить друг на друга, получая снова комплексные числа. Эти операции определяются следующими формулами:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Вообще, с комплексными числами можно проводить любые алгебраические операции. Можно определить на множестве комплексных чисел многие известные Вам функции. Например, для экспоненты справедлива *формула Эйлера*:  $e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot [\cos(y) + i \cdot \sin(y)]$ .

Комплексное число  $z^* \equiv x - iy$  называют сопряженным к числу  $z$ . Вещественная неотрицательная величина  $|z| \equiv \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$  называется *модулем* комплексного числа. Если определить *фазу*  $\varphi$  комплексного числа с помощью формул  $\cos(\varphi) \equiv \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

и  $\sin(\varphi) \equiv \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , то можно ввести запись комплексного числа, представленного в

экспоненциальной форме  $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ . Теперь мы видим, что в комплексной форме записи можно объединить информацию об амплитуде и фазе колебания. Таким образом, произвольную поляризацию волны можно описывать вектором  $\vec{e} = \alpha \cdot \vec{e}_x + \beta \cdot \vec{e}_y$ , в записи

которого  $\alpha$  и  $\beta$  – это комплексные числа. Модуль каждого из этих чисел описывает величину вклада базисной поляризации, а фаза комплексного числа задает начальную фазу колебаний с этой поляризацией. Для физики существенна разность фаз двух складываемых колебаний, поэтому начальную фазу колебаний по оси  $x$  можно выбрать произвольно – например, равной 0. Тогда произвольное состояние поляризации волны описывается вектором

$$\vec{e} = |\alpha| \cdot \vec{e}_x + |\beta| e^{i\varphi} \cdot \vec{e}_y. \quad \text{Например, состояние с}$$

$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/2} \cdot \vec{e}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_x + \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_y$  называют состоянием с *правой круговой поляризацией*. В этом состоянии вклады базисных поляризаций одинаковы по амплитуде, и сдвинуты по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ . В классической волне с такой связью базисных поляризаций конец

вектора  $\vec{E}$  при взгляде «навстречу» волновому вектору  $\vec{k}$  при распространении волны описывает окружность, вращаясь подобно «правому» винту.

Согласно квантовой теории света, его можно рассматривать как совокупность дискретных «порций» энергии электромагнитного поля – *фотонов*. При этом для описания состояния отдельного фотона тоже можно использовать волновой вектор, который определяет импульс  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$  и энергию  $\varepsilon = h\nu = \hbar c |\vec{k}|$  фотона (здесь  $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} \approx 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка). Кроме того, у отдельного фотона тоже есть два независимых состояния поляризации, и для фотона с волновым вектором  $\vec{k} = k \cdot \vec{e}_z$  это могут быть состояния с поляризацией по  $x$  и  $y$ . Кроме того, фотон может находиться в поляризационном состоянии, являющимся *квантовой суперпозицией* этих состояний. Договоримся описывать состояние фотона в такой суперпозиции вектором  $\vec{e} = |\alpha| \cdot \vec{e}_x + |\beta| e^{i\varphi} \cdot \vec{e}_y$ .

Отличие квантовой суперпозиции от классической состоит в том, что волны, отвечающие распространению отдельных фотонов, являются *волнами вероятности*. Поэтому и предсказания результатов измерений в квантовой теории носят вероятностный характер. Если фотон находится в поляризационном состоянии  $\vec{e} = \alpha \cdot \vec{e}_x + \beta \cdot \vec{e}_y$ , то вероятность при измерении обнаружить его в состоянии  $\vec{e}' = \alpha' \cdot \vec{e}_x + \beta' \cdot \vec{e}_y$  равна квадрату модуля скалярного произведения соответствующих векторов, причем для комплексных векторов определение скалярного произведения содержит комплексное сопряжение: с учетом перпендикулярности  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_y$

$$w(\vec{e}, \vec{e}') = |\vec{e}' \cdot \vec{e}|^2 = |(\alpha' \cdot \vec{e}_x + \beta' \cdot \vec{e}_y) \cdot (\alpha \cdot \vec{e}_x + \beta \cdot \vec{e}_y)|^2 = |\alpha' \cdot \alpha + \beta' \cdot \beta|^2.$$

Например, легко убедиться, что для состояния  $\vec{e} = \alpha \cdot \vec{e}_x + \beta \cdot \vec{e}_y$  измерение поляризации фотона должно с вероятностью  $w_x = |\alpha|^2$  обнаруживать поляризацию вдоль оси  $x$ , и с вероятностью  $w_y = |\beta|^2 = 1 - w_x = 1 - |\alpha|^2$  – поляризацию вдоль оси  $y$ . Как видно, для любого состояния должно выполняться требование нормировки  $w_x + w_y = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

#### **ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:**

Согласно справочному тексту, состояние фотонов пучка можно описать вектором  $\vec{e} = |\alpha| \cdot \vec{e}_x + |\beta| e^{i\varphi} \cdot \vec{e}_y$ . При этом  $w_x = |\alpha|^2$ , и ясно, что вероятность обнаружить поляризацию вдоль  $x$  можно определить (пусть и с некоторой статистической неопределенностью) как  $w_x \approx \frac{N_1}{N} = \frac{800}{1000} = 0,8$ . Так как число фотонов в «порции» довольно

велико, считаем, что статистический разброс мал (на самом деле  $w_x = 0,800 \pm 0,013$ , но этот вывод требует «нешкольных» знаний, и для зачета решения он не требуется), и  $|\alpha| = \sqrt{0,8} \approx 0,894$ . Из условия нормировки находим, что  $w_y = |\beta|^2 = 1 - w_x \approx 0,2$ , то есть  $|\beta| = \sqrt{0,2} \approx 0,447$ . Итак,  $\vec{e} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}} e^{i\varphi} \cdot \vec{e}_y$ . Во втором случае поляризация, которую

должен обнаруживать детектор, соответствует  $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_y$ . Значит, вероятность регистрации во втором случае

$$w_2 = |\vec{e}_2^* \vec{e}|^2 = \left| \frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} e^{i\varphi} \right|^2 = \frac{[2 + \cos(\varphi)]^2 + \sin^2(\varphi)}{10} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cos(\varphi).$$

С другой стороны, результат второго эксперимента дает  $w_2 \approx \frac{N_2}{N} = 0,612$  ( $w_2 = 0,612 \pm 0,015$ ). Следовательно,  $\cos(\varphi) \approx 0,28$ , а это означает, что  $\sin(\varphi) \approx \pm 0,96$ .

Для третьего эксперимента, как следует из справочного текста  $\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_x + \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_y$ .

Поэтому вероятность регистрации фотонов в этом эксперименте

$$w_3 = |\vec{e}_3^* \vec{e}|^2 = \left| \frac{2}{\sqrt{10}} - \frac{i}{\sqrt{10}} e^{i\varphi} \right|^2 = \frac{[2 + \sin(\varphi)]^2 + \cos^2(\varphi)}{10} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \sin(\varphi) \approx 0,5 \pm 0,384.$$

Следовательно, ожидаемое среднее значение зарегистрированных фотонов  $N_3 = w_3 N \approx 500 \pm 384$ , то есть 884 или 116. На самом деле ясно, что точность этих предсказаний не выше точности, с которой были определены  $|\alpha|$ ,  $|\beta|$  и  $\varphi$ , так что возможная ошибка в определении отклонения  $w_3$  от 0,5 – около 5%. Значит, возможная ошибка в определении  $N_3$  – около 20. Но анализ точности предсказания в задаче не требовался.

**ОТВЕТ:** 884 или 116.

**КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:**

действие	макс.балл
Указано, что $w_x \approx \frac{N_1}{N} = 0,8$	1
Состояние фотонов пучка описано $\vec{e} =  \alpha  \cdot \vec{e}_x +  \beta  e^{i\varphi} \cdot \vec{e}_y$	1
Правильно найдено $ \alpha  = \sqrt{0,8} \approx 0,894$	1
Правильно найдено $ \beta  = \sqrt{0,2} \approx 0,447$	1
Указано, что $w_2 \approx \frac{N_2}{N} = 0,612$	1
Правильно найдено $\cos(\varphi) \approx 0,28$	2
Указано, что $\sin(\varphi) \approx \pm 0,96$ (есть два знака)	1
Показано, что $w_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \sin(\varphi)$	2
Правильно найдены оба возможных ответа (884 и 116)	3+3=6
<b>ВСЕГО</b>	<b>16</b>