Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 11 классов

Вариант ***1–1***

1. Решите уравнение

$$1-\sqrt{2}\sin x\,(\cos x+2\sin x)+\sqrt{2}\cos x\,(2\cos x-\sin x)=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right).$$

2. Из пункта A в пункт B по одной дороге с постоянными скоростями выехали велосипедист и мотоциклист. Один из них выехал в 13:00, а другой на час позже, при этом в пункт B они прибыли одновременно, хотя один из них сделал остановку в пути длительностью 2 часа. В котором часу они прибыли в B, если скорость мотоциклиста в два раза больше скорости велосипедиста?

3. Числа x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $x^3-6x^2+7x-1=0$. При каких значениях a, b, c корнями уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ являются числа x_1+x_2, x_2+x_3 и x_3+x_1?

4. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB=\sqrt{13}$.

5. На сфере расположены точки A, B, C таким образом, что минимальные расстояния по поверхности сферы от точки A до точки B, от точки A до точки C и от точки B до точки C равны 6π, 8π и 10π соответственно. Найдите минимальный возможный при таких условиях периметр треугольника ABC.

6. Для натурального числа N выписали все его натуральные делители p_l в порядке возрастания: $1=p_1<p_2<\dots<p_k=N$.

Обозначим количество натуральных делителей числа N через $\sigma(N)$.

Найдите все возможные значения $\sigma(N^3)$, если известно, что

$$p_3\cdot p_4\cdot p_{1876}\cdot p_{1877}\geqslant N^2.$$

2 апреля 2023 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 11 классов

Вариант ***1–2***

1. Решите уравнение

$$1-\sqrt{2}\cos x\,(\sin x+2\cos x)+\sqrt{2}\sin x\,(2\sin x-\cos x)=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right).$$

2. Из пункта A в пункт B по одной дороге с постоянными скоростями выехали велосипедист и мотоциклист. Один из них выехал в 13:00, а другой на час раньше, при этом в пункт B они прибыли одновременно, хотя один из них сделал остановку в пути длительностью 2 часа. В котором часу они прибыли в B, если скорость мотоциклиста в два раза больше скорости велосипедиста?

3. Числа x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $x^3+6x^2+7x+1=0$. При каких значениях a, b, c корнями уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ являются числа x_1+x_2, x_2+x_3 и x_3+x_1?

4. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB=\sqrt{26}$.

5. На сфере расположены точки A, B, C таким образом, что минимальные расстояния по поверхности сферы от точки A до точки B, от точки A до точки C и от точки B до точки C равны 4π, 3π и 5π соответственно. Найдите минимальный возможный при таких условиях периметр треугольника ABC.

6. Для натурального числа N выписали все его натуральные делители p_l в порядке возрастания: $1=p_1<p_2<\dots<p_k=N$.

Обозначим количество натуральных делителей числа N через $\sigma(N)$.

Найдите все возможные значения $\sigma(N^3)$, если известно, что

$$p_3\cdot p_4\cdot p_{1696}\cdot p_{1697}\geqslant N^2.$$

2 апреля 2023 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 11 классов

*Вариант **1–3***

1. Решите уравнение

$$1+\sqrt{2}\sin x\,(\cos x-2\sin x)+\sqrt{2}\cos x\,(2\cos x+\sin x)=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right).$$

2. Из пункта A в пункт B по одной дороге с постоянными скоростями выехали велосипедист и автомобилист. Один из них выехал в 14:00, а другой на час позже, при этом в пункт B они прибыли одновременно, хотя один из них сделал остановку в пути длительностью 2 часа. В котором часу они прибыли в B, если скорость автомобилиста в два раза больше скорости велосипедиста?

3. Числа x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $x^3-6x^2+7x-1=0$. При каких значениях a, b, c корнями уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ являются числа x_1+x_2, x_2+x_3 и x_3+x_1?

4. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB=5\sqrt{13}$.

5. На сфере расположены точки A, B, C таким образом, что минимальные расстояния по поверхности сферы от точки A до точки B, от точки A до точки C и от точки B до точки C равны 20π, 12π и 16π соответственно. Найдите минимальный возможный при таких условиях периметр треугольника ABC.

6. Для натурального числа N выписали все его натуральные делители p_l в порядке возрастания: $1=p_1<p_2<\dots<p_k=N$.

Обозначим количество натуральных делителей числа N через $\sigma(N)$.

Найдите все возможные значения $\sigma(N^3)$, если известно, что

$$p_3\cdot p_4\cdot p_{1876}\cdot p_{1877}\geqslant N^2.$$

2 апреля 2023 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 11 классов

*Вариант **1–4***

1. Решите уравнение

$$1+\sqrt{2}\cos x\,(\sin x-2\cos x)+\sqrt{2}\sin x\,(2\sin x+\cos x)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right).$$

2. Из пункта A в пункт B по одной дороге с постоянными скоростями выехали велосипедист и автомобилист. Один из них выехал в 12:00, а другой на час раньше, при этом в пункт B они прибыли одновременно, хотя один из них сделал остановку в пути длительностью 2 часа. В котором часу они прибыли в B, если скорость автомобилиста в два раза больше скорости велосипедиста?

3. Числа x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $x^3+6x^2+7x+1=0$. При каких значениях a, b, c корнями уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ являются числа x_1+x_2, x_2+x_3 и x_3+x_1?

4. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB=2\sqrt{26}$.

5. На сфере расположены точки A, B, C таким образом, что минимальные расстояния по поверхности сферы от точки A до точки B, от точки A до точки C и от точки B до точки C равны 15π, 9π и 12π соответственно. Найдите минимальный возможный при таких условиях периметр треугольника ABC.

6. Для натурального числа N выписали все его натуральные делители p_l в порядке возрастания: $1=p_1<p_2<\dots<p_k=N$.

Обозначим количество натуральных делителей числа N через $\sigma(N)$.

Найдите все возможные значения $\sigma(N^3)$, если известно, что

$$p_3\cdot p_4\cdot p_{1696}\cdot p_{1697}\geqslant N^2.$$

2 апреля 2023 г.

*Ответы и решения к варианту **1–1 (2)***

1. Ответ: $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Решение. После преобразований уравнение приводится к виду:

$$-\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=\cos 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\iff$$
$$\iff\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos 2x=\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin 2x,$$

откуда $\operatorname{tg}2x=1$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

1-2. Ответ: $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

1-3. Ответ: $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

1-4. Ответ: $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

2. Ответ: 16:00 или 19:00. Решение. Можно рассмотреть четыре случая (они соответствуют тому, что кто-то один из двоих стартовал первым, и кто-то один из двоих сделал остановку).

Но можно заметить, что если остановку делал велосипедист, то не важно, выехал он раньше или позже мотоциклиста, в движении он находился меньше времени, чем мотоциклист, и поэтому в B приедет позже. Значит, остановку делал мотоциклист. Тогда, обозначая через t время движения велосипедиста и через V его скорость, получаем два случая:

а) Если велосипедист выехал раньше, то $Vt=2V(t-3)$, откуда $t=6$. Поэтому время финиша равно 13:00 + 6 = 19:00.

б) Если мотоциклист выехал раньше, то $Vt=2V(t-1)$, откуда $t=2$. Тогда время финиша равно 14:00 + 2 = 16:00.

2-2. Ответ: 15:00 или 18:00.

2-3. Ответ: 17:00 или 20:00.

2-4. Ответ: 14:00 или 17:00.

3. Ответ: $a=-12$, $b=43$, $c=-41$. Решение. Так как $f(x)=x^3-6x^2+7x-1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, то можно доказать, что $x_1+x_2+x_3=6$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=7$, $x_1x_2x_3=1$ (то же самое можно получить из теоремы Виета для кубического уравнения).

Аналогично для второго уравнения: $-a=(x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_3+x_1)$;

$$b=(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)(x_3+x_1)+(x_3+x_1)(x_2+x_3);$$

$$-c=(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1).$$

Из первого соотношения получаем $a=-2(x_1+x_2+x_3)=-12$.

Из второго соотношения:

$$b=\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_2^2\right)+\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1^2\right)+$$
$$+\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_3^2\right)=3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+$$
$$+\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=6^2+7=43.$$

Наконец, $c=-(6-x_3)(6-x_1)(6-x_2)=-f(6)=-(6^3-6\cdot6^2+7\cdot6-1)=-41$.

Таким образом, второе уравнение имеет вид: $x^3-12x^2+43x-41=0$.

Имеется более короткий способ решения. По условию второй многочлен равен

$$(x-x_2-x_3)(x-x_1-x_3)(x-x_1-x_2)=(x-6+x_1)(x-6+x_2)(x-6+x_3)=$$
$$=(x-6)^3+(x-6)^2(x_1+x_2+x_3)+(x-6)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+x_1x_2x_3=$$
$$=(x-6)^3+6(x-6)^2+7(x-6)+1=(x^2-12x+36)(x-6+6)+7x-42+1=$$
$$=x^3-12x^2+36x+7x-41=x^3-12x^2+43x-41.$$

Отсюда сразу получается ответ.

3-2. Ответ: $a=12$, $b=43$, $c=41$.

3-3. Ответ: $a=-12$, $b=43$, $c=-41$.

3-4. Ответ: $a=12$, $b=43$, $c=41$.

4. Ответ: 12. Решение. Пусть $BE=AD=2a$, $AB=c$. Так как BF – высота и биссектриса треугольника ABD, то этот треугольник равнобедренный, поэтому $AB=BD=c$, $BC=2c$, и по формуле для длины биссектрисы (здесь $\beta=\angle ABC$):

$$2a=\frac{2\cdot2c\cdot c}{2c+c}\cos\frac{\beta}{2},\text{ то есть }\frac{3a}{2}=c\cdot\cos\frac{\beta}{2}.$$

Из треугольника ABF получаем $a=c\cdot\sin\frac{\beta}{2}$.

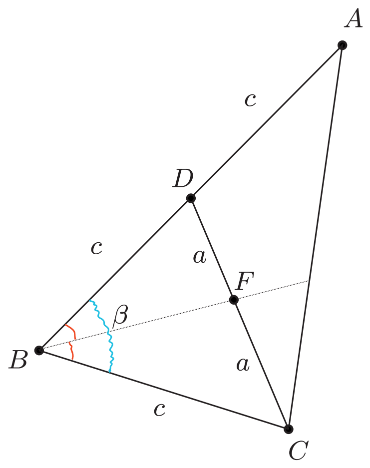

Рис. 1:

Значит,

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{2}{3},\ \cos\frac{\beta}{2}=\frac{3}{\sqrt{13}},\ \sin\frac{\beta}{2}=\frac{2}{\sqrt{13}},\ \sin\beta=\frac{12}{13}.$$

Площадь треугольника ABC равна $S_{ABC}=c^2\sin\beta=\frac{12}{13}c^2=12$.

Возможны и другие способы решения. Например, в треугольнике ABC известны две стороны $AB=c$ и $BC=2c$. Обозначим $AE=b$, $CE=2b$. После этого выразим через b биссектрису BE (формула $BE^2=AB\cdot BC-AE\cdot CE$) и медиану AD и приравняем их. Находим b, а после этого площадь либо по формуле Герона, либо с помощью теоремы косинусов.

4-2. Ответ: 24.

4-3. Ответ: 300.

4-4. Ответ: 96.

5. Ответ: $24\left(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{12}\right)=6\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$.

Решение. Сначала необходимо заметить, что кратчайшее расстояние между двумя расположенными на сфере точками по ее поверхности – это длина меньшей дуги, проходящей через эти две точки окружности, центр которой совпадает с центром сферы. Отсюда сразу следует первая оценка на радиус сферы: он не может быть меньше, чем 10. В противном случае длина самой большой окружности, расположенной на сфере, меньше, чем 20π, и длина ее меньшей дуги будет меньше, чем 10π, что противоречит условию задачи.

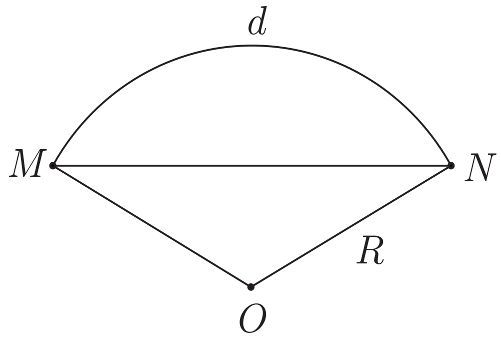

Рис. 2:

Обозначим радиус сферы за R, ее центр обозначим буквой O. Рассмотрим две произвольные точки M, N, пусть длина дуги MN равна d, отметим, что $0<d\leqslant\pi R$. Из сектора и треугольника OMN имеем

$$\alpha=\widehat{MON}=d/R,\ |MN|=2R\sin(\ d/2R).$$

Из этой формулы следует, что периметр треугольника ABC равен

$$2R\sin\frac{3\pi}{R}+2R\sin\frac{4\pi}{R}+2R\sin\frac{5\pi}{R}.$$

Рассмотрим функцию одной переменной

$$f(R)=R\,\sin\frac{q}{R}.$$

Ясно, что $f'(R)=\sin\frac{q}{R}-\frac{q}{R}\cos\frac{q}{R}$. Нетрудно доказать, что для всех R таких, что $0<q/R\leqslant\pi/2$ верно неравенство $f'(R)>0$. (это аналог того, что $\operatorname{tg}x>x$ для $x\in(0;\pi/2)$.

Обратим внимание, что все три слагаемых, входящих в периметр, являются такого сорта функциями, при этом радиус R не может быть меньше, чем 10 и, следовательно, величина $t=q/R$ во всех трех слагаемых принадлежит полуинтервалу $(0,\pi/2]$. Поэтому периметр треугольника ABC является возрастающей функцией параметра R и, следовательно, задача сводится к следующей: найти минимальный радиус сферы, на которой могут быть расположены точки A, B, C, удовлетворяющие данным из условия задачи.

Обоснование того, что минимальный радиус равен 12, состоит из двух тезисов. Во-первых, на сфере радиуса 12 расположить три точки в соответствии с условием задачи можно: достаточно взять «экватор» сферы, его длина равна 24π, что равно сумме данных в условии расстояний. Берем произвольную точку A на этой окружности, проходим по часовой стрелке расстояние 6π, отмечаем точку B, проходим еще 10π, отмечаем точку C.

Во-вторых, на сфере радиуса, меньшего чем 12, точки расположить не получится. Чтобы это доказать, проведем аналогию с глобусом. Представим себе, что точка B – это северный полюс планеты радиуса 12. Тогда геометрическим местом точек A, кратчайшее расстояние от которых по сфере до точки B равно 6π, будет параллель-«экватор», а геометрическим местом точек C, кратчайшее расстояние от которых по сфере до точки B равно 10π, будет параллель в южном полушарии. Максимальное расстояние между точкой с «экватора» и точкой с «южной» параллели как раз равно 8π, и будет достигаться в случае, когда эти точки расположены на противоположных меридианах. Любые меридиональные смещения одной из точек, очевидно, уменьшат расстояние между ними. Попытка уменьшить радиус сферы-планеты приведет к тому, что параллели, на которых лежат точки A и C, сместятся ближе к южному полюсу, и максимальное из расстояний между точками с этих параллелей (которое по-прежнему достигается в случае их расположения на противоположных меридианах) уже будет менее, чем 8π. Итак, минимально возможный радиус сферы равен 12, откуда получаем ответ: $24\left(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\ +\sin\frac{5\pi}{12}\ \right)=6\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$.

5-2. Ответ: $12\left(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{12}\right)=3(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6})$.

5-3. Ответ: $48\left(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{12}\right)=12\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$.

5-4. Ответ: $36\left(\sin\frac{\pi}{4}\ +\sin\frac{\pi}{3}\ +\sin\frac{5\pi}{12}\right)=9\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$.

6. Ответ: 5629, 5632, 5635, 11260, 13132, 14992, 26236.

Решение. Заметим, что если имеется разложение числа N на простые делители

$$N=t_1^{m_1}\cdot t_2^{m_2}\cdot\dots\cdot t_l^{m_l},$$

то

$$\sigma(N)=(m_1+1)\,(m_2+1)\cdots(m_l+1)$$

и

$$\sigma(N^3)=(3m_1+1)\,(3m_2+1)\cdots(3m_l+1).$$

Из условия вытекает, что $\sigma(N)\geqslant 1877$. Разберем несколько случаев:

1. Пусть $\sigma(N)=1877$. Тогда

$$1=p_1<p_2<p_3<p_4<\dots<p_{1876}=\frac{N}{p_2}<p_{1877}=N.$$

Следовательно, $p_3p_4p_{1876}p_{1877}=\frac{p_3\cdot p_4}{p_2}\cdot N^2\geqslant N^2$. Значит, этот случай нам подходит.

Поскольку 1877 — простое, то $\sigma(N)$ по приведенной выше формуле могло получиться только как $1877=(1876+1)$, то есть в этом случае возможен только вариант $N=p^{1876}$, где p — простое число. Следовательно, $\sigma(N^3)=(3\cdot1876+1)=5629$.

2. Пусть $\sigma(N)=1878$. Тогда

$$1=p_1<p_2<p_3<p_4<\dots<p_{1876}=\frac{N}{p_3}<p_{1877}=\frac{N}{p_2}<p_{1878}.$$

Следовательно, $p_3p_4p_{1876}p_{1877}=\frac{p_4}{p_2}\cdot N^2\geqslant N^2$. Этот случай подходит. Поскольку $1878=2\cdot3\cdot313$, то существует несколько разложений следующего вида $1878=(1877+1)=(1+1)(938+1)=(2+1)(625+1)=(5+1)(312+1)=(1+1)(2+1)(312+1)$. Откуда все возможные значения $\sigma(N^3)$ в этом случае равны: $(3\cdot1877+1)=5632$, $(3\cdot1+1)(3\cdot938+1)=11260$, $(3\cdot2+1)(3\cdot625+1)=13132$, $(3\cdot5+1)(3\cdot312+1)=14992$, $(3\cdot1+1)(3\cdot2+1)(3\cdot312+1)=26236$.

3. Пусть $\sigma(N)=1879$. Тогда

$$1=p_1<p_2<p_3<p_4<\dots<p_{1876}=\frac{N}{p_4}<p_{1877}=$$
$$=\frac{N}{p_3}<p_{1878}=\frac{N}{p_2}<p_{1879}=N.$$

Следовательно, $p_3p_4p_{1876}p_{1877}=N^2$. Этот случай подходит. Поскольку 1879 — простое, то существует только одно разложение вида $1879=(1878+1)$. Поэтому в этом случае возможен только вариант вида $N=p^{1878}$, где p — простое число. Следовательно, $\sigma(N^3)=(3\cdot1878+1)=5635$.

4. Пусть $\sigma(N)\geqslant 1880$. Тогда $p_{1876}<\frac{N}{p_3}$, $p_{1877}<\frac{N}{p_2}$. Следовательно, $p_3p_4p_{1876}p_{1877}<N^2$. Этот случай нам не подходит.

6-2. Ответ: 5089, 5092, 5095, 10180, 11872, 13552, 23716.

6-3. Ответ: 5629, 5632, 5635, 11260, 13132, 14992, 26236.

6-4. Ответ: 5089, 5092, 5095, 10180, 11872, 13552, 23716.

ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ – 2022-23. МАТЕМАТИКА.

Критерии проверки. 11 класс

Каждая из шести задач оценивается в 20 баллов. Максимальная оценка = 100 баллов.

Участники, набравшие 100 или больше 100 баллов, получают оценку 100.

В каждой из задач за различные недостатки (ошибки в логике, пропущенные переходы, недостатки обоснований, ошибки и т. д.), могло быть снято от 5 до 20 баллов.

Кроме этого, некоторые стандартные ошибки описаны ниже.

Задача № 1 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Одна вычислительная ошибка при правильном способе решения, или правильно получено простейшее тригонометрическое уравнение, при решении которого допущена ошибка	±	10
Более одной вычислительной ошибки или любые другие ошибки в тригонометрических формулах	–	0

Задача № 2 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Рассмотрены все 4 случая (при этом 2 из них могут быть обосно-ванно отброшены из логических соображений), но ответ неверен из-за вычислительных ошибок	±	10
Рассмотрены не все случаи, но два правильных ответа получены	±	10
Рассмотрены не все случаи, получен только один ответ	∓	5

Задача № 3 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Идейно верное решение, но одна из трех величин посчитана не-верно из-за вычислительных ошибок	±	10
Идейно верное решение, но две или все три величины посчитаны неверно из-за вычислительных ошибок	∓	5
Ошибки при использовании теоремы Виета, в остальном решение идейно верное	∓	5

Задача № 4 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Использован правильный способ решения, но ответ неверен из-за арифметических ошибок	±	10
Решение идейно правильное, но не доведено до конца	∓	5

Задача № 5 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Получен правильный ответ, но одно из следующих положений не обосновано или обосновано неверно: 1) Минимум периметра достигается при минимальном радиусе 2) Верная формула зависимости периметра от радиуса 3) Реализуемость ситуации при минимальном радиусе (пример) 4) Данный радиус является минимальным	±	10
Вычислительные ошибки при правильном способе решения и вер-ном обосновании всех основных положений	±	10
Получен правильный ответ, но два или три из приведенных выше положений не обоснованы или Ответ неверный, но обосновано, минимум, два из приведенных выше положений	∓	5

Задача № 6 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
При идейно правильном решении допущены вычислительные ошибки, или получены все случаи, но подсчеты не доведены до конца	±	10
Обосновано получена часть ответа. Верно рассмотрен одна из пра-вильных ситуаций. Нет обоснования, что большие значения $\sigma(N)$ не подходят	∓	5