

# ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ.

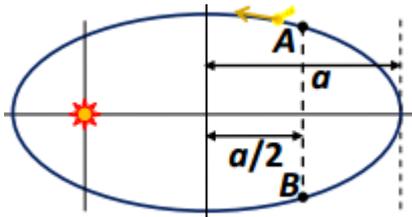
2023/24 учебный год, ЗАДАНИЕ ЗАОЧНОГО ТУРА. 11 классы.

## Часть I.

### Вопрос 1 (7 баллов):

#### Вариант 1.

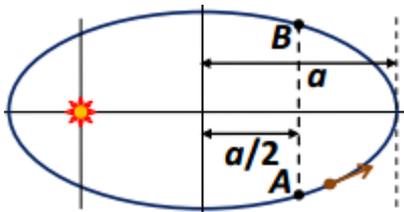
Комета движется вокруг Солнца по эллиптической траектории. Астрономы отметили два ее положения (точки A и B на орбите, расположенные на концах отрезка, перпендикулярного большой оси эллипса на равных расстояниях от малой оси и от точки афелия). Пренебрегая изменением массы кометы, найдите работу силы тяготения Солнца над кометой на ее пути от точки A к точке B. Ответ запишите в МДж.



Ответ: 0.

#### Вариант 2.

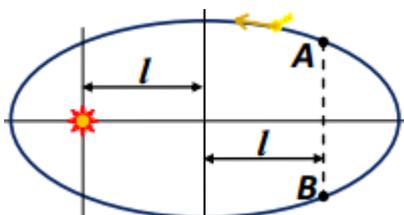
Болид движется вокруг Солнца по эллиптической траектории. Астрономы отметили два его положения (точки A и B на орбите, расположенные на концах отрезка, перпендикулярного большой оси эллипса на равных расстояниях от малой оси и от точки афелия). Пренебрегая изменением массы болида, найдите работу силы тяготения Солнца над болидом на его пути от точки A к точке B. Ответ запишите в МДж.



Ответ: 0.

#### Вариант 3.

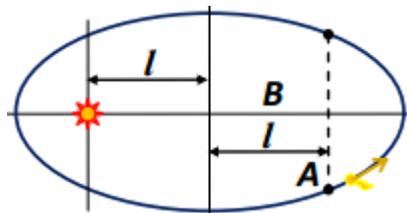
Комета движется вокруг Солнца по эллиптической траектории. Астрономы отметили два ее положения (точки A и B на орбите, расположенные на концах отрезка, перпендикулярного большой оси эллипса и проходящего через фокус эллипса, в котором нет Солнца). Пренебрегая изменением массы кометы, найдите работу силы тяготения Солнца над кометой на ее пути от точки A к точке B. Ответ запишите в МДж.



Ответ: 0.

Вариант 4.

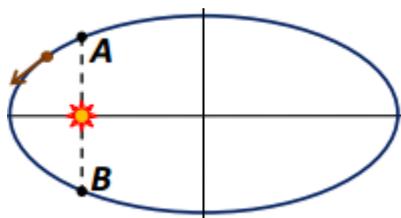
Комета движется вокруг Солнца по эллиптической траектории. Астрономы отметили два ее положения (точки A и B на орбите, расположенные на концах отрезка, перпендикулярного большой оси эллипса и проходящего через фокус эллипса, в котором нет Солнца). Пренебрегая изменением массы кометы, найдите работу силы тяготения Солнца над кометой на ее пути от точки A к точке B. Ответ запишите в МДж.



Ответ: 0.

Вариант 5.

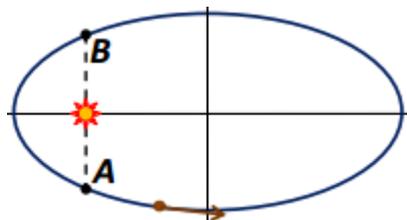
Болид движется вокруг Солнца по эллиптической траектории. Астрономы отметили два его положения (точки A и B на орбите, расположенные на концах отрезка, перпендикулярного большой оси эллипса и проходящего через центр Солнца). Пренебрегая изменением массы болида, найдите работу силы тяготения Солнца над болидом на его пути от точки A к точке B. Ответ запишите в МДж.



Ответ: 0.

Вариант 6.

Болид движется вокруг Солнца по эллиптической траектории. Астрономы отметили два его положения (точки A и B на орбите, расположенные на концах отрезка, перпендикулярного большой оси эллипса и проходящего через центр Солнца). Пренебрегая изменением массы болида, найдите работу силы тяготения Солнца над болидом на его пути от точки A к точке B. Ответ запишите в МДж.

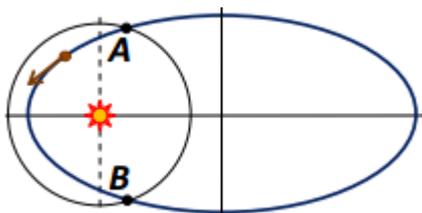


Ответ: 0.

Вариант 7.

Болид движется вокруг Солнца по эллиптической траектории. Астрономы отметили два его положения (точки A и B на орбите, расположенные на одной окружности с центром в центре

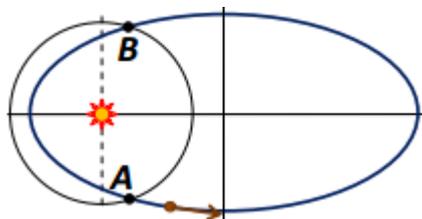
Солнца, радиус которой больше расстояния от Солнца до перигелия). Пренебрегая изменением массы болида, найдите работу силы тяготения Солнца над болидом на его пути от точки А к точке В. Ответ запишите в МДж.



Ответ: 0.

Вариант 8.

Болид движется вокруг Солнца по эллиптической траектории. Астрономы отметили два его положения (точки А и В на орбите, расположенные на одной окружности с центром в центре Солнца, радиус которой больше расстояния от Солнца до перигелия). Пренебрегая изменением массы болида, найдите работу силы тяготения Солнца над болидом на его пути от точки А к точке В. Ответ запишите в МДж.



Ответ: 0.

**Вопрос 2 (8 баллов):**

Вариант 1.

Маленькая массивная шайба может скользить без трения по поверхности, уравнение которой в декартовых координатах – это

$$z(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{4H^3} - \frac{\pi^2(x^2 + y^2)}{2H}$$

(ось  $z$  вертикальна, а плоскость  $xy$  горизонтальна). Шайба покоилась. Ее отвели вдоль поверхности на очень маленькое расстояние и аккуратно отпустили. При этом она поехала по кратчайшему пути (вдоль поверхности!) в свое прежнее положение. За какое время шайба до него доедет? Известно, что величина  $H = 0,576$  м, ускорение свободного падения принять равным  $g \approx 9,8$  м/с<sup>2</sup>. Ответ запишите в миллисекундах, без указания единиц измерения.

Ответ: 75.

Вариант 2.

Маленькая массивная шайба может скользить без трения по поверхности, уравнение которой в декартовых координатах – это

$$z(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{4H^3} - \frac{\pi^2(x^2 + y^2)}{2H}$$

(ось  $z$  вертикальна, а плоскость  $xy$  горизонтальна). Шайба покоилась. Ее отвели вдоль поверхности на очень маленькое расстояние и аккуратно отпустили. При этом она поехала по кратчайшему пути (вдоль поверхности!) в свое прежнее положение. За какое время

шайба до него доедет? Известно, что величина  $H = 1,024$  м, ускорение свободного падения принять равным  $g \approx 9,80$  м/с<sup>2</sup>. Ответ запишите в миллисекундах, без указания единиц измерения.

Ответ: 100.

### Вариант 3.

Маленькая массивная шайба может скользить без трения по поверхности, уравнение которой в декартовых координатах – это

$$z(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{4H^3} - \frac{\pi^2(x^2 + y^2)}{2H}$$

(ось  $z$  вертикальна, а плоскость  $xy$  горизонтальна). Шайба покоилась. Ее отвели вдоль поверхности на очень маленькое расстояние и аккуратно отпустили. При этом она поехала по кратчайшему пути (вдоль поверхности!) в свое прежнее положение. За какое время шайба до него доедет? Известно, что величина  $H = 1,60$  м, ускорение свободного падения принять равным  $g \approx 9,80$  м/с<sup>2</sup>. Ответ запишите в миллисекундах, без указания единиц измерения.

Ответ: 125.

### Вариант 4.

Маленькая массивная шайба может скользить без трения по поверхности, уравнение которой в декартовых координатах – это

$$z(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{4H^3} - \frac{\pi^2(x^2 + y^2)}{2H}$$

(ось  $z$  вертикальна, а плоскость  $xy$  горизонтальна). Шайба покоилась. Ее отвели вдоль поверхности на очень маленькое расстояние и аккуратно отпустили. При этом она поехала по кратчайшему пути (вдоль поверхности!) в свое прежнее положение. За какое время шайба до него доедет? Известно, что величина  $H = 2,304$  м, ускорение свободного падения принять равным  $g \approx 9,80$  м/с<sup>2</sup>. Ответ запишите в миллисекундах, без указания единиц измерения.

Ответ: 150.

### Вариант 5.

Маленькая массивная шайба может скользить без трения по поверхности, уравнение которой в декартовых координатах – это

$$z(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{4H^3} - \frac{\pi^2(x^2 + y^2)}{2H}$$

(ось  $z$  вертикальна, а плоскость  $xy$  горизонтальна). Шайба покоилась. Ее отвели вдоль поверхности на очень маленькое расстояние и аккуратно отпустили. При этом она поехала по кратчайшему пути (вдоль поверхности!) в свое прежнее положение. За какое время шайба до него доедет? Известно, что величина  $H = 3,136$  м, ускорение свободного падения принять равным  $g \approx 9,80$  м/с<sup>2</sup>. Ответ запишите в миллисекундах, без указания единиц измерения.

Ответ: 175.

### Вариант 6.

Маленькая массивная шайба может скользить без трения по поверхности, уравнение которой в декартовых координатах – это

$$z(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{4H^3} - \frac{\pi^2(x^2 + y^2)}{2H}$$

(ось  $z$  вертикальна, а плоскость  $xy$  горизонтальна). Шайба покоилась. Ее отвели вдоль поверхности на очень маленькое расстояние и аккуратно отпустили. При этом она поехала по кратчайшему пути (вдоль поверхности!) в свое прежнее положение. За какое время шайба до него доедет? Известно, что величина  $H = 4,096$  м, ускорение свободного падения принять равным  $g \approx 9,80$  м/с<sup>2</sup>. Ответ запишите в миллисекундах, без указания единиц измерения.

Ответ: 200.

#### Вариант 7.

Маленькая массивная шайба может скользить без трения по поверхности, уравнение которой в декартовых координатах – это

$$z(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{4H^3} - \frac{\pi^2(x^2 + y^2)}{2H}$$

(ось  $z$  вертикальна, а плоскость  $xy$  горизонтальна). Шайба покоилась. Ее отвели вдоль поверхности на очень маленькое расстояние и аккуратно отпустили. При этом она поехала по кратчайшему пути (вдоль поверхности!) в свое прежнее положение. За какое время шайба до него доедет? Известно, что величина  $H = 6,40$  м, ускорение свободного падения принять равным  $g \approx 9,80$  м/с<sup>2</sup>. Ответ запишите в миллисекундах, без указания единиц измерения.

Ответ: 250.

#### Вариант 8.

Маленькая массивная шайба может скользить без трения по поверхности, уравнение которой в декартовых координатах – это

$$z(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{4H^3} - \frac{\pi^2(x^2 + y^2)}{2H}$$

(ось  $z$  вертикальна, а плоскость  $xy$  горизонтальна). Шайба покоилась. Ее отвели вдоль поверхности на очень маленькое расстояние и аккуратно отпустили. При этом она поехала по кратчайшему пути (вдоль поверхности!) в свое прежнее положение. За какое время шайба до него доедет? Известно, что величина  $H = 7,744$  м, ускорение свободного падения принять равным  $g \approx 9,80$  м/с<sup>2</sup>. Ответ запишите в миллисекундах, без указания единиц измерения.

Ответ: 275.

#### Вариант 9.

Маленькая массивная шайба может скользить без трения по поверхности, уравнение которой в декартовых координатах – это

$$z(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{4H^3} - \frac{\pi^2(x^2 + y^2)}{2H}$$

(ось  $z$  вертикальна, а плоскость  $xy$  горизонтальна). Шайба покоилась. Ее отвели вдоль поверхности на очень маленькое расстояние и аккуратно отпустили. При этом она поехала по кратчайшему пути (вдоль поверхности!) в свое прежнее положение. За какое время шайба до него доедет? Известно, что величина  $H = 5,184$  м, ускорение свободного падения

принять равным  $g \approx 9,80 \text{ м/с}^2$ . Ответ запишите в миллисекундах, без указания единиц измерения.

Ответ: 225.

#### Вариант 10.

Маленькая массивная шайба может скользить без трения по поверхности, уравнение которой в декартовых координатах – это

$$z(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{4H^3} - \frac{\pi^2(x^2 + y^2)}{2H}$$

(ось  $z$  вертикальна, а плоскость  $xy$  горизонтальна). Шайба покоилась. Ее отвели вдоль поверхности на очень маленькое расстояние и аккуратно отпустили. При этом она поехала по кратчайшему пути (вдоль поверхности!) в свое прежнее положение. За какое время шайба до него доедет? Известно, что величина  $H = 9,216 \text{ м}$ , ускорение свободного падения принять равным  $g \approx 9,80 \text{ м/с}^2$ . Ответ запишите в миллисекундах, без указания единиц измерения.

Ответ: 300.

### **Вопрос 3 (10 баллов):**

#### Вариант 1.

На рисунке показана  $pV$ -диаграмма циклического процесса с постоянным количеством одноатомного идеального газа в относительных единицах давления и объема. Цикл состоит из процесса, описываемого участком прямой  $\frac{p}{p_0} = 8 - \frac{V}{V_0}$  и изотермы. Минимальный объем газа в цикле равен  $n \cdot V_0$ . Найдите КПД цикла при  $n = 1,05$ . Ответ запишите в процентах с точностью до десятых.

Ответ: 31,4.

#### Вариант 2.

На рисунке показана  $pV$ -диаграмма циклического процесса с постоянным количеством одноатомного идеального газа в относительных единицах давления и объема. Цикл состоит из процесса, описываемого участком прямой  $\frac{p}{p_0} = 8 - \frac{V}{V_0}$  и изотермы. Минимальный объем газа в цикле равен  $n \cdot V_0$ . Найдите КПД цикла при  $n = 1,15$ . Ответ запишите в процентах с точностью до десятых.

Ответ: 29,5.

#### Вариант 3.

На рисунке показана  $pV$ -диаграмма циклического процесса с постоянным количеством одноатомного идеального газа в относительных единицах давления и объема. Цикл состоит из процесса, описываемого участком прямой  $\frac{p}{p_0} = 8 - \frac{V}{V_0}$  и изотермы. Минимальный объем газа в цикле равен  $n \cdot V_0$ . Найдите КПД цикла при  $n = 1,45$ . Ответ запишите в процентах с точностью до десятых.

Ответ: 24,1.

#### Вариант 4.

На рисунке показана  $pV$ -диаграмма циклического процесса с постоянным количеством одноатомного идеального газа в относительных единицах давления и объема. Цикл состоит из процесса, описываемого участком прямой  $\frac{p}{p_0} = 8 - \frac{V}{V_0}$  и изотермы. Минимальный объем газа в цикле равен  $n \cdot V_0$ . Найдите КПД цикла при  $n = 1,75$ . Ответ запишите в процентах с точностью до десятых.

Ответ: 19,3.

Вариант 5.

На рисунке показана  $pV$ -диаграмма циклического процесса с постоянным количеством одноатомного идеального газа в относительных единицах давления и объема. Цикл состоит из процесса, описываемого участком прямой  $\frac{p}{p_0} = 8 - \frac{V}{V_0}$  и изотермы. Минимальный объем газа в цикле равен  $n \cdot V_0$ . Найдите КПД цикла при  $n = 1,85$ . Ответ запишите в процентах с точностью до десятых.

Ответ: 17,8.

Вариант 6.

На рисунке показана  $pV$ -диаграмма циклического процесса с постоянным количеством одноатомного идеального газа в относительных единицах давления и объема. Цикл состоит из процесса, описываемого участком прямой  $\frac{p}{p_0} = 8 - \frac{V}{V_0}$  и изотермы. Минимальный объем газа в цикле равен  $n \cdot V_0$ . Найдите КПД цикла при  $n = 2,15$ . Ответ запишите в процентах с точностью до десятых.

Ответ: 13,6.

Вариант 7.

На рисунке показана  $pV$ -диаграмма циклического процесса с постоянным количеством одноатомного идеального газа в относительных единицах давления и объема. Цикл состоит из процесса, описываемого участком прямой  $\frac{p}{p_0} = 8 - \frac{V}{V_0}$  и изотермы. Минимальный объем газа в цикле равен  $n \cdot V_0$ . Найдите КПД цикла при  $n = 2,25$ . Ответ запишите в процентах с точностью до десятых.

Ответ: 12,3.

Вариант 8.

На рисунке показана  $pV$ -диаграмма циклического процесса с постоянным количеством одноатомного идеального газа в относительных единицах давления и объема. Цикл состоит из процесса, описываемого участком прямой  $\frac{p}{p_0} = 8 - \frac{V}{V_0}$  и изотермы. Минимальный объем газа в цикле равен  $n \cdot V_0$ . Найдите КПД цикла при  $n = 2,55$ . Ответ запишите в процентах с точностью до десятых.

Ответ: 8,7.

Вариант 9.

На рисунке показана  $pV$ -диаграмма циклического процесса с постоянным количеством одноатомного идеального газа в относительных единицах давления и объема. Цикл состоит из процесса, описываемого участком прямой  $\frac{p}{p_0} = 8 - \frac{V}{V_0}$  и изотермы. Минимальный объем

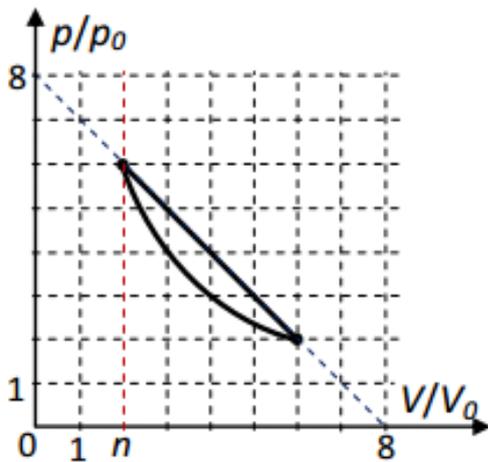
газа в цикле равен  $n \cdot V_0$ . Найдите КПД цикла при  $n = 2,65$ . Ответ запишите в процентах с точностью до десятых.

Ответ: 7,6.

Вариант 10.

На рисунке показана  $pV$ -диаграмма циклического процесса с постоянным количеством одноатомного идеального газа в относительных единицах давления и объема. Цикл состоит из процесса, описываемого участком прямой  $\frac{p}{p_0} = 8 - \frac{V}{V_0}$  и изотермы. Минимальный объем газа в цикле равен  $n \cdot V_0$ . Найдите КПД цикла при  $n = 2,90$ . Ответ запишите в процентах с точностью до десятых.

Ответ: 5,1.



# ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ.

2023/24 учебный год, ЗАДАНИЕ ЗАОЧНОГО ТУРА. 11 классы.

## Часть II. «ИДЕИ ГРОМИТА И РАЗРАБОТКИ УОЛЛЕСА»: Возможные решения и критерии проверки.

1. («Догонялки по правилам», 20 баллов) Уоллес и Громит полюбили игру в догонялки на большом пустыре с ровной поверхностью, правила которой придумал Громит. Один участник предлагал кривую, по которой он хотел бежать, а другой должен был изобрести правила погони, обеспечивающие первому такое движение. Затем они бежали в соответствии с предложенными правилами, причем первый отмечал траекторию своего движения камешками. После завершения погони они поднимались на соседнее с пустырем здание и любовались получившейся кривой. В одном из вариантов предложенные Громитом правила были таковы: в стартовой позиции участники находились на расстоянии  $L_0 = 100$  м, и одновременно начинали бежать с равными по величине скоростями  $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v = 4$  м/с. Уоллес всегда бежал строго по направлению к Громиту, а Громит убежал в направлении, составляющим всегда один и тот же угол  $\alpha = 60^\circ$  с направлением от Уоллеса.

- Определите с ошибкой не более секунды время, которое потребуется Уоллесу, чтобы догнать Громита.
- Найдите закон изменения угловой скорости вращения участников погони.
- На какой угол повернутся вектора скоростей участников погони от ее начала до момента времени, когда расстояние между ними уменьшится до  $L = 25$  м?
- На каких расстояниях от своих точек старта окажутся Уоллес и Громит к окончанию погони (при вычислении этих расстояний размерами участников погони можно пренебречь)?
- Изобразите примерно кривую, которую образуют оставленные Уоллесом камешки.

**Математическая подсказка:**

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \cos(\omega t) dt = \frac{1}{1 + \omega^2}, \int_0^{\infty} e^{-t} \sin(\omega t) dt = \frac{\omega}{1 + \omega^2}.$$

**Возможное решение:** Рассмотрим бесконечно малый интервал времени  $dt$  в процессе погони. Изменение расстояния между Уоллесом и Громитом за этот промежуток времени

$$dL = [v_2 \cdot \cos(\alpha) - v_1] \cdot dt.$$

Как видно ( $v_2 \cdot \cos(\alpha) - v_1 < 0$ ),  $L$  уменьшается с постоянной скоростью. Суммируя изменения расстояния и времени в ходе погони, находим искомое время:

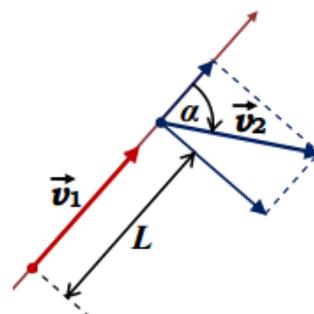
$$L_0 = [v_1 - v_2 \cos(\alpha)]t \Rightarrow t = \frac{L_0}{[v_1 - v_2 \cos(\alpha)]} = 50 \text{ с.}$$

Ясно, что закон изменения расстояния между участниками погони

$$L(t) = L_0 - [v_1 - v_2 \cos(\alpha)]t.$$

За время  $dt$  вектор скорости Уоллеса поворачивается вместе с направлением на Громита, поскольку скорость Громита имеет составляющую  $v_2 \cdot \sin(\alpha)$ , перпендикулярную этому направлению. Угол поворота за время  $dt$

$$d\varphi \equiv \omega \cdot dt = \frac{v_2 \cdot \sin(\alpha) \cdot dt}{L(t)} \Rightarrow \omega(t) = \frac{v_2 \cdot \sin(\alpha)}{L_0 - [v_1 - v_2 \cos(\alpha)]t}.$$



Мы нашли закон изменения угловой скорости Уоллеса, но ясно, что у Громита она точно такая же – ведь угол между направлениями их скоростей постоянен. Удобно связать угол поворота с изменением расстояния: поскольку  $dL = -[v_1 - v_2 \cos(\alpha)]dt$ , то

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_2 \cdot \sin(\alpha)}{L} \Rightarrow d\varphi = -\frac{v_2 \cdot \sin(\alpha)}{v_1 - v_2 \cos(\alpha)} \frac{dL}{L} \Rightarrow \varphi = \frac{v_2 \cdot \sin(\alpha)}{v_1 - v_2 \cos(\alpha)} \ln\left(\frac{L_0}{L}\right).$$

Здесь при интегрировании мы решили отсчитывать угол поворота от начального положения. Таким образом, с учетом равенства модулей скоростей, угол поворота векторов скоростей обоих участников погони к моменту, когда расстояние между ними уменьшится в 4 раза

$$\varphi_4 = \frac{\sin(\alpha)}{1 - \cos(\alpha)} \ln(4) = \sqrt{3} \cdot \ln(4) \text{ рад} \approx 2,401 \text{ рад} \approx 137,6^\circ.$$

В дальнейшем будем обозначать  $\frac{v_2 \cdot \sin(\alpha)}{v_1 - v_2 \cos(\alpha)} \equiv k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Тогда  $L(\varphi) = L_0 \cdot e^{-k\varphi}$ .

К окончанию погони Уоллес и Громит должны оказаться практически в одной точке, поэтому будем далее следить только за движением Уоллеса. Совместим начало координат с точкой его старта, и направление на Громита выберем направлением оси  $y$ , направив ось  $x$  перпендикулярно ей в сторону смещения Громита. Поскольку величина скорости Уоллеса постоянна, то проекции его скоростей

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} = v_1 \cdot \sin(\varphi) \\ v_y = \frac{dy}{dt} = v_1 \cdot \cos(\varphi) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{d\varphi} = \frac{v_1}{\omega} \cdot \sin(\varphi) = \frac{v_1 L}{v_2 \sin(\alpha)} \sin(\varphi) = \frac{v_1 L_0}{v_2 \sin(\alpha)} e^{-k\varphi} \sin(\varphi) \\ \frac{dy}{d\varphi} = \frac{v_1}{\omega} \cdot \cos(\varphi) = \frac{v_1 L}{v_2 \sin(\alpha)} \cos(\varphi) = \frac{v_1 L_0}{v_2 \sin(\alpha)} e^{-k\varphi} \cos(\varphi) \end{array} \right.$$

Полный угол поворота за все время погони очень велик (при  $L \rightarrow 0 \quad \varphi \rightarrow \infty$ ), и поэтому конечные координаты Уоллеса (и Громита) можно найти с использованием «математической подсказки»:  $\bar{x} = \frac{v_1 L_0}{v_2 \sin(\alpha)} \int_0^\infty e^{-k\varphi} \sin(\varphi) d\varphi$  и  $\bar{y} = \frac{v_1 L_0}{v_2 \sin(\alpha)} \int_0^\infty e^{-k\varphi} \cos(\varphi) d\varphi$ ,

то есть

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = \frac{v_1 L_0}{v_2 \sin(\alpha)} \frac{1}{1 + k^2} = \frac{v_1 [v_1 - v_2 \cos(\alpha)]^2}{v_2 \sin(\alpha) [v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos(\alpha)]} L_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} L_0 \\ \bar{y} = \frac{v_1 L_0}{v_2 \sin(\alpha)} \frac{k}{1 + k^2} = \frac{v_1 [v_1 - v_2 \cos(\alpha)]}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos(\alpha)} L_0 = \frac{1}{2} L_0 \end{array} \right.$$

Значит, к окончанию погони Уоллес окажется от своей стартовой точки (начала координат) на расстоянии

$$r_W = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = L_0 = 100 \text{ м.}$$

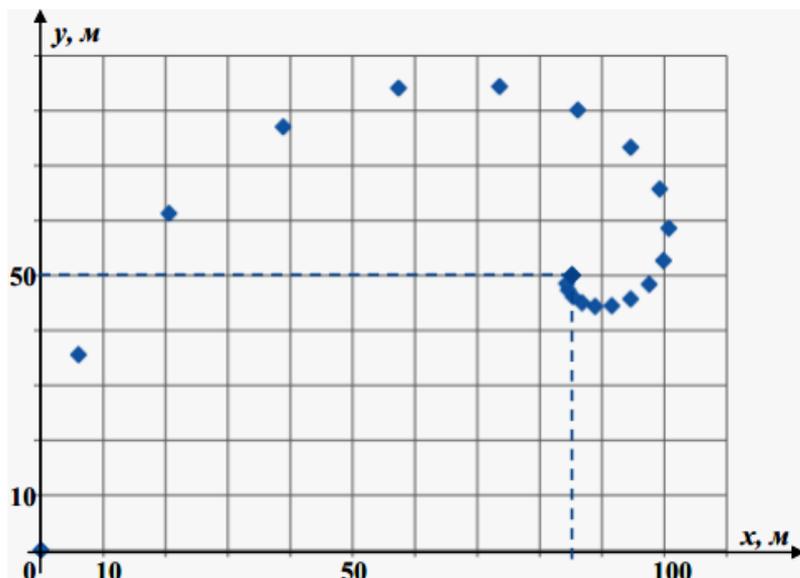
Стартовая точка Громита имеет координаты  $(0, L_0)$ , и модуль его перемещения в процессе погони точно такой же:

$$r_G = \sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y} - L_0)^2} = L_0 = 100 \text{ м.}$$

Чтобы изобразить картину, выложенную камешками Уоллеса, достаточно проанализировать ситуацию качественно. Поскольку модуль его скорости остается постоянным, а угловая скорость монотонно растет, то радиус кривизны его траектории  $R(t) = \frac{v}{\omega(t)}$  монотонно уменьшается. Поэтому ясно, что траектория имеет вид скручивающейся спирали, выходящей из начала координат вдоль оси  $y$ , и «наматывающейся» на конечную точку  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Можно выполнить построение и строго: выполнив интегрирование, можно найти уравнение траектории в *параметрическом виде* (в котором координаты Уоллеса записаны как функции угла поворота вектора его скорости)

$$\begin{cases} x(\varphi) = \frac{L_0}{2} \left\{ \sqrt{3} [1 - e^{-\varphi/\sqrt{3}} \cdot \cos(\varphi)] - e^{-\varphi/\sqrt{3}} \cdot \sin(\varphi) \right\} \\ y(\varphi) = \frac{L_0}{2} \left\{ 1 - e^{-\varphi/\sqrt{3}} \cdot \cos(\varphi) + \sqrt{3} \cdot e^{-\varphi/\sqrt{3}} \cdot \sin(\varphi) \right\} \end{cases}$$

Задав некий набор значений  $\varphi$ , вычисляем координаты нужного числа точек траектории. Полученная картина показана на рисунке. Заметим, что величина скорости Громита постоянна и такая же, как у Уоллеса, и зависимость угловой скорости от времени описывается точно такой же формулой. Значит, к каждому моменту времени Громит проходит точно такой же путь, вектор его скорости имеет тот же угол поворота, и радиус кривизны траектории точно такой же, как у Уоллеса. Так что его траектория имеет в точности такой же вид, только она выходит из другой стартовой точки в другом начальном направлении. Таким образом, если не решать задачу в общем виде, а сразу учесть равенство модулей скоростей участников погони и значение угла между скоростями, можно выстроить более простое решение для нахождения  $r_W$  и  $r_G$  (далее будем называть его «специальным») без использования «математической подсказки».



В этом решении после доказательства одинаковости траекторий приходим к выводу, что

$$r_W = r_G,$$

то есть обнаруживаем, что треугольник, образованный стартовыми точками участников и их общей конечной точкой, является равнобедренным. В процессе движения угол между парой одновременных бесконечно малых перемещений участников в любой момент времени равен  $\alpha$ . При одинаковых модулях скоростей получается, что каждое слагаемое в сумме бесконечно малых перемещений Громита может быть получено из соответствующего слагаемого в сумме бесконечно малых перемещений Уоллеса поворотом на один и тот же угол  $\alpha$ . Следовательно, в случае равных модулей скоростей угол между векторами перемещения Громита и Уоллеса (и между боковыми сторонами нашего равнобедренного треугольника) равен  $\alpha$ , то есть – по условию –  $60^\circ$ . Тогда этот треугольник – равносторонний, и поэтому  $r_W = r_G = L_0 = 100$  м.

Как видно, в специальном методе аккуратное доказательство ключевого утверждения (об угле между векторами перемещений) требует ссылки на равенство модулей скоростей, так как в противном случае оно неверно. В довольно большом количестве работ этот вывод формулировался без доказательства вообще или без упоминания в доказательстве необходимости равенства модулей скоростей. В этих случаях решение считалось неполным. Такой же подход использовался при оценке еще одного «специального» метода, также пригодного только для равных модулей скоростей и только для значения угла между скоростями, равного  $60^\circ$ . В этом методе мы мысленно добавляем у двум участниками погони еще четырех так, чтобы они находились в момент старта в вершинах правильного шестиугольника, и далее каждый двигался вдоль своей стороны шестиугольника с одной и той же величиной скорости. В таком движении положение конечной точки находится из соображений симметрии, которые существенно упрощают анализ движения.

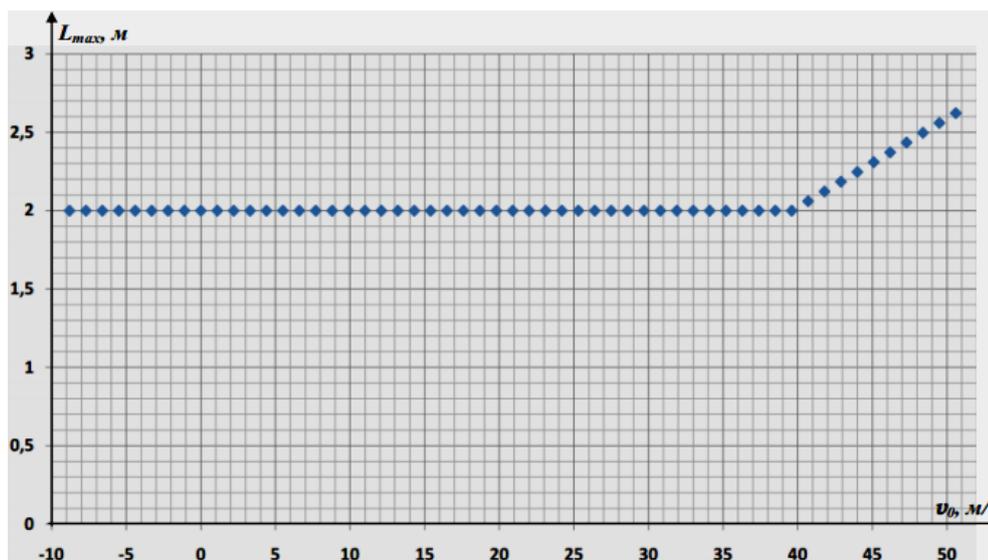
**Ответы:** время погони  $t = \frac{L_0}{[v_1 - v_2 \cos(\alpha)]} = 50$  с; закон изменения угловой скорости у обоих участников погони одинаков:  $\omega(t) = \frac{v_2 \cdot \sin(\alpha)}{L_0 - [v_1 - v_2 \cos(\alpha)]t}$ ; вектора их скоростей к заданному моменту времени повернутся на угол  $\varphi_4 = \sqrt{3} \cdot \ln(4)$  рад  $\approx 2,401$  рад  $\approx 137,6^\circ$ ; Уоллес и Громит завершат погоню на одинаковом расстоянии  $L_0 = 100$  м от своих стартовых точек; картина, выложенная камешками Уоллеса, схематично показана на рисунке.

**КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:**

№	действие	макс. балл
1	Правильно найдено время погони $t = \frac{L_0}{v[1 - \cos(\alpha)]} = 50$ с	2
	1.1 формула	1
	1.2 численное значение	1
2	Правильно найден закон изменения угловой скорости $\omega(t) = \frac{v \cdot \sin(\alpha)}{L_0 - [1 - \cos(\alpha)]v \cdot t}$	3
	2.1 указано, что он одинаков для Уоллеса и Громита	1
	2.2 формула	2
3	Правильно найден угол поворота векторов скоростей $\varphi_4 = \frac{\sin(\alpha)}{1 - \cos(\alpha)} \ln(4) =$ $= \sqrt{3} \cdot \ln(4)$ рад $\approx 2,401$ рад $\approx 137,6^\circ$	5
	3.1 указано, что он одинаков для Уоллеса и Громита	1
	3.2 записан закон изменения угла в зависимости от времени, пути или $L$ .	2
	3.3 формула для расчета $\varphi_4$	1
	3.4 численное значение	1
4	Правильно найдены расстояния от начальных до конечных положений Уоллеса и Громита $r_W = r_G = L_0 = 100$ м	5*
	4.1 определено положение конечной точки (указанием ее координат в любой СК или полным геометрическим описанием)	3
	4.2 численное значение $r_W$	1
	4.3 численное значение $r_G$	1
5	Приведен правильный схематический рисунок картины, выложенной камешками Уоллеса	5
	5.1 траектория начинается и заканчивается в правильных точках (положение может быть описано количественно либо качественно)	1+1=2
	5.2 радиус кривизны траектории монотонно убывает	1
	5.3 траектория имеет вид спирали (качественно правильный вид)	1
	5.4 указано в тексте или видно из рисунка, что траектория «навивается» на конечную точку	1
<b>ВСЕГО</b>		<b>20</b>

\*В этом пункте полный балл ставился либо при решении в общем виде, либо при решении специальным методом с явным указанием роли равенства модулей скоростей. При решении специальным методом без доказательства утверждения о величине угла между конечными перемещениями выполнение этого пункта считалось недостаточно обоснованным, и не засчитывалось. При наличии доказательства без явного указания роли равенства модулей скоростей выполнение п. 4.1 считалось недостаточно обоснованным, и не засчитывалось, а пп. 4.2 и 4.3 засчитывались полностью. На зачет остальных пунктов используемый метод не влиял.

2. («Эксперимент на неизвестной планете», 20 баллов) Однажды в ходе сканирования неба в поисках интересной информации Громит наткнулся на передачу, в которой было рассказано об эксперименте, поставленном неизвестными учеными. К счастью, все числовые данные в работе были выражены через известные константы (заряд и массу электрона, скорость света и постоянную Планка), поэтому Громиту удалось перевести их в «земные» единицы. Согласно полученной информации, эти ученые создали в вакуумной камере практически однородное магнитное поле, перпендикулярное полю тяжести, которое тоже можно считать однородным. В этой камере производились выстрелы сферическими наночастицами с удельным зарядом  $\frac{q}{m} \approx +157,08$  Кл/кг в направлении горизонтальной оси, перпендикулярном обоим полям. Величина проекции начальной скорости на эту ось изменялась, и для каждого ее значения высота начальной точки над горизонтальным «полом» камеры подбиралась так, чтобы частица (если это возможно) попадала на «пол», причем дальность ее полета оказывалась максимально возможной. По полученным данным Громит построил график зависимости максимально возможной дальности полета  $L_{\max}$  от величины  $v_0$  (см. рисунок). Он особо отметил, что точка излома на графике соответствовала  $v_0 \approx +39,64$  м/с. Познакомившись с графиком, Уоллес заметил, что интересно было бы узнать, каково на планете экспериментаторов ускорение свободного падения.



- Получите аналитическую формулу, описывающую график Громита с достаточной точностью.
- Найдите индукцию магнитного поля  $B$  и ускорение свободного падения  $g$  в камере.

**Возможное решение:** Сразу отметим, что характерные скорости частицы не превышают 50 м/с, так что решение задачи в рамках ньютоновской механики (без релятивистских поправок) явно обладает «достаточной точностью». Изучим движение заряженной частицы в поле тяжести при наличии горизонтального магнитного поля. Как известно, общее движение в «скрещенных» полях состоит из дрейфа и ларморовского вращения. Это можно использовать, выделяя «недрейфовое» движение путем перехода в систему отсчета, движущуюся со скоростью дрейфа  $\vec{v}_D$  (эта скорость перпендикулярна и  $\vec{g}$ , и  $\vec{B}$ , а ее модуль

$v_D = \frac{mg}{qB}$ ) – далее будем называть ее «дрейфующей», или ДСО. В самом деле, уравнение

движения частицы с массой  $m$  и зарядом  $q$  в однородном поле тяжести  $\vec{g}$  и в перпендикулярном ему магнитном поле  $\vec{B}$

$$m\vec{a} = q[\vec{v} \times \vec{B}] + m\vec{g}$$

после перехода в ДСО:  $\vec{a}' = \vec{a}$ ,  $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_D$  принимает вид

$$m\vec{a}' = q[\vec{v}' \times \vec{B}] + q[\vec{v}_D \times \vec{B}] + m\vec{g} = q[\vec{v}' \times \vec{B}],$$

то есть становится уравнением движения в одном только магнитном поле – поле тяжести «исчезает», поскольку скорость дрейфа подобрана именно так, чтобы  $q[\vec{v}_D \times \vec{B}] + m\vec{g} = 0!$  Как видно из описания эксперимента, начальная скорость частицы всегда была направлена параллельно горизонтальной оси (будем далее считать ее осью  $x$ ), идущей в направлении  $\vec{v}_D$ . Тут возможны два случая:

а)  $\vec{v}_0$  сонаправлена с  $\vec{v}_D$ . В этом случае при  $v_0 < v_D$  в ДСО частица стартует против оси  $x'$  со скоростью  $V = v_D - v_0$ . Направим ось  $y$  вертикально вверх. Ясно, что при движении со скоростью дрейфа сила Лоренца направлена вертикально вверх, и поэтому в данном случае она на начальном участке траектории (ларморовской окружности радиусом  $R = \frac{mV}{qB}$ )

направлена вниз. Таким образом, закон движения частицы в ДСО

$$\begin{cases} x'(t) = -R \cdot \sin(\omega t) \\ y'(t) = H - R + R \cdot \cos(\omega t) \end{cases}'$$

(где  $H$  – начальная высота, а ларморовская частота  $\omega = \frac{qB}{m}$ ), а в системе отсчета, связанной с планетой:

$$\begin{cases} x(t) = x'(t) + v_D t = R \left[ \frac{\omega t}{1-z} - \sin(\omega t) \right] \\ y(t) = y'(t) = H - R[1 - \cos(\omega t)] \end{cases}$$

Здесь введена безразмерная переменная  $z \equiv v_0/v_D$ . Отметим, что для анализа зависимости дальности полета от величины начальной скорости удобно записать ларморовский радиус через неизменные для данного опыта величины и эту безразмерную переменную

$$R = \frac{m^2 g}{q^2 B^2} - \frac{mv_0}{qB} = \frac{g}{\omega^2} \left( 1 - \frac{v_0}{v_D} \right) = \frac{g}{\omega^2} (1 - z).$$

Другая удобная безразмерная переменная – это  $h \equiv \frac{H}{R} = \frac{\omega^2 H}{g(1-z)}$ . Как видно, частица попадает на поверхность планеты только при  $h \leq 2$ , а момент падения соответствует

$$\cos(\omega t_f) \equiv \cos(\varphi) = 1 - h \Rightarrow \sin(\varphi) = \sqrt{h(2-h)},$$

а диапазон возможных значений  $0 < \varphi \leq \pi$ . Значит, координата точки падения

$$x(t_f) = \frac{g}{\omega^2} [\varphi - (1-z) \cdot \sin(\varphi)].$$

Эта функция монотонно растет при увеличении  $\varphi$ , и максимальная дальность полета достигается на краю интервала – при  $\varphi = \pi$ , то есть каждый раз нужно выбирать  $H = 2R$ . Итак, при  $0 \leq v_{0x} < v_D$

$$L_{max} = \pi \frac{g}{\omega^2}.$$

Если  $v_{0x} > v_D$ , то в ДСО сила Лоренца на начальном этапе движения направлена вверх, то есть частица в ходе ларморовского вращения заворачивает выше начального положения (при  $v_{0x} = v_D$  ларморовского вращения вообще нет – частица движется по прямой). Это означает, что при любом  $H > 0$  частица на «пол» не падает.

б)  $\vec{v}_0$  противоположна  $\vec{v}_D$ . В этом случае в ДСО частица стартует против оси  $x'$  со скоростью  $V = v_0 + v_D$ . Закон движения частицы и в ДСО, и в «неподвижной» СО остаются аналогичны предыдущему пункту. Теперь

$$\begin{cases} x(t) = x'(t) + v_D t = R \left[ \frac{\omega t}{1+z} - \sin(\omega t) \right], \\ y(t) = y'(t) = H - R[1 - \cos(\omega t)] \end{cases}$$

и

$$R = \frac{mv_0}{qB} + \frac{m^2 g}{q^2 B^2} = \frac{g}{\omega^2} \left( 1 + \frac{v_0}{v_D} \right) = \frac{g}{\omega^2} (1+z).$$

Как и в случае а).

$$\cos(\omega t_f) \equiv \cos(\varphi) = 1 - h \Rightarrow \sin(\varphi) = \sqrt{h(2-h)}, 0 < \varphi \leq \pi.$$

Однако в этом случае

$$x(t_f) = \frac{g}{\omega^2} [\varphi - (1+z) \cdot \sin(\varphi)],$$

И мы обнаруживаем, что сначала удаление частицы по оси  $x$  от точки запуска растет в область отрицательных  $x$ , достигает максимума при  $\cos(\varphi) = (1+z)^{-1}$ , а затем уменьшается до нуля и снова растет – уже в область положительных  $x$ . Максимальное отклонение частицы в область отрицательных  $x$

$$(-x)_{max} = \frac{g}{\omega^2} \left[ \sqrt{z(2+z)} - \arccos\left(\frac{1}{1+z}\right) \right]$$

Максимальное отклонение в область положительных  $x$  отвечает  $\varphi = \pi$  и равно

$$x_{max} = \pi \frac{g}{\omega^2}.$$

Для обеспечения максимальной дальности полета нужно выбрать  $H$ , отвечающее большему из этих значений. Анализируя поведение функции в выражении для  $(-x)_{max}$ , устанавливаем, что при небольших  $z$  выгоднее выбирать  $H = 2R$ , а при  $z > z_c$  выгодно запустить частицу с высоты  $H = \frac{g}{\omega^2} z$ . «Критическое» значение скорости отвечает  $z_c$ , являющемуся корнем уравнения

$$\sqrt{z(2+z)} - \arccos\left(\frac{1}{1+z}\right) = \pi.$$

Численное решение (например, с помощью таблицы Excel или пакета математических расчетов) дает  $z_c \approx 3,603339$  (для зачета результата достаточно найти этот параметр с точностью до третьей значащей цифры). Итак: аналитическая формула для графика Громита имеет вид:

$$L_{max}(v_{0x}) = \begin{cases} \frac{g}{\omega^2} \left[ \sqrt{z(2+z)} - \arccos\left(\frac{1}{1+z}\right) \right], & v_{0x} < -z_c \cdot v_D \\ \pi \frac{g}{\omega^2}, & -z_c \cdot v_D \leq v_{0x} < +v_D \end{cases}.$$

$z \equiv |v_{0x}|/v_D$ ). При  $v_{0x} \geq +v_D$  частица не падает на «пол» камеры.

Из сопоставления формулы с графиком обнаруживаем, что положительные значения  $v_0$  на графике отвечают отрицательным значениям  $v_{0x}$  в аналитической форме (именно в области  $v_{0x} < 0$  на графике появляется точка излома).

Кроме того, такое сопоставление позволяет найти, что

$$\left\{ \begin{array}{l} v_D = \frac{g}{\omega} = \frac{39,64 \text{ м/с}}{z_c} \approx 11,00 \text{ м/с} \\ L \equiv \pi \frac{g}{\omega^2} \approx 2,00 \text{ м} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega = \frac{qB}{m} \approx \frac{11\pi}{2} \text{ с}^{-1} \Rightarrow B \approx 0,1100 \text{ Тл} \\ g \approx 190,1 \text{ м/с}^2 \end{array} \right.$$

Это явно не Земля. В нашем распоряжении есть лишь небольшой участок графика, отвечающий изменению  $L_{max}$ , но все равно можно проверить соответствие этого участка построенной теории. Тогда мы обнаружим, что точность описания достаточно высокая.

**Ответы:** формула, описывающая график в допустимой области значений  $v_0$ :

$$L_{max}(v_0) = \begin{cases} \frac{L}{\pi} \left[ \sqrt{z(2+z)} - \arccos\left(\frac{1}{1+z}\right) \right], & v_0 > z_c \cdot v_D, \\ L, & -v_D < v_0 \leq z_c \cdot v_D \end{cases}$$

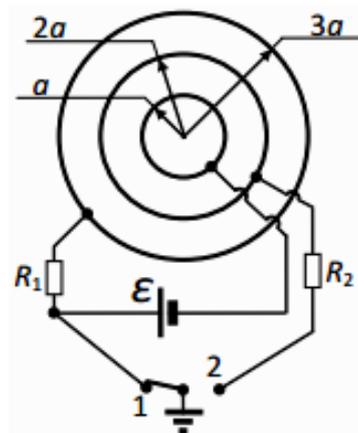
где  $z \equiv v_0/v_D$ ,  $L \approx 2,00$  м,  $v_D \approx 11,00$  м/с и  $z_c \approx 3,60334$ . Индукция магнитного поля в камере  $B \approx 0,110$  Тл, ускорение свободного падения  $g \approx 190$  м/с<sup>2</sup>.

**КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:**

№	действие	макс. балл
<b>1</b>	Правильно построена физическая модель явления и получена аналитическая формула для описания графика*	<b>14</b>
	1.1 записана полная система уравнений движения частицы в инерциальной СО	1
	1.2 определен закон движения частицы в СО, связанной с планетой	3
	1.3 показано, что при запуске частицы в направлении скорости дрейфа $L_{max} = \pi g/\omega^2$	2
	1.4 показано, что при запуске частицы против скорости дрейфа ее максимальное удаление по оси $x$ равно $x_{max} = \pi g/\omega^2$	1
	1.5 для запуске частицы против скорости дрейфа найдено ее максимальное удаление против оси $x$	2
	1.6 найдена явная связь величины скорости, отвечающей точке излома графика, с величиной индукции и ускорением свободного падения ( $g/\omega = 39,64 \frac{M}{c}/z_c$ с известным $z_c$ или эквивалентная)	2
	1.7 получена общая формула для $L_{max}$ , эквивалентная авторской	3
<b>2</b>	Правильно определена величина магнитной индукции	<b>3</b>
	2.1 из графика определены все величины, необходимые для нахождения ларморовской частоты	1
	2.2 для нахождения $B$ используется правильное выражение через величины, определяемые из графика	1
	2.3 численное значение	1
<b>3</b>	Правильно определена величина ускорения свободного падения.	<b>3</b>
	3.1 из графика определены все величины, необходимые для нахождения ускорения свободного падения	1
	3.2 для нахождения $g$ используется правильное выражение через величины, определяемые из графика	1
	3.3 численное значение	1
	<b>ВСЕГО</b>	<b>20</b>

\*Если в работе нет физической модели, но построена интерполяционная формула для описания графика, то максимальная оценка за этот пункт равна **4 баллам**.

3. («Такие разные заземления», 17 баллов) В одном из устройств Уоллеса использовался воздушный конденсатор из трех concentric проводящих сфер с радиусами  $a$ ,  $2a$  и  $3a$ . Внешняя и внутренняя (с помощью тонкого изолированного провода, продетого через маленькие отверстия во внешней и средней сферах) сферы подключались к источнику с ЭДС  $\mathcal{E}$ , и внешнюю сферу можно было заземлять с помощью переключателя, который для этого нужно было перевести в положение 1 (см. рисунок). «А если создать возможность заземления и средней сферы?» - спросил Громит. Подумав, Уоллес добавил переключателю контакт 2, соединенный со средней сферой тонким изолированным проводом без контакта с внешней. В одном из опытов переключатель долго находился в положении 1 при незаряженной средней сфере, а затем Уоллес перевел его в положение 2.



- Какой заряд был у внешней сферы до переключения?
- Какими стали заряды всех трех сфер после переключения?
- Какое количество теплоты выделилось в схеме после переключения?

Величина  $a = 11$  см,  $\mathcal{E} = 20$  В, электрическая постоянная равна  $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

**Возможное решение:** Рассмотрим сначала состояние схемы при нахождении переключателя в положении 1. Ясно, что при этом потенциал внешней сферы  $\varphi_3 = 0$ , и потенциал внутренней  $\varphi_1 = -\mathcal{E}$ . Следовательно, заряды этих сфер удовлетворяли уравнениям

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 + q_3 = 0 \\ \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_3}{12\pi\epsilon_0 a} = -\mathcal{E} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = -6\pi\epsilon_0 a\mathcal{E} \\ q_3 = +6\pi\epsilon_0 a\mathcal{E} \end{cases}$$

Ясно, что в этом состоянии потенциал средней сферы относительно бесконечности отрицателен, так что после переключения на нее с «земли» натекает заряд  $q'_2$ . Сумма зарядов внутренней и внешней сфер остается равной нулю, но для поддержания разности потенциалов источник перемещает между ними заряд  $\Delta q$ . Таким образом, новые заряды сфер определяются уравнениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} q'_1 + q'_3 = 0 \\ \frac{q'_1}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{q'_2}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{q'_3}{12\pi\epsilon_0 a} = 0 \\ \frac{q'_1 + q'_2 + q'_3}{12\pi\epsilon_0 a} - \left( \frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q'_2}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{q'_3}{12\pi\epsilon_0 a} \right) = \mathcal{E} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} q'_1 = -\frac{72}{11}\pi\epsilon_0 a\mathcal{E} \\ q'_2 = +\frac{24}{11}\pi\epsilon_0 a\mathcal{E} \\ q'_3 = +\frac{72}{11}\pi\epsilon_0 a\mathcal{E} \end{cases}$$

Отметим, что  $\Delta q = q'_3 - q_3 = \frac{6}{11}\pi\epsilon_0 a\mathcal{E}$ , то есть источник после переключения совершает работу  $A = \mathcal{E} \cdot \Delta q = \frac{6}{11}\pi\epsilon_0 a\mathcal{E}^2$ .

Для анализа изменения энергии конденсаторов проще представим систему нашу проводящих тел, состоящую из трех сфер и «земли» (которую мы тоже можем считать сферой, но бесконечного радиуса), как соединение трех сферических конденсаторов: образованный внутренней и средней сферами, образованный средней и внешней сферами и образованный внешней сферой и «землей». Используя формулу емкости сферического конденсатора с радиусами обкладок  $r_1$  и  $r_2$ ,  $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$ , определяем емкости конденсаторов:

$$C_{12} = 8\pi\epsilon_0 a, C_{23} = 24\pi\epsilon_0 a, C_{34} = 12\pi\epsilon_0 a.$$

Приведем эффективные схемы соединения конденсаторов (см. рисунки).



До переключения  $q_{12} = q_{23} = 6\pi\epsilon_0 a\mathcal{E}$ ,  $q_{34} = 0$ , и энергия этой системы конденсаторов равнялась

$$E_c = \frac{q_{12}^2}{2C_{12}} + \frac{q_{23}^2}{2C_{23}} = 3\pi\epsilon_0 a\mathcal{E}^2.$$

После  $q'_{12} = \frac{72}{11}\pi\epsilon_0 a\mathcal{E}$ ,  $q'_{23} = \frac{48}{11}\pi\epsilon_0 a\mathcal{E}$  и  $q'_{34} = \frac{24}{11}\pi\epsilon_0 a\mathcal{E}$ . Теперь энергия системы конденсаторов стала равна

$$E'_c = \frac{q'^2_{12}}{2C_{12}} + \frac{q'^2_{23}}{2C_{23}} + \frac{q'^2_{34}}{2C_{23}} = \frac{36}{11}\pi\epsilon_0 a\mathcal{E}^2.$$

Из уравнения энергетического баланса находим количество теплоты, выделившееся в схеме после переключения

$$Q = A - \Delta E_c = \frac{3}{11}\pi\epsilon_0 a\mathcal{E}^2.$$

Конечно, заряды сфер до и после переключения тоже можно было найти по эквивалентным схемам, но прямое вычисление для системы заряженных тел несложное и более «физично» (расчет по эквивалентным схемам удобно использовать для проверки результата). Изменение энергии этой системы тел можно считать и напрямую, без использования эквивалентных схем, но в этом случае после переключения пришлось бы считать ее как сумму энергий попарных взаимодействий для 4 сфер, и расчет становится более громоздким. В любом случае результаты, естественно, не зависят от способа вычисления.

**Ответы:** начальный заряд внешней сферы  $q_3 = +6\pi\epsilon_0 a\mathcal{E} \approx 0,367$  нКл; заряды сфер после переключения равны  $q'_1 = -\frac{72}{11}\pi\epsilon_0 a\mathcal{E} \approx -0,400$  нКл,  $q'_2 = +\frac{24}{11}\pi\epsilon_0 a\mathcal{E} \approx +0,133$  нКл и  $q'_3 = +\frac{72}{11}\pi\epsilon_0 a\mathcal{E} \approx +0,400$  нКл; количество теплоты, выделившееся в схеме после переключения  $Q = \frac{3}{11}\pi\epsilon_0 a\mathcal{E}^2 \approx 0,334$  нДж.

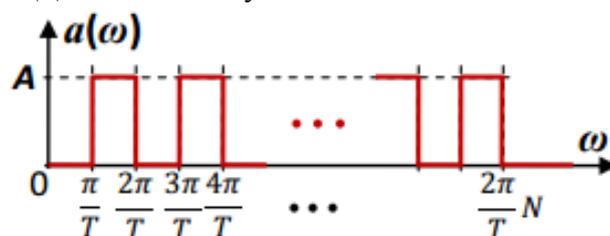
**КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:**

№	действие	макс. балл
1	Правильно найден начальный заряд внешней сферы $q_3 = +6\pi\epsilon_0 a\mathcal{E} \approx 0,367$ нКл	4
	1.1 Указаны правильные начальные потенциалы внешней и внутренней сфер	1+1=2
	1.2 Правильно найден заряд внешней сферы.	2
2	Правильно найдены заряды сфер после переключения	6
	2.1 Указано (используется в решении), что сумма зарядов внутренней и внешней сфер остается равной нулю.	1
	2.2 Записана правильная система уравнений из трех уравнений для зарядов сфер после переключения.	3×1=3

	2.3	Правильно найдены заряды внутренней и внешней сфер после переключения	1
	2.4	Правильно найден заряд средней сферы после переключения	1
<b>3</b>		Правильно определено количество теплоты, выделившееся в схеме после переключения	<b>7</b>
	3.1	Предложены правильные эффективные схемы соединения конденсаторов для системы сфер ИЛИ Записаны уравнения энергетического баланса для системы взаимодействующих сил	3
	3.2	Вычислены работа источников и изменение энергии конденсаторов.	1+1=2
	3.3	Правильно найдены формула и численное значение	1+1=2
	<b>ВСЕГО</b>		<b>17</b>

4. («Ультракороткий импульс», 18 баллов) Для изучения динамики электронных состояний в сложных молекулах «биомаркеров» Уоллесу нужно было фиксировать длительность процессов в диапазоне сотен *аттосекунд*. «Для этого необходимо научиться генерировать электромагнитные импульсы еще меньшей длительности», – рассуждал он в присутствии Громита. Подумав, он продолжил: «Любой импульс, в котором зависимость изменяющейся величины от времени описывается функцией  $f(t)$ , можно представить как сумму гармонических колебаний с разными частотами (*гармоник*). Но в этой сумме нужно учитывать не только амплитуды гармоник, а еще и их фазовые сдвиги, и это удобнее делать с помощью *метода комплексных амплитуд*, в рамках которого разложение сигнала на гармоники записывается в виде интеграла  $f(t) = \int a(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega$ , где интегрирование проводится по всем значениям частот в *спектре* сигнала». «Получается, что для создания коротких импульсов нужен набор гармоник со спектром в виде широкой почти равномерной *гребенки*», - подсказал Громит. Отметим, что из-за строения голосовых связок Громит не мог говорить по-человечески, но он в совершенстве владел телепатией.

- Проверьте правильность подсказки Громита. Для этого изучите сигнал с таким «гребенчатым» спектром, состоящим из  $N$  одинаковых «зубцов». В первом «зубце» амплитуда гармоник  $a(\omega) \equiv A$  в интервале частот от  $\frac{\pi}{T}$  до  $\frac{2\pi}{T}$ , во втором – от  $\frac{3\pi}{T}$  до  $\frac{4\pi}{T}$  и так далее (см. рисунок). Оцените длительность импульсов в этом сигнале, если время  $T = 10^{-14}$  с, а  $N = 2000$ .



Но как создать такой спектр? При таких масштабах времен излучение будет обладать *квантовыми свойствами*. Получается, нужно много *фотонов* с разными энергиями, и при этом они должны быть тщательно *синхронизированы* друг с другом по фазе своих *волн вероятности*. «Но фотону не обязательно находиться в состоянии с одной определенной энергией», - вновь вступил в «разговор» Громит. «Он может находиться в состоянии *квантовой суперпозиции*, при которой фотон одновременно находится в состояниях с разными энергиями (а, значит, и с разными частотами), которые «автоматически» синхронизированы друг с другом. Для такого состояния измерение энергии фотона выдавало бы разные значения с разными вероятностями. А частотный спектр такого фотона в точности соответствовал бы нужной нам гребенке», – подытожил он. Уоллес был очень взволнован: «Как можно такое сделать?» Громит задумался: «Очень тяжело, но можно

попробовать. Согласно квантовой теории, фотоны рождаются при переходе атомных электронов из возбужденного состояния (с избыточной энергией) в основное (с минимальной энергией), и при этом получается фотон с почти точно определенной энергией. Сами электроны связаны в атоме и для их отрыва от атома нужна довольно большая энергия. К счастью для нас, электроны – тоже квантовые частицы, и они могут совершать *туннельные переходы*, то есть преодолевать «слишком высокие» энергетические барьеры. Получается так: если поместить атом в поле волны мощного инфракрасного лазера, то длина волны излучения будет намного больше размеров атома, и можно считать, что атомный электрон, попавший в возбужденное состояние, будет находиться в гармоническом электрическом поле  $\vec{E}(t) = \vec{E}_m \cdot \sin(\Omega t)$ . С точки зрения электрона это поле изменяется очень медленно, и в некоторой части периода оно «вытаскивает» электрон из атома и может заставить его туннелировать наружу – так, что он окажется «снаружи» атома. Сначала поле будет разгонять электрон, заставляя его удаляться от атома, но затем оно поменяет знак, остановит электрон и направит его обратно к атому. При удачном стечении обстоятельств (а атомов в волну попадает много, и для некоторых из них обстоятельства могут сложиться «удачно») он наберет энергию, «ударит» по атому, снова попадет в него, и после этого совершит переход в основное состояние. Теперь он должен истратить набранную за время пребывания за пределами атома энергию на излучение фотонов. И тут возникает вероятность, что «высветится» он не многими фотонами, а одним фотоном в нужном нам состоянии квантовой суперпозиции. И это может происходить на каждом периоде инфракрасного излучения, так что мы получим последовательность ультракоротких импульсов излучения!».

- Проверьте одно из утверждений Громита. Для этого изучите движение электрона с зарядом  $-e$  и массой  $m$  в электрическом поле волны. Считайте, что после туннелирования он оказался с почти нулевой скоростью в некоторой точке за пределами атома, где на него действует только поле волны. Пользуясь законами ньютоновской механики, оцените, с какой максимальной энергией электрон может вернуться в эту точку, двигаясь к атому (движение считайте одномерным).

**Указание:** Перед решением задачи разберите (или вспомните), как работает *метод комплексных амплитуд* и что такое «квантовые свойства» фотонов.

Вы можете использовать материалы открытого курса физического факультета МГУ:

<https://teach-in.ru/lecture/2023-06-16--Parfenov-1>

<https://teach-in.ru/lecture/2023-06-30--Parfenov-1>

(и другие лекции этого курса), а также справочные материалы к задаче отборочного этапа олимпиады школьников «ПВГ!» 2022/23 года «Квантовая криптография»:

<https://pvg.mk.ru/media/stage1/keys/phys11stage1keys.pdf>

**Возможное решение:** Вопрос 1: в соответствии с информацией из условия, для анализа временной зависимости сигнала, спектр которого соответствует равномерной гребенке, нужно вычислить *интеграл Фурье*

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int a(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega = A \cdot \sum_{k=1}^N \int_{\pi(2k-1)/T}^{2\pi k/T} e^{-i\omega t} d\omega = \\
 &= A \cdot \int_{\pi/T}^{2\pi/T} e^{-i\omega t} d\omega \cdot \sum_{k=1}^N e^{-i \cdot 2\pi(k-1)t/T} = \frac{iA}{t} (1 - e^{i\pi/T}) \frac{1 - e^{-i2\pi(N+1)/T}}{1 - e^{-i2\pi/T}}.
 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой частичной суммы геометрической прогрессии и вычислили интеграл от экспоненты. Далее, воспользовавшись *формулой Эйлера*, находим:

$$f(t) = \frac{\pi(N+1)A}{T} \cdot \frac{\text{sinc}[\pi(N+1)t/T]}{\cos[\pi t/2T]} e^{-i\pi Nt/T}.$$

В этом выражении использована функция  $\text{sinc}(z) \equiv \frac{\sin(\pi z)}{z}$ . Как видно, сигнал состоит из серии импульсов («выбросов») с плавно убывающей амплитудой. Центры импульсов определяются обращением в ноль знаменателя:

$$\cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right) = 0 \Rightarrow t_n = T + n \cdot 2T,$$

где  $n$  – целое число. Значит, импульсы следуют с интервалом  $2T$ . Длительность импульса определяется интервалом времени между обращениями в ноль числителя при ненулевом знаменателе, и поэтому

$$\sin\left(\frac{\pi(N+1)t}{T}\right) = 0 \Rightarrow t_k = \frac{T}{N+1} \cdot k \neq (2n+1)T \Rightarrow \tau = \frac{2T}{N+1} = \frac{2}{2001}T \approx 10^{-17} \text{ с},$$

то есть около 10 аттосекунд!

Вопрос 2: Пусть  $\Omega$  – циклическая частота возбуждающей волны, а  $E_m$  – амплитуда колебаний напряженности электрического поля в этой волне. Будем считать, что после тунеллирования за пределы атома электрон оказался в точке с координатой  $x_0$ . Уравнение одномерного движения электрона в электрическом поле волны

$$m \cdot a_x = eE_m \cdot \sin[\Omega(t + t_0)].$$

Величина  $t_0$  определяет состояние поля волны в момент тунеллирования. Тогда скорость электрона к моменту времени  $t$

$$v(t) = \frac{e}{m} E_m \int_0^t \sin[\Omega(t' + t_0)] dt' = \frac{eE_m}{m\Omega} \{\cos(\Omega t_0) - \cos[\Omega(t + t_0)]\}.$$

Будем считать, в соответствии с условием, что «прогулка» электрона за пределами атома завершится в момент возвращения в исходную точку, то есть что  $t$  определяется из уравнения

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t') dt' = x_0 + \frac{eE_m}{m\Omega} \left\{ t \cdot \cos(\Omega t_0) - \frac{\sin[\Omega(t + t_0)] - \sin[\Omega t_0]}{\Omega} \right\} = x_0,$$

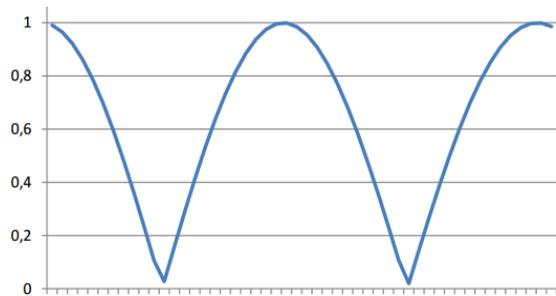
или, при переходе к переменной  $z \equiv \Omega t$ :

$$z = \sin(z) - tg(\Omega t_0) \cdot [1 - \cos(z)] \equiv \sin(z) - \delta \cdot [1 - \cos(z)].$$

Обозначим первый положительный корень этого уравнения (для тех значений параметра  $\delta$ , для которых он существует)  $\bar{z} = \bar{z}(\delta)$ . Отметим для себя, что логично выбрать  $t_0$  так, чтобы при  $t=0$  поле было направлено так, чтобы «уводить» электрон от атома и было близко к максимуму. Тогда  $\Omega t_0 \in (0, \pi)$ , и поэтому параметр  $\delta$  может иметь практически любое значение (в том числе и отрицательные значения). Итак, время «прогулки»  $t = \frac{z(\delta)}{\Omega}$ , а конечная скорость электрона

$$v_f = \frac{eE_m}{m\Omega} \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} [\delta \cdot \sin(\bar{z}) + 1 - \cos(\bar{z})].$$

Конечно, безразмерный коэффициент в этой формуле может варьироваться в достаточно широких пределах. Но в целом для многих возможных значений он имеет величину, близкую по порядку к 1. К аналогичному выводу приводит и численный анализ (на рисунке показан график изменения модуля коэффициента в диапазоне значений  $-\delta$  от 0,1 до 8,3). В



рамках оценки по порядку величины можно заключить, что  $v_f \approx \frac{eE_m}{m\Omega}$ . Поэтому ясно, что энергия электронов к моменту окончания «прогулки» может достигать значений порядка

$$E_f = \frac{mv_f^2}{2} \approx \frac{e^2 E_m^2}{2m\Omega^2},$$

то есть растет пропорционально квадрату амплитуды поля в волне и действительно для интенсивных волн может оказаться существенно больше энергии возбуждения электрона в начальном состоянии!

**Ответы:** длительность импульсов в таком сигнале  $\tau = \frac{2T}{N+1} = \frac{2}{2001}T \approx 10^{-17}$  с, максимальная энергия электрона к моменту возвращения к атому определяется амплитудой изменения напряженности электрического поля волны:  $E_f \approx \frac{e^2 E_m^2}{2m\Omega^2}$ .

**КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:**

№	действие	макс. балл
<b>1</b>	Правильный анализ временной зависимости сигнала с частотным спектром в виде «гребенки»	<b>9</b>
	1.1 Получено любое правильное выражение для $f(t)$	3
	1.2 Правильно описан вид сигнала как последовательности коротких импульсов с плавно изменяющейся амплитудой	3
	1.3 Правильно оценена длительность импульса	3
<b>2</b>	Получена правильная оценка максимальной энергии электрона после возвращения к атому	<b>9</b>
	2.1 Получен закон изменения $v(t)$ с учетом поля волны	2
	2.2 Получено уравнение, позволяющее оценить время «прогулки» электрона	3
	2.3 Оценена максимальная энергия электрона к моменту возвращения к атому	4
<b>ВСЕГО</b>		<b>18</b>