Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заочного этапа 2025/2026 учебного года для 10 класса

1. Про 2026-значное число известно, что оно кратно 9, а также, что любые 4 подряд идущие цифры этого числа образуют 4-значное число, которое тоже кратно 9. Нулей в записи числа нет. Найдите последнюю цифру числа (справа), если известно, что первая (слева) цифра этого числа – 3.

Ответ: 6.

Решение. Разобьем число на 506 четверок цифр и еще две цифры.
Сумма цифр числа кратна 9, сумма цифр в любой четверке кратна 9, значит сумма последних двух цифр тоже кратна 9 (то есть равна 9 или 18).
Далее, так как $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} \vdots 9$ и $a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + a_{i+4} \vdots 9$, то $a_i - a_{i+4} \vdots 9 \Rightarrow a_i = a_{i+4}$ (так как нулей в этом числе нет), то есть цифры числа повторяются с периодом 4.
Следовательно, 2025-я цифра числа совпадает с 1-й (так как 2025 – 1 кратно 4), то есть равна 3. Поэтому последняя цифра равна 6.

2. Есть 7 одинаковых чашек, 8 одинаковых кружек и 3 одинаковых стакана. Надо расставить их в ряд, при условии, что два стакана не могут стоять рядом. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 3 603 600.

Решение. Сначала расставим чашки и кружки, это можно сделать $C_{15}^{7} = 6435$ способами.
Между 15 чашками + кружками есть 16 промежутков (14 между ними и по одному справа и слева). В любой из этих промежутков можно поставить один из трех стаканов, получаем $C_{16}^{3} = 560$. Перемножая, получим $6435 \times 560 = 3603600$.

3. Участники шахматного кружка сыграли в один круг, т.е. каждый сыграл один раз с каждым. Чемпион Коля набрал больше очков, чем каждый из остальных участников, но меньше, чем 55% от максимально возможного количества очков, которое мог набрать участник турнира. Какое наименьшее число участников могло быть в кружке?
Напомним, что в шахматах победитель получает одно очко, проигравший не получает ничего, а в случае ничьи оба игрока получают по ½ очка.

Ответ: 12.

Решение. Если есть *n* участников, то будет сыграно $\frac{n(n-1)}{2}$ партий, и таким же будет суммарное количество набранных всеми участниками очков.

Чемпион должен набрать как минимум $\frac{n}{2}$ очков. Действительно, если он набрал $\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$, а остальные еще меньше, то в сумме получается меньше $\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot n=\frac{n(n-1)}{2}$, что невозможно.
Решив неравенство $\frac{n}{2}<0.55(n-1)$, получим $n>11$.
Покажем, что для 12 участников такая ситуация возможна. Пусть Коля выиграл у Пети, а с остальными сыграл вничью. Тогда он получит $1+10\cdot 0{,}5=6$ очков, что составляет 54.55% от 11. Если остальные участники сыграют друг с другом вничью, то они получат по 5,5 очков (кроме Пети, получившего 5 очков). Таким образом, Коля, действительно, набрал больше всех.

4. Вариант 1.

В трапеции *ABCD* известны основания *AD* = 10, $BC=7-\sqrt{33}$ и боковые стороны *AB* = 5, *CD* = 7. Точка *E* расположена на основании *BC*. Найдите наименьший возможный периметр треугольника *AED*. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой.

Ответ: 22,84.

Решение. Для расчета нам понадобится высота трапеции. Ее можно искать по-разному. Например, проведем через вершину *B* прямую *BF* параллельно *CD* (см. рис. 1), в получившемся ΔABF известны три стороны.

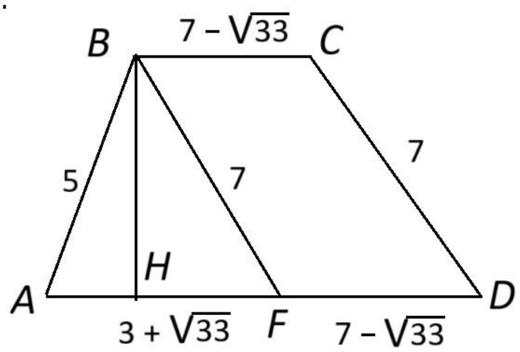

Рис. 1

Теперь можно найти площадь по формуле Герона, а затем высоту *BH*. Или же обозначить *AH* = *x* и записать квадрат высоты двумя способами:

$$5^2-x^2=7^2-\left(3+\sqrt{33}-x\right)^2.$$

Отсюда получаем

$$25-x^2=49-\left(3+\sqrt{33}\right)^2+2x\left(3+\sqrt{33}\right)-x^2 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad 2x\left(3+\sqrt{33}\right)=25-49+9+33+6\sqrt{33}\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad x\left(3+\sqrt{33}\right)=9+3\sqrt{33}\quad\Leftrightarrow\quad x=3.$$

Значит, *AH* = 3, *BH* = 4. Отметим также, что тогда *HD* = 7 (это нам понадобится в дальнейшем).

Далее нам нужно найти минимальное значение суммы длин отрезков *AE* и *ED* (третья сторона треугольника *AD* = 10 не изменяется при изменении положения точки *E*). Применим стандартный для такой ситуации ход: построим точку *P* симметрично точке *D* относительно прямой *BQ*., на которой находится верхнее основание трапеции (см. рис. 2, на котором точку *C* умышленно убрали). После этого будем искать минимум суммы длин *AE* и *EP* (очевидно, что *EP* = *ED*).

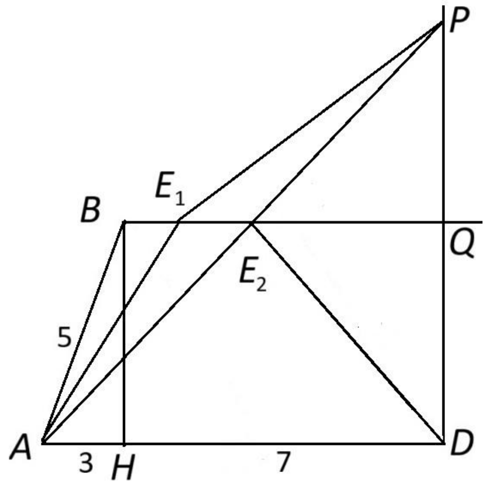

Рис. 2

Минимум суммы достигается тогда, когда ломаная *AEP* превращается в прямую линию. На рис. 2 это положение соответствует точке E_2. И если взять любую другую точку, например, точку E_1, то $AE_1 + E_1P > AE_2 + E_2P = AP$. При этом, чем левее точка *E*, тем сумма *AE* + *EP* больше.

Однако есть еще один аспект, на который нужно обратить внимание. По условию, точка *E* расположена не на прямой *BC*, а на основании трапеции *BC*. Проверим, выполнено ли это условие для точки E_2. (Заметим, что именно из-за этого мы убрали точку *C* из предыдущего рисунка.)

Очевидно, что $E_2Q = 5$, как средняя линия треугольника *APD*. Значит, $BE_2 = 7 - 5 = 2$. И так как $BC = 7 - \sqrt{33} < 2$, то точка E_2 лежит не на основании трапеции *BC*, а на его продолжении!

Значит, искомая точка – это не точка E_2, а крайняя правая точка основания *BC*, то есть точка *C*. Периметр ΔACD равен *AC* + 10 + 7.

Пусть проекция точки *C* на основание *AD* есть точка *G*. Тогда *CG* = 4, $AG = 3 + 7 - \sqrt{33} = 10 - \sqrt{33}$. И по теореме Пифагора

$$AC^2 = \left(10 - \sqrt{33}\right)^2 + 4^2 = 149 - 20\sqrt{33}.$$

Периметр треугольника *ACD* равен $17 + \sqrt{149 - 20\sqrt{33}} \approx 22{,}84$.

4. Вариант 2.

В трапеции *ABCD* известны основания *AD* = 13, $BC = 11 - 4\sqrt{7}$ и боковые стороны *AB* = 13, *CD* = 16. Точка *E* расположена на основании *BC*. Найдите наименьший возможный периметр треугольника *AED*. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой.

Ответ: 42,10.

4. Вариант 3.

В трапеции *ABCD* известны основания *AD* = 16, $BC = 11 - 4\sqrt{7}$ и боковые стороны *AB* = 13, *CD* = 16. Точка *E* расположена на основании *BC*. Найдите наименьший возможный периметр треугольника *AED*. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой.

Ответ: 45,17.

5. Функция $f(n)$ определена для всех натуральных n, принимает натуральные значения и является монотонно возрастающей, т.е. если $n > m$, то $f(n) > f(m)$. Также известно, что $f(f(n)) = 3n$ при любом натуральном n.
Найдите $f(182853)$.

Ответ: 360 000.

Решение. Заметим, что из монотонности вытекает $f(n) \geq f(n-1) + 1 \geq f(n-2) + 2 \geq \dots \geq f(1) + n - 1 \geq n$. Рассмотрим $f\big(f(1)\big) = 3$, тогда $f(1) \leq 3$.
Рассмотрим возможные варианты:

1) f(1) = 1 – не может быть, т.к. тогда $f\big(f(1)\big) = 1$.
2) $f(1) = 3$. Тогда $f(3) = f\big(f(1)\big) = 3 = f(1)$, что противоречит монотонности.
3) $f(1) = 2, f(2) = 3$. Тогда $f(3) = f\big(f(2)\big) = 6, f(6) = f\big(f(3)\big) = 9$.

Значения в точках 4 и 5 можно найти из монотонности

$$6 = f(3) < f(4) < f(5) < f(6) = 9 \Rightarrow f(4) = 7; f(5) = 8.$$

Введем обозначение $f_{[n]}(x) = \underbrace{f(f(\dots f\ \ (x)\dots))}_{n\ \text{раз}}$.

Заметим закономерность $f_{[2n]}(3) = 3^{n+1}, f_{[2n+1]}(3) = 2 \cdot f_{[2n]}(3)$.
Таким образом, $f(3^{n+1}) = f_{[2n+1]}(3) = 2 \cdot f_{[2n]}(3) = 2 \cdot 3^{n+1}$, а $f(2 \cdot 3^{n+1}) = f_{[2n+2]}(3) = 3^{n+2}$.
Значит, функция f переводит отрезок $[3^{n+1}; 2 \cdot 3^{n+1}]$ в отрезок $[2 \cdot 3^{n+1}; 3 \cdot 3^{n+1}]$.
Заметим, что на этих отрезках одинаковое количество точек, значит

$$f(3^{n+1} + x\ ) = 2 \cdot 3^{n+1} + x$$

при всех $x = 0, 1, 2, \dots, 3^{n+1}$.
Так как $182853 = 3^{11} + 5706$, то в нашем случае $n + 1 = 11,\ x = 5706$. Поэтому

$$f(182853) = 2 \cdot 3^{11} + 5706 = 360000.$$

6. Каждое из целых чисел a, b, c по модулю не превышает 5, при этом $|c| \leq 4|a| - 2|b|$. Сколько существует таких троек (a, b, c), что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет только целые корни?

Ответ: 58.

Решение. Если $a = 0$, то условие $|c| \leq 4|a| - 2|b|$ выполняется только при $b = c = 0$. Тогда уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ становится тождеством и имеет не только целые корни. Значит, $a \neq 0$, и наше уравнение всегда будет квадратным.
Пусть оно имеет целые корни *p* и *q* (в частности, возможно, что $p = q$). Тогда по теореме Виета $b = -a(p + q), c = apq$.
Подстановка в условие $|c| \leq 4|a| - 2|b|$ дает: $|pq| \leq 4 - 2|p + q|$. Необходимое условие: $4 - 2|p + q| \geq 0$, то есть $|p + q| \leq 2$.
Получается три случая:
а) $|p + q| = 2, |pq| = 0$. Тогда корни: {0, 2}, {0, −2};
б) $|p + q| = 1, |pq| \leq 2$. Тогда корни: {0, 1}, {0, −1}, {1, −2}, {−1, 2}.
в) $|p + q| = 0, |pq| \leq 4$. Тогда корни: {0, 0}, {1, −1}, {2, −2}.
Соответственно, для каждой из полученных девяти пар корней (p, q) определяются коэффициенты $b = -a(p + q), c = apq$, а значит, и уравнения. Количество подходящих уравнений ограничивается условиями $|a| \leq 5$, $|b| \leq 5$, $|c| \leq 5$.
Если $|a| = 1$, то подходят $|p + q| \leq 5$, $|pq| \leq 5$, то есть все 9 пар (*p*, *q*). Получается 9 уравнений для $a = 1$ и 9 уравнений для $a = -1$ – всего 18 уравнений.
Если $|a| = 2$, то подходят $|p + q| \leq 2$, $|pq| \leq 2$. Получается 8 уравнений (все, кроме {2, −2}) для $a = 2$ и 8 уравнений для $a = -2$ – всего 16 уравнений.
Если $|a| = 3$, то подходят $|p + q| \leq 1$, $|pq| \leq 1$. Получается 2 + 2 = 4 уравнения для $a = 3$ и 4 уравнений для $a = -3$ – всего 8 уравнений.
Если $|a| = 4$, то подходят $|p + q| \leq 1$, $|pq| \leq 1$. Получается тоже 4 уравнения для $a = 4$ и 4 уравнений для $a = -4$ – всего 8 уравнений.
Если $|a| = 5$, то снова подходят $|p + q| \leq 1$, $|pq| \leq 1$. Получается 4 уравнения для $a = 5$ и 4 уравнения для $a = -5$ – всего 8 уравнений.
Всего получается 18 + 16 + 8 + 8 + 8 = 58 уравнений.