Отборочный этап олимпиады «Покори Воробьёвы горы!» по математике длился 24 часа. Он состоял из блиц-тура (7 задач, ответы к которым нужно отправить в течение 3 часов) и творческой части (3 задачи, полное решение которых нужно отправить в течение оставшегося времени).

Отборочный этап. Блиц-тур

Каждый участник блиц-тура получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Приводим типичный набор из семи задач блиц-тура.

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{2\sqrt{x+3}+x-4\sqrt{3}-9}>\frac{1}{2\sqrt{x+6}+x-6\sqrt{2}-12}.$$

В ответе укажите сумму его целочисленных решений.

Ответ: 21.

Решение. Исходное неравенство преобразуется к виду:

$$\frac{2\sqrt{x+6}-\ 2\sqrt{x+3}-6\sqrt{2}\ +4\sqrt{3}-3}{\left(2\sqrt{x+3}+x-4\sqrt{3}-9\right)\left(2\sqrt{x+6}+x-6\sqrt{2}-12\right)}>0.$$

Функции в скобках в знаменателе монотонно возрастают и обращаются в ноль при $x=9$ и $x=12$ соответственно.

Функция в числителе монотонно убывает и принимает (при $x=-3$) наибольшее значение, равное $6\sqrt{3}-6\sqrt{2}-3<0$.

Таким образом, решением неравенства является интервал (9; 12).

2. Решите уравнение

$$\cos 3x+\sin x\sin 2x=0.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку $A=\left[\frac{(12m+1)\pi}{6};\ \frac{2(3m+1)\pi}{3}\right],\ m=-3,$ при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

Ответ: $-35{,}34$.

Решение. Так как $\cos 3x = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x$, то исходное уравнение равносильно уравнению

$$\cos 2x \cdot \cos x = 0.$$

Отсюда $\cos 2x = 0$ (то есть $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$) и $\cos x = 0$ (то есть $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$). В отрезок A попадает два значения: $x = -6\pi + \frac{\pi}{4}$ и $x = -6\pi + \frac{\pi}{2}$. Их сумма равна $\pi\left(\frac{3}{4} - 12\right) = -\frac{45\pi}{4} \approx -35{,}3429$.

3. В равнобедренном треугольнике известно основание $b = 24$ и медиана $m_a = \frac{9\sqrt{17}}{2}$, проведенная к боковой стороне a. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: 8.

Решение. После удвоения медианы получаем параллелограмм, для которого сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон

$$(2m_a)^2 + a^2 = 2a^2 + 2b^2,$$

откуда $a = \sqrt{4m_a^2 - 2b^2}$ (тот же результат можно получить из формулы для длины медианы). Подставляя числовые значения, получаем $a = 15$.

Найдем площадь треугольника. Так как высота $h_b = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = 9$, то площадь $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = 108$. После этого находятся радиусы вписанной окружности r и описанной окружности R:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{108}{27} = 4, \qquad R = \frac{abc}{4S} = \frac{a^2 b}{4S} = \frac{25}{2}.$$

Заметив, что треугольник тупоугольный, получаем

$$O_r O_R = \sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} + r = \frac{7}{2} + 4 = 7{,}5.$$

Ближайшее целое равно 8.

4. Решите систему

$$\begin{cases} z^4 + xz + yz - 15 = 0, \\ x^2 + y^2 + 14(y - x) + 98 = 0. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k^2 + y_k^2 + z_k^3$ для каждого решения (x_k, y_k, z_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если решений нет, либо решений бесконечно много, в бланке ответов укажите цифру 0.

Ответ: 90,38.

Решение. Второе уравнение системы приводится к виду

$$(x - 7)^2 + (y + 7)^2 = 0.$$

Подставляя теперь $x = 7, y = -7$ в первое уравнение, получаем $z^4 = 15$, поэтому решением являются две тройки: $\left(x_1 = 7, y_1 = -7, z_1 = \sqrt[4]{15}\right)$, $\left(x_2 = 7, y_2 = -7, z_2 = -\sqrt[4]{15}\right)$. Минимальное значение $x_k^2 + y_k^2 + z_k^3$ достигается на второй тройке, и оно равно $49 + 49 - \sqrt[4]{15^3} \approx 90{,}38$.

5. Турист преодолел маршрут, состоящий из трех участков *AB*, *BC* и *CD* равной длины, со средней скоростью $a = 4$ км/ч. Его средняя скорость на *AB* в $k = \frac{4}{3}$ раз больше его средней скорости на пути от *B* до *D* и равна полусумме его средних скоростей на *BC* и *CD*. Определите сумму средних скоростей туриста на участках *AB* и *BC*, если на прохождение *BC* он потратил меньше времени, чем на прохождение *CD*. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 12,22.

Решение. Пусть V_1, V_2 и V_3 – средние скорости соответственно на *AB*, *BC* и *CD*. Пусть $x = AB = BC = CD$, t_1, t_2 и t_3 – времена, потраченные соответственно на прохождение этих участков. Тогда

$$\frac{3x}{t_1+t_2+t_3}=a \Leftrightarrow \frac{V_1V_2+V_1V_3+V_2V_3}{V_1V_2V_3}=\frac{3}{a};$$

$$V_1=k\cdot\frac{2x}{t_2t_3} \Leftrightarrow V_1=\frac{2kV_2V_3}{V_2+V_3};$$

$$V_1=\frac{V_2+V_3}{2}.$$

Отсюда получаем, что $V_1=\frac{(2k+1)a}{3}$, а V_2 и V_3 удовлетворяют системе

$$\begin{cases} V_2+V_3=2V_1=\dfrac{2(2k+1)a}{3}, \\ V_2V_3=\dfrac{V_1^2}{k}=\dfrac{(2k+1)^2a^2}{9k}. \end{cases}$$

Из соответствующего квадратного уравнения получаем скорости V_2 и V_3. В результате имеем:

$$V_1=\frac{(2k+1)a}{3}, V_2=V_1\left(1+\sqrt{\frac{k-1}{k}}\right), V_3=V_1\left(1-\sqrt{\frac{k-1}{k}}\right).$$

Для заданных значений a и k получаем $V_1=\frac{44}{9}, V_2=\frac{22}{3}, V_3=\frac{22}{9}$.

Ответ на вопрос задачи: $\frac{44}{9}+\frac{22}{3}=\frac{110}{9}=12\frac{2}{9}\approx 12{,}22$.

6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|\sin(7x)-a|+|\sin(7x)+a|=\frac{a^2}{6}-x^4$$

имеет нечётное количество решений. В ответе укажите сумму квадратов всех найденных значений a. Если таких значений бесконечно много, в ответе укажите –1. Если таких значений нет, в ответе укажите 0.

Ответ: 288.

Решение. В силу чётности функции для нечётного количества решений необходимо, чтобы одним из решений было $x = 0$. Поэтому

$$|-a|+|a|=\frac{a^2}{6} \Leftrightarrow a=0, a=\pm 12.$$

Проверка показывает, что все три значения подходят. Действительно, при $a = 0$ получающееся уравнение $x^4 + 2|\sin(7x)| = 0$ имеет единственное решение $x = 0$. При $a = \pm 12$ получается уравнение

$$x^4 + |\sin(7x) - 12| + |\sin(7x) + 12| - 24 = 0.$$

Так как $|\sin(7x)| \leq 1$, то это уравнение равносильно уравнению $x^4 = 0$, которое имеет один корень $x = 0$.

Таким образом, в ответ идёт число $0^2 + 12^2 + (12)^2 = 288$.

7. Найдите количество натуральных делителей числа A, не являющихся полными квадратами, если

$$\log_3 \log_4 \frac{A}{2025} = 2.$$

Ответ: 225.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнениям

$$\log_3 \log_4 \frac{A}{2025} = \log_3 3^2 \Leftrightarrow \log_4 \frac{A}{2025} = 3^2 \Leftrightarrow$$

$$\log_4 \frac{A}{2025} = \log_4 4^{(3^2)} \Leftrightarrow A = 2025 \cdot 4^{(3^2)} = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 2^{18}.$$

Значит, число A имеет $(4 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (18 + 1) = 285$ делителей.

Делители числа A, являющиеся полными квадратами, имеют вид

$$3^{2\alpha} \cdot 5^{2\beta} \cdot 2^{2\gamma}, \text{где } \alpha \in \{0, 1, 2\}, \beta \in \{0, 1\}, \gamma \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

Таких делителей $3 \cdot 2 \cdot 10 = 60$.

Поэтому количество делителей, не являющихся полными квадратами, равно $285 - 60 = 225$.

Набор творческих задач.

I. Вектор $\overrightarrow{OP}$, соединяющий начало координат O и точку P, образует острые углы α, β и γ с положительными направлениями осей Ox, Oy и Oz, соответственно. Найдите значение выражения $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$, если известно, что $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\gamma)+\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\alpha)+\cos(\gamma-\alpha)+\cos(\gamma-\beta)=t$. При необходимости округлите ответ до сотых. Если решений больше одного, то в ответ запишите наименьшее. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Решение. Поскольку $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, то

$$(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2=1+2(\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\gamma+\cos\gamma\cos\beta)=1+t.$$

Поскольку углы все острые, то решение $-\sqrt{1+t}$ не подходит. Подойдёт только $\sqrt{1+t}$.
Ответ: $\sqrt{1+t}$.

$\square$

1-1. $t=112/57$.
Ответ: 1,72.
1-2. $t=47/25$.
Ответ: 1,7.
1-3. $t=76/45$.
Ответ: 1,64.
1-4. $t=148/77$.
Ответ: 1,71.
1-5. $t=29/21$.
Ответ: 1,54.
1-6. $t=83/45$.
Ответ: 1,69.
1-7. $t=46/35$.
Ответ: 1,52.
1-8. $t=31/19$.
Ответ: 1,62.
1-9. $t=78/43$.
Ответ: 1,68.
1-10. $t=110/59$.
Ответ: 1,69.
1-11. $t=9/5$.
Ответ: 1,67.
1-12. $t=142/83$.
Ответ: 1,65.
1-13. $t=79/49$.
Ответ: 1,62.
1-14. $t=34/29$.
Ответ: 1,47.
1-15. $t=25/31$.
Ответ: 1,34.
1-16. $t=41/85$.
Ответ: 1,22.
1-17. $t=66/109$.
Ответ: 1,27.
1-18. $t=80/41$.
Ответ: 1,72.

1-19. $t = 33/17$.
Ответ: 1,71.
1-20. $t = 52/29$.
Ответ: 1,67.
1-21. $t = 19/13$.
Ответ: 1,57.
1-22. $t = 108/61$.
Ответ: 1,66.
1-23. $t = 61/37$.
Ответ: 1,63.
1-24. $t = 136/89$.
Ответ: 1,59.
1-25. $t = 7/17$.
Ответ: 1,19.
1-26. $t = 6/19$.
Ответ: 1,15.

II. Каждое из целых чисел $a,\ b,\ c$ по модулю не превышает 5, при этом $|c| \leqslant 4\,|a| - 2\,|b|$. Сколько существует таких троек $(a,\ b,\ c)$, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет только целые корни?

Ответ: 58.

Решение. Если $a = 0$, то условие $|c| \leqslant 4\,|a| - 2\,|b|$ выполняется только при $b = c = 0$. Тогда уравнение $ax^2+bx+c = 0$ становится тождеством и имеет не только целые корни. Значит, $a \neq 0$, и наше уравнение всегда будет квадратным.

Пусть оно имеет целые корни p и q (в частности, возможно, что $p = q$). Тогда по теореме Виета $b = -a\,(p+q)\,,\ c = apq$.

Подстановка в условие $|c| \leqslant 4\,|a| - 2\,|b|$ дает: $|pq| \leqslant 4 - 2\,|p+q|$. Необходимое условие: $4 - 2\,|p+q| \geqslant 0$, то есть $|p+q| \leqslant 2$.

Получается три случая:

а) $|p+q| = 2$, $|pq| = 0$. Тогда корни: $\{0, 2\}$, $\{0, -2\}$;

б) $|p+q| = 1$, $|pq| \leqslant 2$. Тогда корни: $\{0, 1\}$, $\{0, -1\}$, $\{1, -2\}$, $\{-1, 2\}$.

в) $|p+q| = 0$, $|pq| \leqslant 4$. Тогда корни: $\{0, 0\}$, $\{1, -1\}$, $\{2, -2\}$.

Соответственно, для каждой из полученных девяти пар корней $(p,\ q)$ определяются коэффициенты $b = -a\,(p+q)\,,\ c = apq$, а значит, и уравнения. Количество подходящих уравнений ограничивается условиями $|a| \leqslant 5$, $|b| \leqslant 5$, $|c| \leqslant 5$.

Если $|a| = 1$, то подходят $|p+q| \leqslant 5$, $|pq| \leqslant 5$, то есть все 9 пар $(p,\ q)$. Получается 9 уравнений для $a = 1$ и 9 уравнений для $a = -1$ – всего 18 уравнений.

Если $|a| = 2$, то подходят $|p+q| \leqslant 2$, $|pq| \leqslant 2$. Получается 8 уравнений (все, кроме $\{2, -2\}$) для $a = 2$ и 8 уравнений для $a = -2$ – всего 16 уравнений.

Если $|a| = 3$, то подходят $|p+q| \leqslant 1$, $|pq| \leqslant 1$. Получается $2 + 2 = 4$ уравнения для $a = 3$ и 4 уравнений для $a = -3$ – всего 8 уравнений.

Если $|a| = 4$, то подходят $|p+q| \leqslant 1$, $|pq| \leqslant 1$. Получается тоже 4 уравнения для $a = 4$ и 4 уравнений для $a = -4$ – всего 8 уравнений.

Если $|a| = 5$, то снова подходят $|p+q| \leqslant 1$, $|pq| \leqslant 1$. Получается 4 уравнения для $a = 5$ и 4 уравнения для $a = -5$ – всего 8 уравнений.

Всего получается $18 + 16 + 8 + 8 + 8 = 58$ уравнений.

$\square$

Варианты.

2.1. Каждое из целых чисел $a,\ b,\ c$ по модулю не превышает 5, при этом $|c| \leqslant 4\,|a| - 2\,|b|$. Сколько существует таких троек $(a,\ b,\ c)$, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет только целые корни?
Ответ: 58.

2.2. Каждое из целых чисел $a,\ b,\ c$ по модулю не превышает 5, при этом $|c| \leqslant 4\,|a| - 2\,|b|$. Сколько существует таких троек $(a,\ b,\ c)$, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет, как минимум, два различных целых корня?

Ответ: 49.

Решение. Если $a=0$, то условие $|c| \leqslant 4\,|a| - 2\,|b|$ выполняется только при $b=c=0$. Тогда уравнение $ax^2+bx+c=0$ становится тождеством и имеет не только целые корни. Но среди них есть бесконечно много целых корней. Значит, тройка $(0,\ 0,\ 0)$ подходит.

Ищем остальные тройки при $a \neq 0$, когда наше уравнение всегда будет квадратным.

Пусть оно имеет различные целые корни p и q. Тогда по теореме Виета $b = -a\,(p+q)\,,\ c = apq$.

Подстановка в условие $|c| \leqslant 4\,|a| - 2\,|b|$ дает: $|pq| \leqslant 4 - 2\,|p+q|$. Необходимое условие: $4 - 2\,|p+q| \geqslant 0$, то есть $|p+q| \leqslant 2$.

Получается три случая:

а) $|p+q| = 2,\ |pq| = 0$. Тогда корни: $\{0, 2\}$, $\{0, -2\}$;

б) $|p+q| = 1,\ |pq| \leqslant 2$. Тогда корни: $\{0, 1\}$, $\{0, -1\}$, $\{1, -2\}$, $\{-1, 2\}$.

в) $|p+q| = 0,\ |pq| \leqslant 4$. Тогда корни: $\{1, -1\}$, $\{2, -2\}$.

Соответственно, для каждой из полученных восьми пар корней $(p,\ q)$ определяются коэффициенты $b = -a\,(p+q)\,,\ c = apq$, а значит, и уравнения. Количество подходящих уравнений ограничивается условиями $|a| \leqslant 5$, $|b| \leqslant 5$, $|c| \leqslant 5$.

Если $|a| = 1$, то подходят $|p+q| \leqslant 5$, $|pq| \leqslant 5$, то есть все 8 пар $(p,\ q)$. Получается 8 уравнений для $a=1$ и 8 уравнений для $a=-1$ – всего 16 уравнений.

Если $|a| = 2$, то подходят $|p+q| \leqslant 2$, $|pq| \leqslant 2$. Получается 7 уравнений (все, кроме $\{2, -2\}$) для $a=2$ и 7 уравнений для $a=-2$ – всего 14 уравнений.

Если $|a| = 3$, то подходят $|p+q| \leqslant 1$, $|pq| \leqslant 1$. Получается $2+1=3$ уравнения для $a=3$ и 3 уравнений для $a=-3$ – всего 6 уравнений.

Если $|a| = 4$, то подходят $|p+q| \leqslant 1$, $|pq| \leqslant 1$. Получается тоже 3 уравнения для $a=4$ и уравнений для $a=-4$ – всего 6 уравнений.

Если $|a| = 5$, то снова подходят $|p+q| \leqslant 1$, $|pq| \leqslant 1$. Получается 3 уравнения для $a=5$ и 3 уравнения для $a=-5$ – всего 6 уравнений.

Всего получается $1+16+14+6+6+6=49$ уравнений. □

2.3. Каждое из целых чисел $a,\ b,\ c$ по модулю не превышает 5, при этом $|c| \leqslant 4\,|a| - 2\,|b|$. Сколько существует таких троек $(a,\ b,\ c)$, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ либо превращается в тождество, либо имеет только целые корни?

Ответ: 59.

2.4. Каждое из целых чисел $a,\ b,\ c$ по модулю не превышает 5, при этом $|c| \leqslant 4\,|a| - 2\,|b|$. Сколько существует таких троек $(a,\ b,\ c)$, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет ровно два различных целых корня?

Ответ: 48.

III. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD=10$, $BC=7-\sqrt{33}$ и боковые стороны $AB=5$, $CD=7$. Точка E расположена на основании BC. Найдите наименьший возможный периметр треугольника AED. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Решение. Для расчета нам понадобится высота трапеции. Ее можно искать по-разному. Например, проведем через вершину B прямую BF параллельно CD (см. рис. 1), в получившемся $\triangle ABF$ известны три стороны.

Теперь можно найти площадь по формуле Герона, а затем высоту BH. Или же обозначить $AH=x$ и записать квадрат высоты двумя способами:

$$5^2 - x^2 = 7^2 - \left(3+\sqrt{33}-x\right)^2.$$

Отсюда получаем

$$25 - x^2 = 49 - \left(3+\sqrt{33}\right)^2 + 2x\left(3+\sqrt{33}\right) - x^2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2x\left(3+\sqrt{33}\right) = 25 - 49 + 9 + 33 + 6\sqrt{33} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad x\left(3+\sqrt{33}\right) = 9 + 3\sqrt{33} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3.$$

Значит, $AH = 3$, $BH = 4$. Отметим также, что тогда $HD = 7$ (это нам понадобится в дальнейшем).

Далее нам нужно найти минимальное значение суммы длин отрезков AE и ED (третья сторона треугольника $AD = 10$ не изменяется при изменении положения точки E). Применим стандартный для такой ситуации ход: построим точку P симметрично точке D относительно прямой BQ, на которой находится верхнее основание трапеции (см. рис. 2, на котором точку C умышленно убрали). После этого будем искать минимум суммы длин AE и EP (очевидно, что $EP = ED$).

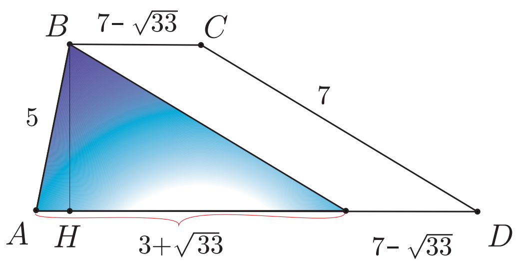

Рис. 1

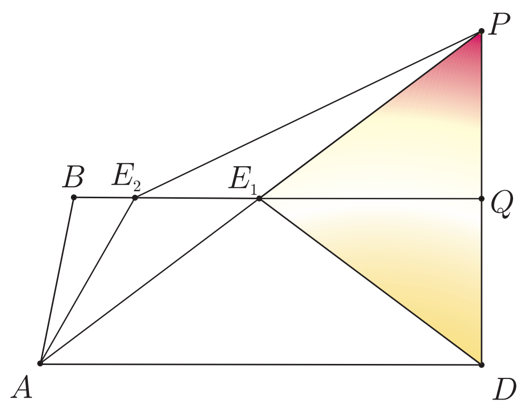

Рис. 2

Минимум суммы достигается тогда, когда ломаная AEP превращается в прямую линию. На рис. 2 это положение соответствует точке E_1. И если взять любую другую точку, например, точку E_2, то $AE_2 + E_2P > AE_1 + E_1P = AP$. При этом, чем левее точка E, тем сумма $AE + EP$ больше.

Однако есть еще один аспект, на который нужно обратить внимание. По условию, точка E расположена не на прямой BC, а на основании трапеции BC. Проверим, выполнено ли это условие для точки E_1. (Заметим, что именно из-за этого мы убрали точку C из предыдущего рисунка.)

Очевидно, что $E_1Q = 5$, как средняя линия треугольника APD. Значит, $BE_1 = 7 - 5 = 2$. И так как $BC = 7 - \sqrt{33} < 2$, то точка E_1 лежит не на основании трапеции BC, а на его продолжении!

Значит, искомая точка – это не точка E_1, а крайняя правая точка основания BC, то есть точка C. Периметр $\triangle ACD$ равен $AC + 10 + 7$.

Пусть проекция точки C на основание AD есть точка G. Тогда $CG = 4$, $AG = 3+7-\sqrt{33} = 10-\sqrt{33}$. И по теореме Пифагора

$$AC^2 = \left(10 - \sqrt{33}\right)^2 + 4^2 = 149 - 20\sqrt{33}.$$

Периметр треугольника ACD равен $17 + \sqrt{149 - 20\sqrt{33}} \approx 22,84$.

Ответ: $22,84$. □

3.1. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 10$, $BC = 7 - \sqrt{33}$ и боковые стороны $AB = 5$, $CD = 7$. Точка E расположена на основании BC. Найдите наименьший возможный периметр треугольника AED. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $22,84$.

3.2. В трапеции $EFGH$ известны основания $EH = 11$, $FG = 7 - \sqrt{33}$ и боковые стороны $EF = 4\sqrt{2}$, $GH = 7$. Точка A расположена на основании FG. Найдите наименьший возможный периметр треугольника EAH. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $24,60$.

3.3. В трапеции $KLMN$ известны основания $KN = 8$, $LM = 5 - \sqrt{21}$ и боковые стороны $KL = \sqrt{13}$, $MN = 5$. Точка P расположена на основании LM. Найдите наименьший возможный периметр треугольника KPN. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $16,96$.

3.4. В трапеции $PQRS$ известны основания $PS = 9$, $QR = 5 - \sqrt{21}$ и боковые стороны $PQ = 2\sqrt{5}$, $RS = 5$. Точка K расположена на основании QR. Найдите наименьший возможный периметр треугольника PKS. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $18,85$.

3.5. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 8$, $BC = 6 - 2\sqrt{5}$ и боковые стороны $AB = 2\sqrt{5}$, $CD = 6$. Точка E расположена на основании BC. Найдите наименьший возможный периметр треугольника AED. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $19,33$.

3.6. В трапеции $EFGH$ известны основания $EH = 9$, $FG = 7 - 2\sqrt{6}$ и боковые стороны $EF = \sqrt{29}$, $GH = 7$. Точка A расположена на основании FG. Найдите наименьший возможный периметр треугольника EAH. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $22,47$.

3.7. В трапеции $KLMN$ известны основания $KN = 10$, $LM = 8 - 2\sqrt{7}$ и боковые стороны $KL = 2\sqrt{10}$, $MN = 8$. Точка P расположена на основании LM. Найдите наименьший возможный периметр треугольника KPN. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $25,63$.

3.8. В трапеции $PQRS$ известны основания $PS = 11$, $QR = 8 - \sqrt{39}$ и боковые стороны $PQ = \sqrt{34}$, $RS = 8$. Точка K расположена на основании QR. Найдите наименьший возможный периметр треугольника PKS. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $25,90$.

3.9. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 12$, $BC = 8 - \sqrt{39}$ и боковые стороны $AB = \sqrt{41}$, $CD = 8$. Точка E расположена на основании BC. Найдите наименьший возможный периметр треугольника AED. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $27,62$.

3.10. В трапеции $EFGH$ известны основания $EH = 11$, $FG = 9 - 4\sqrt{2}$ и боковые стороны $EF = \sqrt{53}$, $GH = 9$. Точка A расположена на основании FG. Найдите наименьший возможный периметр треугольника EAH. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $28,81$.

3.11. В трапеции $KLMN$ известны основания $KN = 12$, $LM = 9 - 3\sqrt{5}$ и боковые стороны $KL = 3\sqrt{5}$, $MN = 9$. Точка P расположена на основании LM. Найдите наименьший возможный периметр треугольника KPN. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $29,00$.

3.12. В трапеции $PQRS$ известны основания $PS = 13$, $QR = 9 - 3\sqrt{5}$ и боковые стороны $PQ = 2\sqrt{13}$, $RS = 9$. Точка K расположена на основании QR. Найдите наименьший возможный периметр треугольника PKS. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $30,69$.

3.13. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 12$, $BC = 8 - \sqrt{55}$ и боковые стороны $AB = 5$, $CD = 8$. Точка E расположена на основании BC. Найдите наименьший возможный периметр треугольника AED. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $25,48$.

3.14. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 9$, $BC = 6 - \sqrt{33}$ и боковые стороны $AB = 5$, $CD = 7$. Точка E расположена на основании BC. Найдите наименьший возможный периметр треугольника AED. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $21,16$.

3.15. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 17$, $BC = 12 - 4\sqrt{7}$ и боковые стороны $AB = 13$, $CD = 16$. Точка E расположена на основании BC. Найдите наименьший возможный периметр треугольника AED. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $46,61$.

3.16. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 12$, $BC = 10 - \sqrt{51}$ и боковые стороны $AB = 2\sqrt{5}$, $CD = \sqrt{67}$. Точка E расположена на основании BC. Найдите наименьший возможный периметр треугольника AED. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $26,48$.

3.17. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 12$, $BC = 9 - \sqrt{55}$ и боковые стороны $AB = 5$, $CD = \sqrt{71}$. Точка E расположена на основании BC. Найдите наименьший возможный периметр треугольника AED. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $26,51$.

3.18. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 12$, $BC = 9 - \sqrt{57}$ и боковые стороны $AB = 5$, $CD = \sqrt{73}$. Точка E расположена на основании BC. Найдите наименьший возможный периметр треугольника AED. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $26,53$.

3.19. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 13$, $BC = 10 - \sqrt{57}$ и боковые стороны $AB = 5$, $CD = 5\sqrt{3}$. Точка E расположена на основании BC. Найдите наименьший возможный периметр треугольника AED. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $28,32$.

3.20. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 14$, $BC = 12 - \sqrt{54}$ и боковые стороны $AB = 2\sqrt{5}$, $CD = \sqrt{70}$. Точка E расположена на основании BC. Найдите наименьший возможный периметр треугольника AED. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $30,13$.

3.21. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 13$, $BC = 8 - \sqrt{54}$ и боковые стороны $AB = \sqrt{41}$, $CD = \sqrt{70}$. Точка E расположена на основании BC. Найдите наименьший возможный периметр треугольника AED. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $28,29$.

3.22. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 9$, $BC = 5 - \sqrt{21}$ и боковые стороны $AB = \sqrt{41}$, $CD = \sqrt{46}$. Точка E расположена на основании BC. Найдите наименьший возможный периметр треугольника AED. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $22,45$.

3.23. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 6$, $BC = 4 - \sqrt{13}$ и боковые стороны $AB = 2\sqrt{10}$, $CD = 7$. Точка E расположена на основании BC. Найдите наименьший возможный периметр треугольника AED. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $19,46$.

3.24. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 6$, $BC = 4 - \sqrt{11}$ и боковые стороны $AB = 2\sqrt{10}$, $CD = \sqrt{47}$. Точка E расположена на основании BC. Найдите наименьший возможный периметр треугольника AED. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $19,43$.

3.25. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 11$, $BC = 8 - 3\sqrt{5}$ и боковые стороны $AB = 5$, $CD = \sqrt{61}$. Точка E расположена на основании BC. Найдите наименьший возможный периметр треугольника AED. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответ запишите -2.

Ответ: $24,68$.