Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заочного этапа 2025/2026 учебного года для 5–6 класса

1. На первом уроке в школе алхимии учитель объяснил, что если смешать две колбы красного раствора, то получится зелье восстановления, если две синих, то зелье маны, а если красную и синюю – зелье выносливости. Потом ассистенты раздали каждому по три колбы. Учитель попросил пока не смешивать растворы и попросил поднять руку тех, что может сделать зелье восстановления, подняли руки 20 учеников. Потом спросил про зелье маны – подняло руки 16 учеников. На вопрос про зелье выносливости подняли руки 30 учеников.
   Определите, сколько учеников получило все три колбы одного цвета?

   Ответ 6.

Решение. Поскольку цветов 2, а колб 3, то есть два одинаковых. Значит каждый ученик может гарантированно собрать либо зелье восстановления, либо маны. Собрать и то и другое невозможно, имея только три колбы. Значит, всего учеников 20 + 16 = 36 человек. Из них разноцветные колбы получило 30 человек, значит, остальные 36 – 30 = 6 человек получили одноцветные колбы.

2. Найдите все целые *n*, при которых $n^2+2n-120$ – простое число. В ответе укажите произведение найденных чисел n или 0, если таких чисел не существует.
   Напомним, что простым числом называют такое натуральное число, которое больше 1 и делится только на 1 и само на себя.

   Ответ: $\mathbf{-143}$**.**

Решение. Так как $n^2+2n-120=(n+12)(n-10)$ – простое, то один из сомножителей равен 1 или -1. Потому возможны четыре случая:
1) $n+12=1 \Rightarrow n=-11$. Тогда $n-10=-21$, и число $1\cdot(-21)=-21$ не является простым;
2) $n+12=-1 \Rightarrow n=-13$. Тогда $n-10=-23$, и число $(-1)\cdot(-23)=23$ является простым;
3) $n-10=1 \Rightarrow n=11$. Тогда $n+12=23$, и число $1\cdot 23=23$ является простым;
4) $n-10=-1 \Rightarrow n=9$. Тогда $n+12=21$, и число $(-1)\cdot 21=-21$ не является простым.
Значит, подходят значения $n=-13$ и $n=11$, произведение которых равно (-143).

3. На Эмберском машиностроительном заводе им. Р. Желязны в кузинаторном цеху рабочие делают большие и малые кузинаторы. Известно, что все рабочие работают с одинаковой производительностью, и что на изготовление большого кузинатора у каждого рабочего уходит ровно в два раза больше времени, чем на производство малого кузинатора. Начальство спустило план: сделать некоторое количество больших

и такое же количество малых кузинаторов. Первые полсмены (4 часа) все рабочие делали большие кузинаторы. Потом они разделились и в остаток смены (4 часа) половина рабочих делала большие, а половина – малые кузинаторы. В результате план по большим кузинаторам был полностью выполнен. А на следующий день трое рабочих доделали малые кузинаторы, потратив на это более 3, но менее 4 часов. Сколько всего рабочих работает в цеху?

Ответ: 10.

Решение. Обозначим x – производительность одного рабочего, выраженная в больших кузинаторах в час. Из условия видно, что количество рабочих четное, обозначим его 2n.
Тогда план составил $8\mathrm{nx} + 4\mathrm{nx} = 12\mathrm{nx}$ больших кузинаторов.
На производство малых кузинаторов надо затратить работы как $6nx$ больших,
пол-бригады за пол-смены сделали $4\mathrm{nx}$, значит, осталось $2\mathrm{nx}$.
Из условия $3 \cdot 3 \cdot x < 2nx < 3 \cdot 4 \cdot x \Rightarrow 9 < 2n < 12$, подходит единственное целое $n = 5$.

4. Шоколад «Алёнка» стоит 30 руб. за штуку, шоколад «Бурёнка» стоит 50 руб. и шоколад «Варёнка» стоит 60 руб. У Пети есть 300 руб., сколько существует различных способов купить шоколадки так, чтобы потратить всю сумму без остатка?

Ответ 10.

Решение. Допустим, Петя покупает x шоколадок «Аленка», y «Буренка» и z –«Варёнка».
Запишем равенство $30x + 50y + 60z = 300 \Rightarrow 3x + 5y + 6z = 30$. Очевидно, y должно быть кратно трем, возможные варианты $y = 0, 3, 6$.
Если y = 6, то денег на другие шоколадки уже не осталось, это 1 вариант.
Если $y = 3$, то $3x + 6z = 15 \Rightarrow x = 5 - 2z$. Можно брать $z = 0, 1, 2$, а x тогда выражается однозначно – всего 3 варианта.
Наконец, если $y = 0$, то $3x + 6z = 30 \Rightarrow x = 10 - 2z$. Можно брать $z = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ – всего 6 вариантов.
Итого 1 + 3 + 6 = 10 вариантов.

5. Про 2026-значное число известно, что оно кратно 9, а также, что любые 4 подряд идущие цифры этого числа образуют 4-значное число, которое тоже кратно 9. Нулей в записи числа нет. Найдите последнюю цифру числа (справа), если известно, что первая (слева) цифра этого числа – 3.

Ответ: 6.

Решение. Разобьем число на 506 четверок цифр и еще две цифры.
Сумма цифр числа кратна 9, сумма цифр в любой четверке кратна 9, значит сумма последних двух цифр тоже кратна 9 (то есть равна 9 или 18).
Далее, так как $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} \vdots 9$ и $a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + a_{i+4} \vdots 9$, то $a_i - a_{i+4} \vdots 9 \Rightarrow a_i = a_{i+4}$ (так как нулей в этом числе нет), то есть цифры числа повторяются с периодом 4.
Следовательно, 2025-я цифра числа совпадает с 1-й (так как 2025 – 1 кратно 4), то есть равна 3. Поэтому последняя цифра равна 6.

6. Участники шахматного кружка сыграли в один круг, т.е. каждый сыграл один раз с каждым. Чемпион Коля набрал больше очков, чем каждый из остальных участников, но меньше, чем 62% от максимально возможного количества очков, которое мог набрать участник турнира. Какое наименьшее число участников могло быть в кружке?
   Напомним, что в шахматах победитель получает одно очко, проигравший не получает ничего, а в случае ничьи оба игрока получают по ½ очка.

Ответ: 6.

Решение. Во-первых, легко убедиться, что 1, 2 или 3 участника быть не могло.
Если бы было 4 участника, то они провели бы 6 игр, поэтому суммарно набрали бы 6 очков. Чемпион должен набрать больше, чем $\frac{6}{4} = 1{,}5$ очка, то есть, как минимум, 2 очка, но это более 66% от максимально возможного числа 3.
Аналогично, если бы было 5 участников, то суммарно разыгрывается 10 очков, чемпион должен набрать более 2, т.е., по крайней мере, 2,5 очка, что составляет 62.5% от 4, что больше 62%.
Покажем, что для 6 участников такая ситуация возможна. Пусть Коля выиграл у Пети, а с остальными четырьмя участниками сыграл вничью. Тогда он получит $1 + 4 \cdot 0{,}5 = 3$ очка, что составляет 60% от 5. Если остальные участники сыграют друг с другом вничью, то они получат по 2,5 очка (кроме Пети, получившего 2 очка). Таким образом, Коля, действительно, набрал больше всех.