

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заочного этапа 2024/2025 учебного года для 7–8 класса

1) Найдите наименьшее значение $|11^m - 5^n|$ при условии, что n, m – натуральные числа.

Ответ. $4 = |11^2 - 5^3|$.

Решение: Это наименьшее, т.к. 11^m оканчивается на 1, а 5^n – на 5, следовательно, модуль разности может оканчиваться только на 4 или на 6.

2) Число, составленное из одних единиц называют репьюнит, например, 1, 11, 111 и т.д. Найдите наименьший репьюнит, который делится на 999 без остатка. В ответе запишите количество единиц в репьюните (например, для 11111 в ответе надо написать 5).

Ответ: 27

Решение: Очевидно, что поскольку репьюнит должен быть кратен 9, тогда сумма цифр тоже, поэтому длина (кол-во единиц) кратна 9. Разобьем на тройки: 111 111 111... 111 и поделим на 111. Результат будет 100 1001...100 1. Чтобы он был кратен 9, сумма цифр должна делиться на 9, значит троек было 9, т.е. 27 единиц.

Другое решение: Запишем 999 как $1000-1$. Обозначим частное $A = 1...1/999$ и пусть $\overline{A}$ — десятичная запись числа A . Очевидно, $999 \cdot A = 1000 A - A = \overline{A000} - A$. Это число должно состоять из одних единиц. Итак,

$$1\,000\,A - A = 111...11,$$

откуда

$$A = 1000\,A - 111...11$$

или

$$A = \overline{A000} - 11...1$$

Так как последние цифры уменьшаемого известны, то мы можем производить вычитание («в столбик»), выясняя тем самым последние знаки самого числа A . Приписывая эти знаки слева к нулям в правой части, мы сможем продолжить вычитание, выясняя новые знаки, и так далее, пока это возможно (т. е. пока вновь полученные знаки числа A не станут равными 1). В начале получим 889, потом 777889, потом 666777889 и становится понятной закономерность – цифры числа A идут «тройками», а на конце – 889: $A = 111222...777889$. В числе A 24 цифры, значит нужно взять 27 единиц, чтобы получить $999A$.

3) Учитель устроил соревнование: кто из школьников найдет как можно большее натуральное число, при делении на 33 дающее остаток, в 10 раз больший, чем частное от деления. Андрей нашел подходящее число первый. Но Борис вскоре нашел большее число, а Виктор смог превзойти результат Бориса. Найдите число Бориса.

Ответ: 86.

Решение. Из условия вытекает, что остаток должен делиться на 10. Так как, кроме этого, остаток меньше, чем 33, то получаются 3 возможных остатка: 10, 20 и 30. Соответственно частные от деления равны 1, 2 и 3, и соответствующие числа: $1 \cdot 33 + 10 = 43$; $2 \cdot 33 + 20 = 86$; $3 \cdot 33 + 30 = 129$. Так как число Бориса не наименьшее и не наибольшее из трех, то это 86.

4) На тренировке перед стрелками находятся 2024 мишени с номерами 1 до 2024. Первый стрелок попадает во все мишени с номерами 3, 6, 9, ..., 2022. Второй стрелок попадает во все мишени с номерами 4, 8, 12, ..., 2024. Третий стрелок попадает во все мишени с номерами 10, 20, 30, ..., 2020. Сколько осталось мишеней, в которые никто не попал?

Ответ: 945.

Решение. Пусть A_n – количество чисел от 1 до 2024, кратных n . Тогда количество пораженных мишеней равно

$$\begin{aligned} & A_3 + A_4 + A_{10} - A_{\text{НОД}(3,4)} - A_{\text{НОД}(3,10)} - A_{\text{НОД}(4,10)} + A_{\text{НОД}(3,4,10)} = \\ &= \left\lfloor \frac{2024}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2024}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2024}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2024}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2024}{30} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2024}{20} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2024}{60} \right\rfloor = \\ &= 674 + 506 + 202 - 168 - 67 - 101 + 33 = 1079. \end{aligned}$$

Значит, количество оставшихся непораженными мишеней равно $2024 - 1079 = 945$.

5) Прямая $y = ax + a + 8$ ($a > 0$) пересекает оси координат в точках A и B . Найдите наименьшую площадь треугольника ABO , где O – начало координат.

Ответ: 16.

Решение. Координаты точек пересечения: $(0; a + 8)$ и $(-\frac{a+8}{a}; 0)$. Треугольник ABO – прямоугольный, поэтому его площадь равна

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a+8}{a} \cdot (a+8) = \frac{a^2 + 16a + 64}{2a} = \frac{a}{2} + 8 + \frac{32}{a}.$$

Применяя неравенство о средних, получаем

$$\frac{a}{2} + \frac{32}{a} \geq 2 \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{32}{a}} = 8.$$

Поэтому минимальная площадь равна $8 + 8 = 16$, и достигается она при $\frac{a}{2} = \frac{32}{a}$, то есть при $a = 8$.

Другой способ:

$$\frac{a}{2} + 8 + \frac{32}{a} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a} - \frac{8}{\sqrt{a}} \right)^2 + 16 \geq 16.$$

Равенство достигается при $\sqrt{a} = \frac{8}{\sqrt{a}}$, то есть при $a = 8$.

6) Пусть $\{x_1, x_2, \dots\}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел (т.е. $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$).

Известно, что $x_1 = 1$ и $x_{n-1} \cdot x_{n+1} = x_n^3 + 1$ при всех $n > 1$. Найдите x_4 .

Ответ: 365, такая последовательность только одна: 1, 2, 9, 365,...

Достаточно доказать, что $x_2 = 2$, иначе не получится целое:

По условию $1 \cdot x_3 = x_2^3 + 1$, следовательно, $x_2 \cdot x_4 = (x_2^3 + 1)^3 + 1 = x_2^9 + 3x_2^6 + 3x_2^3 + 2$. Это число делится на x_2 только при $x_2 = 1$ или $x_2 = 2$, но 1 быть не может, т.к. последовательность возрастающая.