Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заочного этапа 2025/2026 учебного года для 7–8 класса

1. Найдите все целые *n*, при которых $n^2 + 2n - 120$ – простое число. В ответе укажите произведение найденных чисел n или 0, если таких чисел не существует.
   Напомним, что простым числом называют такое натуральное число, которое больше 1 и делится только на 1 и само на себя.

   Ответ: -143.

Решение. Так как $n^2 + 2n - 120 = (n + 12)(n - 10)$ – простое, то один из сомножителей равен 1 или -1. Потому возможны четыре случая:
1) $n + 12 = 1 \Rightarrow n = -11$. Тогда $n - 10 = -21$, и число $1 \cdot (-21) = -21$ не является простым;
2) $n + 12 = -1 \Rightarrow n = -13$. Тогда $n - 10 = -23$, и число $(-1) \cdot (-23) = 23$ является простым;
3) $n - 10 = 1 \Rightarrow n = 11$. Тогда $n + 12 = 23$, и число $1 \cdot 23 = 23$ является простым;
4) $n - 10 = -1 \Rightarrow n = 9$. Тогда $n + 12 = 21$, и число $(-1) \cdot 21 = -21$ не является простым.
Значит, подходят значения $n = -13$ и $n = 11$, произведение которых равно (-143).

2. На Эмберском машиностроительном заводе им. Р. Желязны в кузинаторном цеху рабочие делают большие и малые кузинаторы. Известно, что все рабочие работают с одинаковой производительностью, и что на изготовление большого кузинатора у каждого рабочего уходит ровно в два раза больше времени, чем на производство малого кузинатора. Начальство спустило план: сделать некоторое количество больших и такое же количество малых кузинаторов. Первые полсмены (4 часа) все рабочие делали большие кузинаторы. Потом они разделились и в остаток смены (4 часа) половина рабочих делала большие, а половина – малые кузинаторы. В результате план по большим кузинаторам был полностью выполнен. А на следующий день трое рабочих доделали малые кузинаторы, потратив на это более 3, но менее 4 часов. Сколько всего рабочих работает в цеху?

   Ответ: 10.

Решение. Обозначим x – производительность одного рабочего, выраженная в больших кузинаторах в час. Из условия видно, что количество рабочих четное, обозначим его 2n.
Тогда план составил $8\mathrm{nx} + 4\mathrm{nx} \ = \ 12\mathrm{nx}$ больших кузинаторов.
На производство малых кузинаторов надо затратить работы как $6nx$ больших,
пол-бригады за пол-смены сделали $4\mathrm{nx}$, значит, осталось $2\mathrm{nx}$.
Из условия $3 \cdot 3 \cdot x < \ 2nx < 3 \cdot 4 \cdot x \Rightarrow 9 < 2n < 12$, подходит единственное целое $n = 5$.

3. Есть 7 одинаковых чашек и 3 одинаковых стакана. Надо расставить их в ряд, при условии, что два стакана не могут стоять рядом. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 56.

Решение: Между 7 чашками есть 6 мест и еще есть 2 места справа и слева от них. Всего 8 мест.
На любое из этих 8 мест можно поставить один из трех стаканов, получаем $C_8^3 = 56$.

4. Про 2026-значное число известно, что оно кратно 9, а также, что любые 4 подряд идущие цифры этого числа образуют 4-значное число, которое тоже кратно 9. Нулей в записи числа нет. Найдите последнюю цифру числа (справа), если известно, что первая (слева) цифра этого числа – 3.

Ответ: 6.

Решение. Разобьем число на 506 четверок цифр и еще две цифры.
Сумма цифр числа кратна 9, сумма цифр в любой четверке кратна 9, значит сумма последних двух цифр тоже кратна 9 (то есть равна 9 или 18).
Далее, так как $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} \vdots 9$ и $a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + a_{i+4} \vdots 9$, то $a_i - a_{i+4} \vdots 9 \Rightarrow a_i = a_{i+4}$ (так как нулей в этом числе нет), то есть цифры числа повторяются с периодом 4.
Следовательно, 2025-я цифра числа совпадает с 1-й (так как 2025 – 1 кратно 4), то есть равна 3. Поэтому последняя цифра равна 6.

5. Участники шахматного кружка сыграли в один круг, т.е. каждый сыграл один раз с каждым. Чемпион Коля набрал больше очков, чем каждый из остальных участников, но меньше, чем 55% от максимально возможного количества очков, которое мог набрать участник турнира. Какое наименьшее число участников могло быть в кружке? Напомним, что в шахматах победитель получает одно очко, проигравший не получает ничего, а в случае ничьи оба игрока получают по ½ очка.

Ответ: 12.

Решение. Если есть n участников, то будет сыграно $\frac{n(n-1)}{2}$ партий, и таким же будет суммарное количество набранных всеми участниками очков.
Чемпион должен набрать как минимум $\frac{n}{2}$ очков. Действительно, если он набрал $\frac{n}{2} - \frac{1}{2}$, а остальные еще меньше, то в сумме получается меньше $\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot n = \frac{n(n-1)}{2}$, что невозможно.
Решив неравенство $\frac{n}{2} < 0.55(n-1)$, получим $n > 11$.
Покажем, что для 12 участников такая ситуация возможна. Пусть Коля выиграл у Пети, а с остальными сыграл вничью. Тогда он получит $1 + 10 \cdot 0{,}5 = 6$ очков, что составляет 54.55% от 11. Если остальные участники сыграют друг с другом вничью, то они получат по 5,5 очков (кроме Пети, получившего 5 очков). Таким образом, Коля, действительно, набрал больше всех.

6. Найдите все целые *n*, для которых существует $P(x)$ – многочлен с целочисленными коэффициентами, такой, что $P(15) = 48$, $P(29) = 62$ и $P(n) = n$.

Ответ: 18 и 26.

Решение. Воспользуемся тем фактом, что $P(a) - P(b) \vdots (a - b)$.
Значит, $(n - 48) \vdots (n - 15)$ и $(n - 62) \vdots (n - 29)$.
Поэтому $n - 48 = m(n - 15) \Rightarrow -33 = (m - 1)(n - 15) \Rightarrow (-33) \vdots (n - 15)$.
Аналогично, $(-33) \vdots (n - 29)$. Среди делителей числа (–33) есть только две пары, отличающиеся на 14: (11, –3) и (3, –11). Им соответствуют *n* = 26 и *n* = 18.
Заметим, что если взять многочлен *P*(*x*) = $x + 33 + (x - 15)(x - 29)$, то корнями уравнения $P(x) = x$ будут как раз 18 и 26.