

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заочного этапа 2024/2025 учебного года для 9 класса

1) Число, составленное из одних единиц называют репьюнит, например, 1, 11, 111 и т.д. Найдите наименьший репьюнит, который делится на 999 без остатка. В ответе запишите количество единиц в репьюните (например, для 11111 в ответе надо написать 5).

Ответ: 27

Решение: Очевидно, что поскольку репьюнит должен быть кратен 9, тогда сумма цифр тоже, поэтому длина (кол-во единиц) кратна 9. Разобьем на тройки: 111 111 111... 111 и поделим на 111. Результат будет 100 1001...100 1. Чтобы он был кратен 9, сумма цифр должна делиться на 9, значит троек было 9, т.е. 27 единиц.

Другое решение: Запишем 999 как 1000-1. Обозначим частное $A = 1...1/999$ и пусть $\overline{A}$ — десятичная запись числа A. Очевидно, $999 \cdot A = 1000 A - A = \overline{A000} - A$. Это число должно состоять из одних единиц. Итак,

$$1\,000\,A - A = 111...11,$$

откуда

$$A = 1000 A - 111...11$$

или

$$A = \overline{A000} - 11...1$$

Так как последние цифры уменьшаемого известны, то мы можем производить вычитание («в столбик»), выясняя тем самым последние знаки самого числа A. Приписывая эти знаки слева к нулям в правой части, мы сможем продолжить вычитание, выясняя новые знаки, и так далее, пока это возможно (т. е. пока вновь полученные знаки числа A не станут равными 1). В начале получим 889, потом 777889, потом 666777889 и становится понятной закономерность – цифры числа A идут «тройками», а на конце – 889: $A = 111222...777889$. В числе A 24 цифры, значит нужно взять 27 единиц, чтобы получить 999A.

2) Целой частью числа x (обозначение $[x]$) называют наибольшее целое, не превосходящее x. Например, $[3.14] = 3$, $[2024] = 2024$.

Сколько решений имеет уравнение $x^2 - [x^2] = (x - [x])^2$ на отрезке $1 \leq x \leq 10$?

Ответ: 91.

Решение: Представим $x = n + \{x\}$, где $\{x\} = x - [x]$, тогда $x^2 = n^2 + 2n\{x\} + \{x\}^2$. Чтобы выполнялось уравнение, необходимо и достаточно, чтобы $2n\{x\}$ было целым, т.е. $\{x\} = 0, \frac{1}{2n}, \dots, \frac{2n-1}{2n}$. Таким образом, на интервале $[n; n+1)$ находится ровно $2n$ решений. Просуммировав для $n = 1, 2, \dots, 9$ получим $2(1+2+\dots+9)=90$ решений. Кроме того, число 10 тоже является решением.

3) На тренировке перед стрелками находятся 2024 мишени с номерами 1 до 2024. Первый стрелок попадает во все мишени с номерами 3, 6, 9, ..., 2022. Второй стрелок попадает во все мишени с номерами 4, 8, 12, ..., 2024. Третий стрелок попадает во все мишени с номерами 10, 20, 30, ..., 2020. Сколько осталось мишеней, в которые никто не попал?

Ответ: 945.

Решение. Пусть A_n – количество чисел от 1 до 2024, кратных n. Тогда количество пораженных мишеней равно

$$\begin{aligned} & A_3 + A_4 + A_{10} - A_{\text{НОД}(3,4)} - A_{\text{НОД}(3,10)} - A_{\text{НОД}(4,10)} + A_{\text{НОД}(3,4,10)} = \\ &= \left[\frac{2024}{3} \right] + \left[\frac{2024}{4} \right] + \left[\frac{2024}{10} \right] - \left[\frac{2024}{12} \right] - \left[\frac{2024}{30} \right] - \left[\frac{2024}{20} \right] + \left[\frac{2024}{60} \right] = \\ &= 674 + 506 + 202 - 168 - 67 - 101 + 33 = 1079. \end{aligned}$$

Значит, количество оставшихся непораженными мишеней равно $2024 - 1079 = 945$.

4) Пусть $\{x_1, x_2, \dots\}$ - строго возрастающая последовательность натуральных чисел (т.е. $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$).

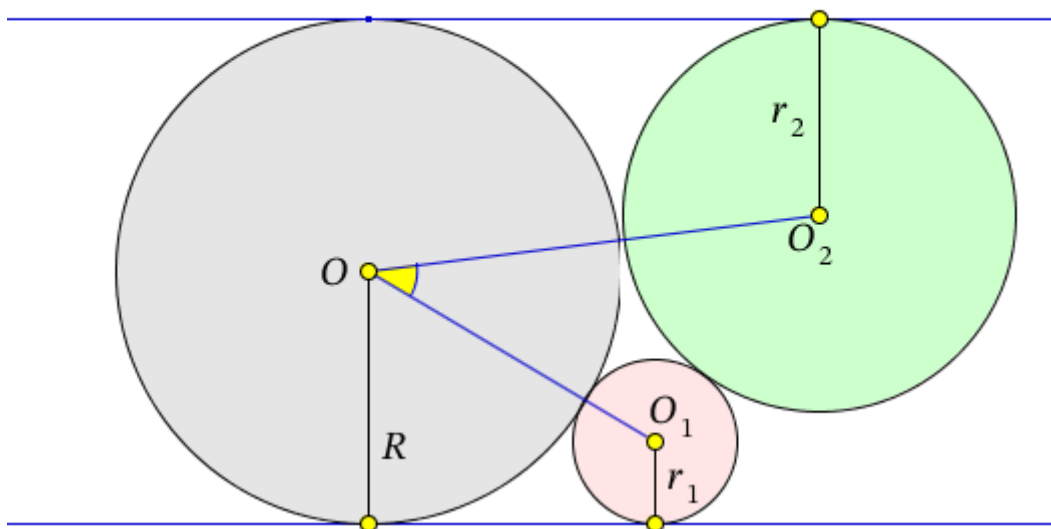
Известно, что $x_1 = 1$ и $x_{n-1} \cdot x_{n+1} = x_n^3 + 1$ при всех $n > 1$. Найдите x_4 .

Ответ: 365, такая последовательность только одна: 1, 2, 9, 365,...

Решение: Достаточно доказать, что $x_2 = 2$, иначе не получится целое:

По условию $1 \cdot x_3 = x_2^3 + 1$, следовательно, $x_2 \cdot x_4 = (x_2^3 + 1)^3 + 1 = x_2^9 + 3x_2^6 + 3x_2^3 + 2$. Это число делится на x_2 только при $x_2 = 1$ или $x_2 = 2$, но 1 быть не может, т.к. последовательность возрастающая.

5) Три окружности попарно касаются друг друга и двух параллельных прямых как показано на рисунке:

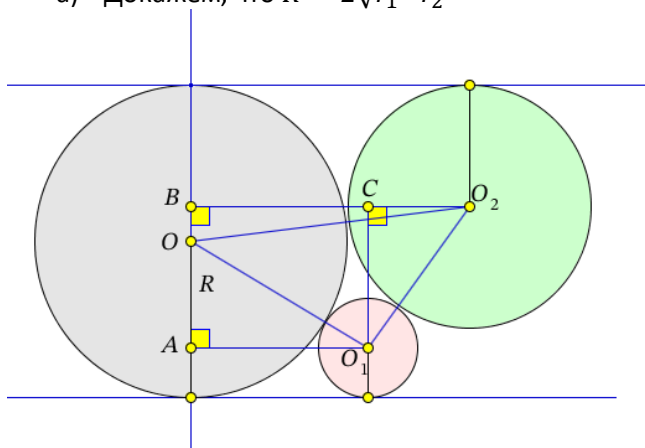


Известно $\cos \angle O_1 O O_2 = \frac{11}{14}$. Найдите отношение радиуса большого круга к сумме радиусов двух оставшихся $\frac{R}{r_1 + r_2}$.

Ответ: $12/13 \approx 0.92$.

Решение: доказываем что $R = 2\sqrt{r_1 \cdot r_2}$ и записываем теорему косинусов для треугольника $O_1 O O_2$.

а) Докажем, что $R = 2\sqrt{r_1 \cdot r_2}$



Запишем теорему Пифагора в ΔAOO_1 : $AO_1^2 = (R + r_1)^2 - (R - r_1)^2 = 4Rr_1$. Аналогично $OB = 4Rr_2$. Запишем теорему Пифагора в треугольнике O_1O_2C :

$$(2R - r_1 - r_2)^2 + (2\sqrt{Rr_2} - 2\sqrt{Rr_1})^2 = (r_1 + r_2)^2$$

$$4R^2 + r_1^2 + r_2^2 - 4Rr_1 - 4Rr_2 + 2r_1r_2 + 4Rr_1 + 4Rr_2 - 8R\sqrt{r_1r_2} = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2$$

Раскроем скобки и приведем подобные:

$$4R^2 - 8R\sqrt{r_1r_2} = 0$$

$$R = 2\sqrt{r_1r_2}$$

b) Запишем т. косинусов:

$$(R + r_1)^2 + (R + r_2)^2 - 2 \cdot \frac{11}{14} \cdot (R + r_1)(R + r_2) = (r_1 + r_2)^2$$

Раскроем скобки и приведем подобные

$$\frac{6}{14}R^2 + \frac{6}{14}R(r_1 + r_2) + r_1^2 + r_2^2 - \frac{11}{7}r_1r_2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2$$

$$\frac{6}{14}R^2 + \frac{6}{14}R(r_1 + r_2) = \frac{25}{7}r_1r_2$$

вспоминаем, что $R = 2\sqrt{r_1 \cdot r_2}$

$$\frac{6}{14}R^2 + \frac{6}{14}R(r_1 + r_2) = \frac{25}{28}R^2$$

$$\frac{6}{14}R(r_1 + r_2) = \frac{13}{28}R^2$$

$$12(r_1 + r_2) = 13R$$

$$\frac{R}{r_1 + r_2} = \frac{12}{13}$$

6) В спортивный клуб ходит 16 школьников. На каждой тренировке они делятся на 2 команды (не обязательно одинакового размера) и играют в футбол. За какое наименьшее число тренировок можно их разделить на команды так, чтобы любые два школьника хотя бы один раз сыграли в разных командах?

Ответ: 4.

Решение: пронумеруем участников 0,1,...,15 и запишем номер в двоичной системе счисления (4 цифры, могут начинаться с нуля). Будем считать, что если i-я цифра 0, то он на i-й тренировке играет за «синих», а если 1 – то за «красных». Поскольку любые два номера отличаются хотя бы в одном разряде, то, соответственно, два игрока попадут в разные команды. За три тренировки так разбить нельзя, поскольку всего 8 последовательностей из нулей и единиц длины 3. Т.е. у каких-то двух школьников последовательности совпадут, и они все время будут играть в одной команде.