Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заочного этапа 2025/2026 учебного года для 9 класса

1. Найдите все целые n, при которых $n^2 + 2n - 120$ – простое число. В ответе укажите произведение найденных чисел n или 0, если таких чисел не существует.
Напомним, что простым числом называют такое натуральное число, которое больше 1 и делится только на 1 и само на себя.

Ответ: -143.
Решение. Так как $n^2 + 2n - 120 = (n + 12)(n - 10)$ – простое, то один из сомножителей равен 1 или -1. Потому возможны четыре случая:
1) $n + 12 = 1 \Rightarrow n = -11$. Тогда $n - 10 = -21$, и число $1 \cdot (-21) = -21$ не является простым;
2) $n + 12 = -1 \Rightarrow n = -13$. Тогда $n - 10 = -23$, и число $(-1) \cdot (-23) = 23$ является простым;
3) $n - 10 = 1 \Rightarrow n = 11$. Тогда $n + 12 = 23$, и число $1 \cdot 23 = 23$ является простым;
4) $n - 10 = -1 \Rightarrow n = 9$. Тогда $n + 12 = 21$, и число $(-1) \cdot 21 = -21$ не является простым.
Значит, подходят значения $n = -13$ и $n = 11$, произведение которых равно (-143).

2. Про 2026-значное число известно, что оно кратно 9, а также, что любые 4 подряд идущие цифры этого числа образуют 4-значное число, которое тоже кратно 9. Нулей в записи числа нет. Найдите последнюю цифру числа (справа), если известно, что первая (слева) цифра этого числа – 3.

Ответ: 6.
Решение. Разобьем число на 506 четверок цифр и еще две цифры.
Сумма цифр числа кратна 9, сумма цифр в любой четверке кратна 9, значит сумма последних двух цифр тоже кратна 9 (то есть равна 9 или 18).
Далее, так как $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} \vdots 9$ и $a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + a_{i+4} \vdots 9$, то $a_i - a_{i+4} \vdots 9 \Rightarrow a_i = a_{i+4}$ (так как нулей в этом числе нет), то есть цифры числа повторяются с периодом 4.
Следовательно, 2025-я цифра числа совпадает с 1-й (так как 2025 – 1 кратно 4), то есть равна 3. Поэтому последняя цифра равна 6.

3. Есть 5 одинаковых чашек, 4 одинаковые кружки и 3 одинаковых стакана. Надо расставить их в ряд, при условии, что два стакана не могут стоять рядом. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 15120.
Решение. Сначала расставим чашки и кружки, это можно сделать $C_9^4 = 126$ способами.
Между 9 чашками + кружками есть 10 промежутков (8 между ними и по одному справа и слева). В любой из этих промежутков можно поставить один из трех стаканов, получаем $C_{10}^3 = 120$. Перемножая, получим $126 \times 120 = 15120$.

4. Участники шахматного кружка сыграли в один круг, т.е. каждый сыграл один раз с каждым. Чемпион Коля набрал больше очков, чем каждый из остальных участников, но меньше, чем 55% от максимально возможного количества очков, которое мог набрать участник турнира. Какое наименьшее число участников могло быть в кружке?
Напомним, что в шахматах победитель получает одно очко, проигравший не получает ничего, а в случае ничьи оба игрока получают по ½ очка.

Ответ: 12.

Решение. Если есть n участников, то будет сыграно $\frac{n(n-1)}{2}$ партий, и таким же будет суммарное количество набранных всеми участниками очков.
Чемпион должен набрать как минимум $\frac{n}{2}$ очков. Действительно, если он набрал $\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$, а остальные еще меньше, то в сумме получается меньше $\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot n=\frac{n(n-1)}{2}$, что невозможно.
Решив неравенство $\frac{n}{2}<0.55(n-1)$, получим $n>11$.
Покажем, что для 12 участников такая ситуация возможна. Пусть Коля выиграл у Пети, а с остальными сыграл вничью. Тогда он получит $1+10\cdot 0{,}5=6$ очков, что составляет 54.55% от 11. Если остальные участники сыграют друг с другом вничью, то они получат по 5,5 очков (кроме Пети, получившего 5 очков). Таким образом, Коля, действительно, набрал больше всех.

5. В трапеции *ABCD* известны основания *AD* = 10, $BC=7-\sqrt{33}$ и боковые стороны *AB* = 5, *CD* = 7. Точка *E* расположена на основании *BC*. Найдите наименьший возможный периметр треугольника *AED*. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой.

Ответ: 22,84.

Решение. Для расчета нам понадобится высота трапеции. Ее можно искать по-разному. Например, проведем через вершину *B* прямую *BF* параллельно *CD* (см. рис. 1), в получившемся ΔABF известны три стороны.

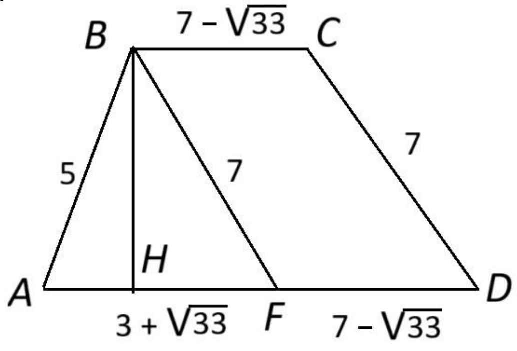

Рис. 1

Теперь можно найти площадь по формуле Герона, а затем высоту *BH*. Или же обозначить *AH* = *x* и записать квадрат высоты двумя способами:

$$5^2 - x^2 = 7^2 - \left(3 + \sqrt{33} - x\right)^2.$$

Отсюда получаем

$$25 - x^2 = 49 - \left(3 + \sqrt{33}\right)^2 + 2x\left(3 + \sqrt{33}\right) - x^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x\left(3 + \sqrt{33}\right) = 25 - 49 + 9 + 33 + 6\sqrt{33} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \; x\left(3 + \sqrt{33}\right) = 9 + 3\sqrt{33} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$$

Значит, *AH* = 3, *BH* = 4. Отметим также, что тогда *HD* = 7 (это нам понадобится в дальнейшем).
Далее нам нужно найти минимальное значение суммы длин отрезков *AE* и *ED* (третья сторона треугольника *AD* = 10 не изменяется при изменении положения точки *E*).
Применим стандартный для такой ситуации ход: построим точку *P* симметрично точке *D* относительно прямой *BQ*., на которой находится верхнее основание трапеции (см. рис. 2, на котором точку *C* умышленно убрали). После этого будем искать минимум суммы длин *AE* и *EP* (очевидно, что *EP* = *ED*).

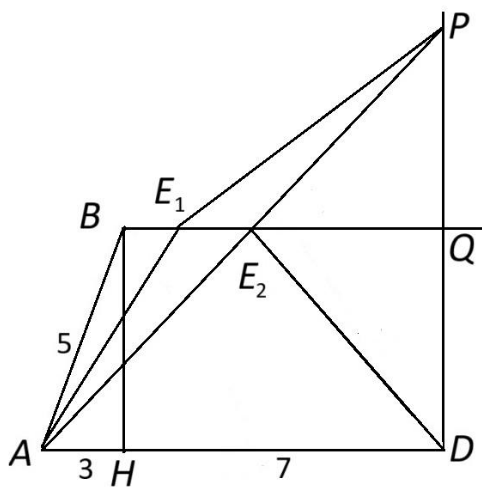

Рис. 2

Минимум суммы достигается тогда, когда ломаная *AEP* превращается в прямую линию. На рис. 2 это положение соответствует точке E_2. И если взять любую другую точку, например, точку E_1, то $AE_1 + E_1P > AE_2 + E_2P = AP$. При этом, чем левее точка *E*, тем сумма *AE* + *EP* больше.
Однако есть еще один аспект, на который нужно обратить внимание. По условию, точка *E* расположена не на прямой *BC*, а на основании трапеции *BC*. Проверим, выполнено ли это условие для точки E_2. (Заметим, что именно из-за этого мы убрали точку *C* из предыдущего рисунка.)
Очевидно, что $E_2Q = 5$, как средняя линия треугольника *APD*. Значит, $BE_2 = 7 - 5 = 2$. И так как $BC = 7 - \sqrt{33} < 2$, то точка E_2 лежит не на основании трапеции *BC*, а на его продолжении!
Значит, искомая точка – это не точка E_2, а крайняя правая точка основания *BC*, то есть точка *C*. Периметр Δ*ACD* равен *AC* + 10 + 7.

Пусть проекция точки *C* на основание *AD* есть точка *G*. Тогда *CG* = 4, $AG = 3 + 7 - \sqrt{33} = 10 - \sqrt{33}$. И по теореме Пифагора

$$AC^2 = \left(10 - \sqrt{33}\right)^2 + 4^2 = 149 - 20\sqrt{33}.$$

Периметр треугольника *ACD* равен $17 + \sqrt{149 - 20\sqrt{33}} \approx 22{,}84$.

6. Функция $f(n)$ определена для всех натуральных n, принимает натуральные значения и является монотонно возрастающей, т.е. если $n > m$, то $f(n) > f(m)$. Также известно, что $f(f(n)) = 3n$ при любом натуральном n.
Найдите $f(100)$.

Ответ: 181.

Решение. Заметим, что из монотонности вытекает $f(n) \geq f(n-1) + 1 \geq f(n-2) + 2 \geq \cdots \geq f(1) + n - 1 \geq n$. Рассмотрим $f\big(f(1)\big) = 3$,тогда $f(1) \leq 3$. Рассмотрим возможные варианты:

1) *f*(1) = 1 – не может быть, т.к. тогда $f\big(f(1)\big) = 1$.
2) $f(1) = 3$. Тогда $f(3) = f\big(f(1)\big) = 3 = f(1)$,что противоречит монотонности.
3) $f(1) = 2, f(2) = 3$. Тогда $f(3) = f\big(f(2)\big) = 6, f(6) = f\big(f(3)\big) = 9$. Значения в точках 4 и 5 можно найти из монотонности $6 = f(3) < f(4) < f(5) < f(6) = 9 \Rightarrow f(4) = 7; f(5) = 8$.

Введем обозначение $f_{[n]}(x) = \underbrace{f(f(\dots f\quad(x)\dots))}_{n \text{ раз}}$.

Заметим закономерность $f_{[2n]}(3) = 3^{n+1}, f_{[2n+1]}(3) = 2 \cdot f_{[2n]}(3)$.

Таким образом, $f(3^{n+1}) = f_{[2n+1]}(3) = 2 \cdot f_{[2n]}(3) = 2 \cdot 3^{n+1}$, а $f(2 \cdot 3^{n+1}) = f_{[2n+2]}(3) = 3^{n+2}$.

Значит, функция f переводит отрезок $[3^{n+1}; 2 \cdot 3^{n+1}]$ в отрезок $[2 \cdot 3^{n+1}; 3 \cdot 3^{n+1}]$ при всех $x = 0, 1, 2, \dots, 3^{n+1}$.

Заметим, что на этих отрезках одинаковое количество точек, значит $f(3^{n+1} + x) = 2 \cdot 3^{n+1} + x$.

Так как $100 = 3^4 + 19$, то в нашем случае $n + 1 = 4$, $x = 19$, $f(100) = 2 \cdot 3^4 + 19 = 181$.